序

E.Kreyszig所著的Introductory functional analysis with applications是一本具有特色的泛函分析的入门书。在内容上，它不依赖于“实变函数”、“测度论”作为必要的基础知识，而仅以一般的高等数学和线性代数基础作为阅读此书的预备知识；在理论上保持体系的完整，论证上保证逻辑的严密的前提下，力求通俗易懂，适合自学，注意实际应用，使泛函分析这门较为抽象的学科变得易于为广大工科、数学系以外的理科学生，研究生以及广大科技工程人员所接受。

基于上述特点和国内至今还没有此类泛函书的情况，刘、徐两位同志对该书进行了编译，将原书（共十一章及三段附录）近700页篇幅的的洋洋大作进行了取舍，考虑到国内的实际需要，突出了基础与重点，压缩了内容，同时保留了原著体系和特点。此外，在编译本中，还给出了许多典型的例题和适当的习题，并附以全部习题的解答，有利于自学。

本书可作为工科和某些理科（如物理，力学等）学生、研究生学习泛函分析的教材和参考书，也可作广大工程技术人员自学泛函分析的参考书。

定光桂

于南开大学

1987年6月8日

目　录

前　言

泛函分析是近代数学中一重要分支，起源于古典分析，它将线性代数、线性常与偏微分方程、积分方程、变分学、逼近论中具有共同特征的问题进行抽象概括，且综合了代数、拓扑和分析结构于一体。泛函分析的基本概念建立于本世纪初，成熟于50年代，其内容已渗透到逼近论、偏微分方程、概率论、最优化理论等各方面。近十几年来泛函分析在工程技术方面的应用日益广泛和有效，国内外技术科学的论文、专著常引用泛函分析的内容和方法，获取学位要通过泛函分析考试，工科院校的本科或研究生要开设泛函分析课程，因而我国迫切需要适合工科院校和科技工作者的泛函分析入门书。

本书是在工科泛函分析教学实践基础上，根据*ERWIN KREYSZIG* 所著“泛函分析入门及应用”一书编译的。其特点是准备知识只要求数学分析与线性代数，在保证内容系统的严谨条件下，避开实变函数论中测度、勒贝格积分等内容，所需集论与拓扑的知识在附录或有关内容中给出。在概念引入上注意其实际背景，叙述与证明上做到严谨详尽，并介绍了某些实际应用。本书附有习题及解答，对较难的题目给出较详尽的解法，对较易的给出题示。这些都有助于科技工作者和工科院校学生克服学习近代抽象数学所遇到的困难。

本书是泛函分析入门书，书中包括了泛函分析中最基本的内容：度量空间，Banach空间与Hilbert空间的性质及有关算子。谱的理论只作了简单介绍。

本书在编译过程中，得到南开大学定光桂教授的热情指导，对全书作了校订并写了序，在此深致谢意。

由于编译者水平和经验所限，不足和错误之处难免，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1987年3月

第一章 度量空间

度量空间是实直线R的推广，其在泛函分析中的地位和作用类似于微积分中的实直线R. 度量空间对数学各种不同分支中的问题统一处理提供了基础.

在微积分中许多结果不依赖于实数或复数的代数结构，而只与两个数x与y之间的距离概念有关. 例如，我们考虑极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$，这里只用到$x$与$x_0$以及$f$与$l$之间的距离概念给出了函数极限的定义. 从极限概念出发，从而引出了函数的连续性等重要理论.

本章将在一般抽象集合上定义距离（度量），并在此基础上研究极限、连续和完备等概念.

重要概念、主要内容的概述

首先定义度量空间(§1.1)，它是一集合X在其上赋予了度量，这里的度量就是X的两个元素（点）间的距离函数，并由一组公理规定. 这些公理是根据实直线R与复平面C上的两点间距离而抽象得到. (§1.2)例题说明度量空间是广泛存在的一般概念. 研究度量空间的一个重要问题是看其是否具有完备性(§1.5)及如何使之完备化(§1.6). 另一概念是度量空间是否具有可分性(§1.3)，可分的度量空间比不可分的简单.

§1.1 度 量 空 间

在微积分中研究了定义在实直线R上的函数及其极限，那里的极限是以R上的距离作基础定义的，而R上任意二点x，y的距离为：$d(x, y)=|x-y|$。

在泛函分析中，我们将研究更一般的“空间”和定义在其上的“函数”及相应的“极限”．因此，首先应将R上距离的概念推广到一般抽象集合X上，并使其具有R上距离的几个最基本的性质。这样就产生了泛函分析中重要的基本概念．

1.1-1定义（度量空间，度量）．度量空间是由一非空集合X与一度量d（或称做距离函数）组成的对(X, d)，其中d是定义①在$X\times X$上的一个函数，且对于任意x，$y, z\in X$，有：

(M1) d是有限的非负实数．

(M2) $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$．

(M3) $d(x,y)=d(y,x)$． （对称性）

(M4) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$． （三角不等式）．

X的元素x称为点，对于固定的$x, y\in X$，称非负数$d(x,y)$为x到y的距离．(M1)至(M4)是度量公理．

根据(M4)，我们用数学归纳法可证得推广的三角不等式．

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$$

---

① 符号×表示集合的笛卡儿乘积，$X\times X$表示X里元素的所有有序对的集合．

在不至于引起混淆时，可将(X,d)简记作X.

对于度量空间(X,d)的任何一个非空子集Y，当我们将d限制①在 $Y\times Y$上，即在$Y\times Y$上定义函数$\tilde{d}(x,y)$，使得对于所有的$x,y\in Y$，有，

$$\tilde{d}(x,y)=d(x,y)$$

或记作$\tilde{d}=d\Big|_{Y\times Y}$，那么，$\tilde{d}$是$Y$上的度量，称$(Y,\tilde{d})$为$(X,d)$的子空间．$\tilde{d}$称做$d$在$Y$上的导出度量.

1.1-2 **例题**

【例 1】 设X是所有有序实数对组成的集合，定义：

$$d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|$$

这里，$x=(\xi_1,\ \xi_2)$，$y=(\eta_1,\ \eta_2)$，证明d_1是X上的一个度量.

证明由于ξ_j，$\eta_j(j=1,2)$都是实数，$(M1)$至$(M3)$显然成立．现证$(M4)$，对于任意$Z=(\zeta_1,\ \zeta_2)\in X$，有，

$$\begin{aligned}d_1(x,y)&=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|\\&=|(\xi_1-\zeta_1)+(\zeta_1-\eta_1)|+|(\xi_2-\zeta_2)\\&\quad+(\zeta_2-\eta_2)|\\&\leqslant|\xi_1-\zeta_1|+|\zeta_1-\eta_1|+|\xi_2-\zeta_2|\\&\quad+|\zeta_2-\eta_2|\\&=(|\xi_1-\zeta_1|+|\xi_2-\zeta_2|)+(|\zeta_1-\eta_1|+|\zeta_2\\&\quad-\eta_2|)\\&=d_1(x,z)+d_1(z,y).\end{aligned}$$

① 参阅附录1中关于“限制”概念的论述.

因此，d_1是X上的一度量.

【例2】 欧几里得(Euclidean)空间R^n. 这个空间是由所有n个实数的有序组$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$等组成的集合，并按

$$d(x, y)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

定义欧几里得度量，则R^n是度量空间.

证明 (M1)及(M3)显然成立. 若，$d(x,y)=0$，那么，对于每个j，有

$$0\leqslant\left|\xi_j-\eta_j\right|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

所以，$\xi_j=\eta_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，即，$x=y$. 反过来，易见当$x=y$时，$d(x, y)=0$. (M2)得证.

在证明(M4)之前，先证柯西(Cauchy)不等式，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

这里a_k，$b_k(k=1, 2, \cdots, n)$均为实数. 任取实数λ，有，

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

右端是λ的二次三项式，它对于λ的一切值都是非负的，故其判别式不会大于零，即，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

成立. 利用柯西不等式，得，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad (3)$$

在R^n中任取$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$并在(3)中，令$a_k=\xi_k-\zeta_k$，$b_k=\zeta_k-\eta_k$. 则有，

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

即，　　$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$

$(M4)$得证. 因此，R^n是度量空间.

$n=1$时，$R^1=R$，$d(x,\ y)=|x-y|$. $n=2$时，R^2上的度量为$d(x,\ y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}$，对照例1，它们的集合是相同的，但度量不同，因此，R^2与例1中的$(X,\ d_1)$是不同的度量空间. 这说明一个重要事实，在同一集合上可赋予不同的度量，构成不同的度量空间.

又如，在全体n个实数有序组所成之集上，还可以赋予如下两个度量，

$$d_1(x,\ y)=\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\eta_j\right|$$

$$d_\infty(x,\ y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\xi_j-\eta_j\right|$$

可得到两个不同的度量空间.

如果在R^n中，每个点$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的坐标是复数，度量按

$$d(x, y)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\eta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

定义，那么，用类似的方法可证得此空间按度量(4) 为一度量空间，称做酉空间（或称为n维复欧几里得空间），记作C^n.

【例 3】 有界数列空间l^∞. 取所有有界复数列作为元素组成集合X，即对于X里的每个元素$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots,)$，简记作$x=(\xi_j)$，都存在一个实数$C_x$，使得，

$$|\xi_j|\leqslant C_x \qquad (j=1, 2, \cdots,)$$

按

$$(5) \qquad d(x, y)=\sup_{j\in N}\left|\xi_j-\eta_j\right|$$

定义度量，其中，$y=(\eta_j)\in X$, $N=\{1, 2\cdots\}$, sup表示上确界（最小的上界①），令$l^\infty=(X, d)$则l^∞是度量空间.

证明　由于$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$都是有界的复数列，所以，$|\xi_j-\eta_j|$ $(j=1, 2, \cdots)$是有界的，并存在上确界. 即，

$$d(x, y)=\sup_{j\in N}|\xi_j-\eta_j| \text{是有限的非负实数.}$$

由$x=y$推出$d(x, y)=0$是显然的. 反过来，若，

$d(x, y)=\sup\limits_{j\in N}|\xi_j-\eta_j|=0$，那么，对于每个$j$有，

$$0\leqslant|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in N}|\xi_j-\eta_j|=0$$

因此，$\xi_j=\eta_j$ $(j=1, 2, \cdots,)$. $x=y$. 即$(M2)$得证.

---

① 参阅附录1中关于上确界的论述.

$(M3)$显然成立．下面证$(M4)$，对任意$z=(\zeta_i)\in X$，有，

$$|\xi_j-\eta_j| = |(\xi_j-\zeta_j)+(\zeta_j-\eta_j)|$$
$$\leqslant|\xi_j-\zeta_j| + |\zeta_j-\eta_j|$$
$$\leqslant\sup_{j\in N}|\xi_j-\zeta_j| + \sup_{j\in N}|\zeta_j-\eta_j|$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots)$$

因为上确界是一切上界中的最小者，所以，

$$\sup_{j\in N}|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in N}|\xi_j-\zeta_j| + \sup_{j\in N}|\zeta-\eta_j|$$

即 $$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

从而证得l^∞是度量空间．

【例 4】 连续函数空间$C[a,b]$．设$J=[a,\ b]$上所有实值连续函数$x(t)$所成之集为X，对于任意$x(t)$，$y(t)\in X$，定义其度量为

$$d(x,\ y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| \tag{5}$$

记$C[a,\ b]=(X,d)$，则$C[a,b]$是一度量空间．

证明 $(M1)$与$(M3)$显然成立．由$x=y$立即可得$d(x,\ y)=0$．若$d(x,\ y)=0$，那么，对于每个$t\in[a,b]$，有

$$0\leqslant|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|=0$$

于是，$x=y$．故$(M2)$成立．下面证$(M4)$，由于在闭区间上连续函数可取到最大值，因此，存在$t_0\in[a,\ b]$，使得

$$\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|=|x(t_0)-y(t_0)|$$
$$\leqslant|x(t_0)-z(t_0)|+|z(t_0)-y(t_0)|$$
$$\leqslant\max_{t\in J}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in J}|z(t)-y(t)|$$

即，　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

因此，$C[a,b]$为一度量空间.

在例4的集合X上，还可赋予度量

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$$

得到另一度量空间（X，$\tilde{d}$）（证明留作习题）

【例5】 离散度量空间. 对于任何非空集合X，定义度量如下，x，$y\in X$，

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

易证d满足度量公理($M1$)至($M4$). 因此，(X，d)是度量空间.

此例说明任一非空集合都可以在其上赋予度量使之成为度量空间.

习　题　1.1

1.证明实直线是一度量空间.

2.$d(x,y)=(x-y)^2$是所有实数组成的集合上的度量吗?

3.试证$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ 是定义在全体实数所组成之集上的度量.

4.求出由两个点组成之集X上的所有度量，再求出由一个点组成的集上的所有度量.

5.设d是X上的一个度量，分别确定满足下列条件的所有常数k

(i)使得kd是X上的度量.

(ii)使得$d+k$是X上的一度量.

6.若A是由其项值取0和1的序列组成的l^∞的子空间，那么，A上

的导出度量是什么?

7. 证明由 $\widetilde{d}(x, y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$ 定义的度量是例4中集合X上的另一度量.

8. 证明例5中的d是一度量.

9. (Hamming距离) 设X是0和1的所有三元有序数组的集合，证明X由8个元素组成.且$d(x,y)=$ “x与y中项值不同的位置的个数”是X上一度量.(此空间和类似的n个数组空间在开关和自动控制理论以及编码中起着一定的作用. $d(x, y)$通常称做x与y间的Hamming距离.)

10. 证明推广的三角不等式(1).

11. 利用习题10证明.

$$|d(x, y)-d(z, w)|\leqslant d(x, z)+d(y, w).$$

12. 利用三角不等式证明.

$$|d(x, z)-d(y, z)|\leqslant d(x, y).$$

13. ($M1$) 至 ($M4$) 可用另外的公理代替.例如,用 ($M2$) 及不等式

$$d(x, y)\leqslant d(z, x)+d(z, y)$$

可推出 ($M3$) 及 ($M4$).

14. 用($M2$)至($M4$)证明度量的非负性

§1.2 三个重要不等式及较复杂的例题

本节要证明的三个不等式，在理论研究和实际问题中是不可缺少的工具. 在本节例题中和以后各章里要多次用到它们.

1.2-1 荷尔德(Hölder)不等式. 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p<+\infty$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q<+\infty$，那么，

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{1/q} \qquad (1)$$

证明　令$u=t^{p-1}$　则　$t=u^{q-1}$，对于任意正数α，β，有（参阅图 1）

$$\alpha\beta\leqslant\int_0^{\alpha}t^{p-1}dt+\int_0^{\beta}u^{q-1}du=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q} \qquad (2)$$

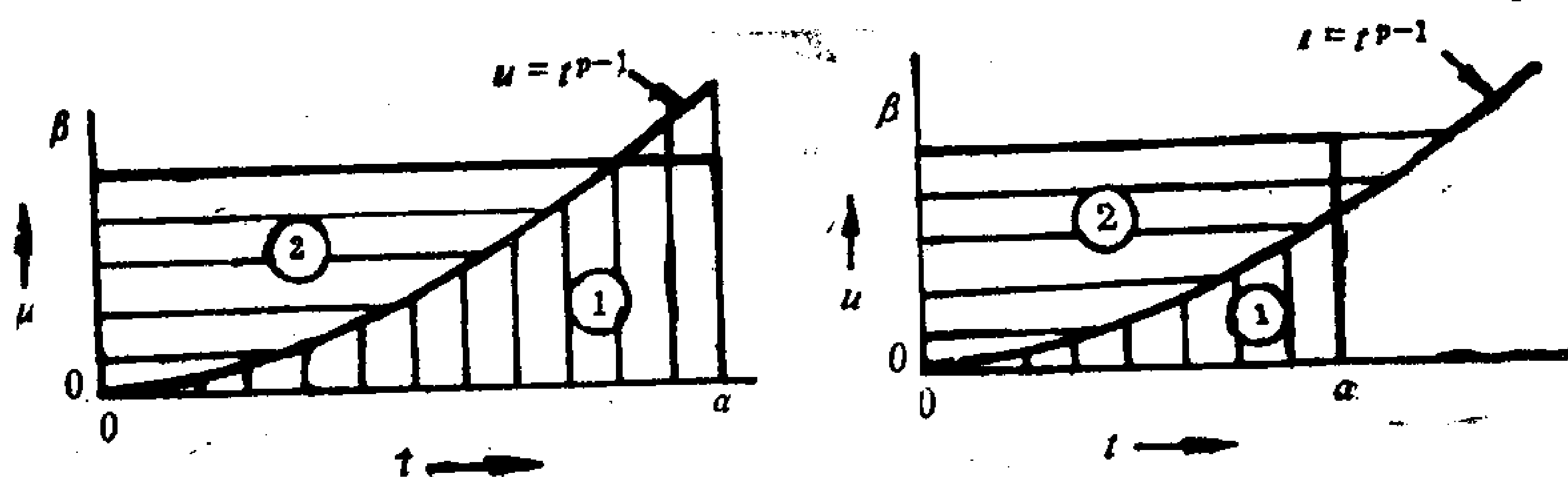


图 1　不等式(2)之图示。其中①对应(2)中第一个积分②对应第二个积分

如果$\alpha=0$或$\beta=0$，(2)式显然成立，设$(\tilde{\xi}_j)$与$(\tilde{\eta}_j)$满足

$$\sum|\tilde{\xi}_j|^p=1,\qquad \sum|\tilde{\eta}_j|^q=1 \qquad (3)$$

令，$\alpha=|\tilde{\xi}_j|$，$\beta=|\tilde{\eta}_j|$代入(2)，得，

$$|\tilde{\xi}_j\tilde{\eta}_j|\leqslant\frac{1}{p}|\tilde{\xi}_j|^p+\frac{1}{q}|\tilde{\eta}_j|^q$$

对j求和并利用(3)式，有

$$\sum |\tilde{\xi}_i \tilde{\eta}_i| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{4}$$

今取任何非零的$x = (\xi_i)$与$y = (\eta_i)$满足，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q < +\infty \qquad \text{且令}$$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i}{(\sum |\xi_k|^p)^{1/p}} \qquad \tilde{\eta}_i = \frac{\eta_i}{(\sum |\eta_m|^q)^{1/q}} \tag{5}$$

则它们满足(3)，将(5)代入(4)得Hölder不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{1/q}$$

当$p = q = 2$时，(1)成为

1.2-2 柯西-许瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2\right)^{1/2} \tag{6}$$

1.2-3 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

设 $p \geqslant 1$，$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$，$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p < +\infty$，那么，有

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p} \tag{7}$$

证明 对于$p = 1$，(7)显然成立. 设$p > 1$，

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，令$\omega_i = \xi_i + \eta_i$，则，

$$\begin{aligned} |\omega_i|^p &= |\xi_i + \eta_i| \, |\omega_i|^{p-1} \\ &\leqslant |\xi_i| \, |\omega_i|^{p-1} + |\eta_i| \, |\omega_i|^{p-1} \end{aligned} \tag{8}$$

对i从1至n求和，并利用$p = q(p-1)$及Hölder不等式(1)，

得，

$$\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\ |\omega_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|\ |\omega_j|^{p-1}$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$=\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\right)^{1/q}$$

因此，有

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{9}$$

因为$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p$及$\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p$收敛，所以，当$n\to\infty$时，(9)式左端级数也收敛，从而得出Minkowski不等式，

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{1/p}$$

为了阐明度量空间的概念．掌握验证度量公理的方法，特别是要利用一些技巧論证三角不等式（$M4$），我们再给出三个重要的范例．

1.2-4　空间l^p（$p\geqslant1$）．l^p是所有p方可和的数列所成之集．即，每个$x=(\xi_j)\in l^p$，均满足，

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p<\infty$$

对于任意$x=(\xi_i)\in l^p$，$y=(\eta_i)\in l^p$，其度量定义为，

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p} \tag{10}$$

试证l^p是度量空间.

证明　易证$(M2)$及$(M3)$成立. 对于l^p中的任意元素$x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$，$z=(\zeta_i)$，利用Minkowski不等式，得

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{1/p}<+\infty$$

以及

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}\\&=\left[\sum_{i=1}^{\infty}|(\xi_i-\zeta_i)+(\zeta_i-\eta_i)|^p\right]^{1/p}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\zeta_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}\\&=d(x,z)+d(z,y)\end{aligned}$$

故证明了$(M1)$及$(M4)$成立.

1.2-5　**序列空间S.** S是所有复数列（有界或无界）组成的集，其度量定义成

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|} \tag{11}$$

其中，$x=(\xi_i)$. $y=(\eta_i)$. 验证S是度量空间

证明　由(11)定义的$d(x,y)$显然满足$(M1)$、$(M2)$、$(M3)$. 下面验证$(M4)$，为此，引进函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

由于$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$，$f(t)$是单调增加的．又，

$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \tag{12}$$

$$=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

令$z=(\zeta_i)$，并在(12)中，置$a=\xi_j-\zeta_j$，$b=\zeta_j-\eta_j$，则有

$$\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}\leqslant\frac{|\xi_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|}+\frac{|\zeta_j-\eta_j|}{1+|\zeta_j-\eta_j|}$$

两边同乘以$1/2^j$后，对j从 1 至∞取和，得，

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

这就验证了($M4$)成立，同时证得S是度量空间

1.2-6 有界函数空间$B(A)$．定义在集A上的有界函数全体所成之集$B(A)$，按

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)| \tag{13}$$

定义度量．试证$B(A)$是度量空间．

证明 显然，由(13)定义的d满足($M1$)、($M3$)．今证d满足($M2$)，由$x=y$推出$d(x,y)=0$是显而易见的．反之，

如果$d(x,y)=0$，那么，对于每个$t\in A$，有，

$$0\leqslant|x(t)-y(t)|\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|=0$$

于是，$x=y$. (M2)得证.

下面验证(M4)，对于每个$t\in A$，x、y、$z\in B(A)$.

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&=|[x(t)-z(t)]+[z(t)-y(t)]|\\&\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|\\&\quad+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|\end{aligned}$$

不等式右端是与t无关的数，根据上确界是上界中之最小者，从而

$$\begin{aligned}\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|\leqslant&\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|\\&+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|\end{aligned}$$

即　　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

因此，$B(A)$是度量空间.

习　题　1.2

1. 在1.2-5的(11)中，利用使$\sum\mu_j$收敛的$\mu_j>0$代替$1/2^j$，试证可以得到另外的度量.

2. 利用(2)证明二正数的几何平均值不超过其算术平均值.

3. 证明由Cauchy-Schwarz不等式可推出

$$(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|)^2\leqslant n(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)$$

4. 找一收敛于零的序列，但不属于任何l^p $(1\leqslant p<+\infty)$.

5. 找一序列$x=(\xi_j)$，$x\in l^p$ $(p>1)$.但，$x\notin l^1$

6. （直径，有界集）在度量空间（X，d）中，一个非空集A的直径$\delta(A)$定义为，$\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)$

如果$\delta(A)<\infty$，称A是有界的．试证若$A\subset B$，则，$\delta(A)\leqslant\delta(B)$

7．试证 $\delta(A)=0$（参考习题6）的充要条件是A为单点集．

8．（两集合间的距离）度量空间(X, d)的两个非空子集A与B间的距离$D(A, B)$定义为，

$$D(A, B)=\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a, b)$$

试证D不是X的幂集上的度量．

9．若$A\cap B\neq\phi$，试证习题8中的$D(A, B)=0$，其逆成立吗？

10．点x到(X, d)的非空子集B的距离$D(x, B)$定义为，

$$D(x, B)=\inf_{b\in B} d(x, b)$$

试证对任何x，$y\in X$，有

$$|D(x, B)-D(y, B)|\leqslant d(x, y)$$

11．设(X, d)是任何一度量空间，证明，

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

是X上的另一度量．并证明X按度量$\tilde{d}$是有界的．

12．试证在一度量空间中，两个有界集A与B的并集是有界的(定义见习题6)

13．(度量空间的积)两个度量空间(X_1, d_1)与(X_2, d_2)的笛卡儿乘积$X=X_1\times X_2$，可用多种方法构成度量空间，试证，

$d(x, y)=d_1(x_1, y_1)+d_2(x_2, y_2)$

是一度量，这里，$x=(x_1, x_2)$，$y=(y_1, y_2)$

14．证明由

$$\tilde{d}(x,y)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2}$$

定义的$\tilde{d}$是习题13中X上的另一个度量，

15. 证明按

$$\tilde{\tilde{d}}(x, y)=\max\{d_1(x_1, y_1), d_1(x_2, y_2)\}$$

定义的 $\tilde{\tilde{d}}$ 是习题13中 X 上的第三个度量.

§1.3 开集、闭集、邻域

为了研究度量空间中极限、连续映射等概念，有必要研究度量空间中一些重要点集，其名称我们沿用读者熟知的欧几里得几何中的术语.

与三维欧几里得空间类似，我们在一般的度量空间中引进开球、闭球、球面的概念.

1.3-1 **定义(球与球面)**.设 (X,d) 是一度量空间，$x_0\in X$，实数 $r>0$.称点集

$$B(x_0; r)=\{x \mid x\in X 且 d(x,x_0)<r\}$$

为以 x_0 为中心，r 为半径的开球.称点集

$$\tilde{B}(x_0; r)=\{x \mid x\in X 且 d(x,x_0)\leqslant r\}$$

为以 x_0 为中心，r 为半径的闭球、称点集

$$S(x_0; r)=\{x \mid x\in X 且 d(x,x_0)=r\}$$

为以 x_0 为中心，r 为半径的球面.

由定义可得，$S(x_0;r)=\tilde{B}(x_0;r)-B(x_0;r)$

值得注意的是在一般的度量空间中，球和球面可能不再具有三维欧几里得空间中"球"的形状.例如，在离散度量空间 (X,d) 中，球面 $S(x_0; \frac{1}{2})$ 是空集 $\varnothing$.而开球 $B(x_0; \frac{1}{2})$ 与闭球 $\tilde{B}(x_0; \frac{1}{2})$ 为单点集 $\{x_0\}$.

在度量空间(X,d)中，集$M\subset X$是有界的当且仅当存在$x_0\in X$与一个正数r，使得$M\subset B(x_0;\ r)$（证明留给读者，参看习题1.2中第6题）

开球$B(x_0;\varepsilon)$也称做点x_0的ε-邻域．如果$N\ (\subset X)$包含x_0的某个ε-邻域，则称做x_0的邻域．因此，若N是x_0的邻域，且$N\subset M$，那么，M也是x_0的邻域．

下面我们引进点集中相关的两个重要概念

1.3-2 定义（开集、闭集）．设G是度量空间X的子集，如果G是G中每一点的邻域，则称G是X中的开集．若X的子集F，其在X中的余集是开集，即$F^c=X-F$是X中的开集，则称F是X中的闭集．

如果度量空间X中的集A是点x_0的邻域，则称x_0是A的内点．A的内点全体所成之集称做A的内部，记作A^0或$\mathrm{Int}(A)$．$\mathrm{Int}(A)$是开的且是A中最大的开集．

X的所有开子集组成的集族J具有如下性质．

1.3-3 定理 设J是度量空间X的开子集全体所成之集族．那么，

(T1) $\varnothing\in J$，$X\in J$．

(T2) J中任意多个元素的并集是T中的元素．

(T3) J的有限个元素之交集是T的元素．

证明 (T1) 因为空集$\varnothing$不含任何点，所以不含非内点的点，这就证得$\varnothing\in J$．显然，X是X中每一点的邻域，故，$X\in J$．

(T2) 设$G_\lambda\ (\lambda\in I)$是$X$中任意一族开集，令$G=\bigcup_{\lambda\in I}G_\lambda$．对于任意$x\in G$，则有$\lambda_0\in I$，使得$x\in G_{\lambda_0}$，因为$G_{\lambda_0}$是$X$

中的开集，所以，必存在$B(x;\varepsilon)\subset G_{\lambda_0}\subset G$，即，$x$是$G$的内点，$G$是$x$的邻域．由于$x$的任意性，$(T2)$得证．

$(T3)$　设$G_1,\cdots,G_n$是X中有限个开集，任取$x\in\bigcap_{k=1}^{n}G_k$那么，$x\in G_k(k=1,2,\cdots,n)$，由于G_k是开集，所以，存在$B(x;\varepsilon_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$取$\varepsilon=\min_{1\leq k\leq n}\{\varepsilon_k\}$，则$\varepsilon>0$，且

$B(x;\varepsilon)\subset G_k,(k=1,2,\cdots,n)$，因此，$B(x;\varepsilon)\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k$，这说明

$\bigcap_{k=1}^{n}G_k$是x的邻域，从而证得$\bigcap_{k=1}^{n}G_k\in T$．

定理1.3-3中的性质是最基本的，我们要在更一般的情况下考虑任一集X的子集构成的集族T，若T满足公理$(T1)$至$(T3)$，则称T是X上的一个拓扑．对于给定拓扑T的集合X称做拓扑空间，记为(X,T)．

现在我们再引入两个概念，它们是相互关联的．设A是度量空间X的子集，$x_0\in X$（可以是或不是A的点），如果对于任意$\varepsilon>0$，球$B(x_0;\varepsilon)$里均含有A中异于x_0的点，则称x_0是A的聚点．由A的聚点全体与A所成之并集称为A的闭包，记作$\overline{A}$．

值得注意的是，在R^3中开球$B(x_0;r)$的闭包$\overline{B(x_0;r)}$就是闭球$\widetilde{B}(x_0;r)$．但在一般度量空间中这一性质不一定成立．

关于点集的闭包有下列性质．

1.3-4　**定理．**设A是度量空间X的子集，则．

(a)．A的闭包$\overline{A}$是闭集．

(b)．$\overline{A}$是包含A的最小闭集．

(c). A为闭集的充要条件是$A = \overline{A}$

证明：

(a). 记A的聚点全体为D，那么，$\overline{A}=A\cup D$. 为了证明$\overline{A}$是闭集，只须证$\overline{A}^c$是开集. 任取$x\in\overline{A}^c$，则$x\notin D, x\notin A$. 必存在$B(x;\varepsilon)$不含A的点，且$B(x;\varepsilon)$中的每个点都不是A的聚点，即$B(x;\varepsilon)\subset A^c$与$B(x;\varepsilon)\subset D^c$因此，$B(x;\varepsilon)\subset\overline{A}^c$。故$\overline{A}^c$是开集同时也就证明了$\overline{A}$是闭集.

(b) 设F是包含A的任意闭集，要证$\overline{A}$是包含A的最小闭集，只须证$\overline{A}\subset F$. 首先我们用反证法证明F的聚点均是F的点. 若有F的聚点x_0不属于F，则$x_0\in F^c$，因为F^c是开集，必存在$B(x_0;\varepsilon)\subset F^c$，于是$B(x_0;\varepsilon)$不含$F$中的点，这与$x_0$是$F$的聚点矛盾，因此，$F$的聚点均在$F$中. 由于$A\subset F$，根据聚点的定义知，$A$的聚点均是$F$的聚点，从而$A$的聚点都在$F$中，$\overline{A}\subset F$. 由(a)知$\overline{A}$是闭集，即证得$\overline{A}$是包含$A$的最小闭集.

(c) 必要性. 若A是闭集，则由(b)，$\overline{A}$是包含A的最小闭集，因此，$\overline{A}\subset A$. 故$A=\overline{A}$.

充分性，若$A=\overline{A}$，由(a)知$\overline{A}$是闭集. 所以A是闭集.

下面我们将微积分中连续函数的概念推广到一般度量空间上.

1.3-5 **定义**（连续映射）设(X,d)与$(Y,\tilde{d})$是两个度量空间. 称映射$T: X\to Y$在点$x_0\in X$连续，是指对于任意

$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得满足$d(x, x_0)<\delta$的所有x，$\tilde{d}(Tx, Tx_0)<\varepsilon$恒成立，如果$T$关于$X$的每个点$x$都是连续的，则称$T$是**连续映射**（参看图2）

连续映射可用开集的术语描述如下：

1.3-6 定理（**连续映射**）度量空间X到度量空间Y中的映射T是连续的，当且仅当Y的任何开子集的原象是X的开子集.

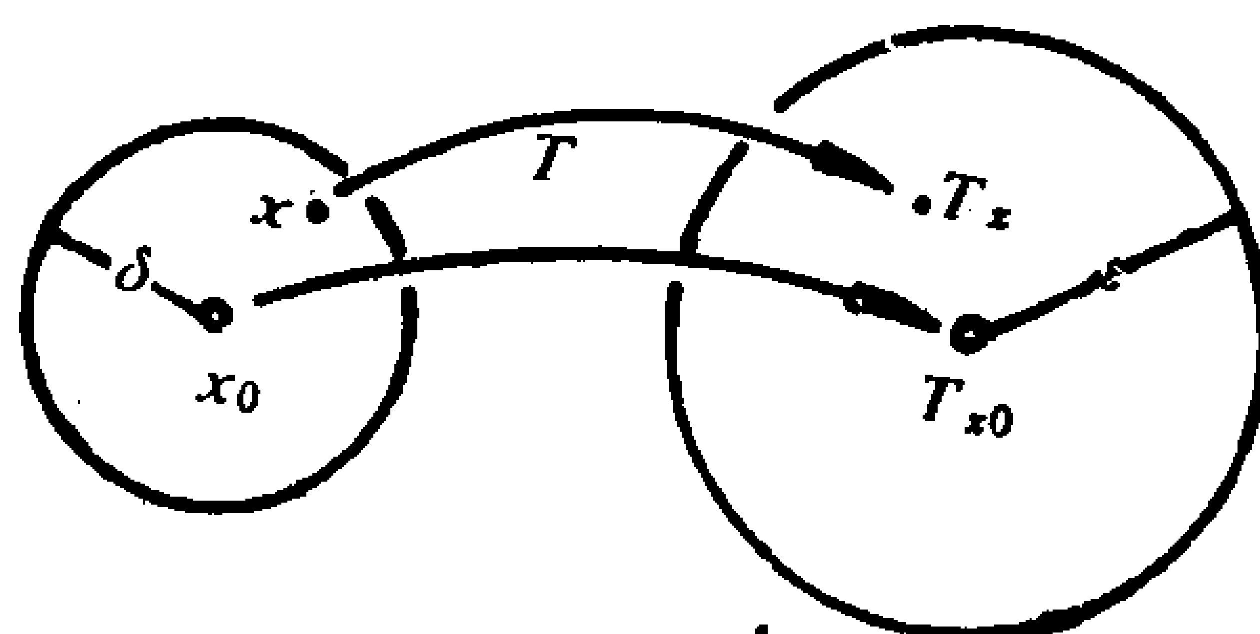


图2　1.3-5定义中的不等式在$X=R^2$与$Y=R^2$的情况下的图示

证明．必要性．假设T是连续的，设$G\subset Y$是任一开集且G_0是G的原象．若$G_0=\varnothing$，则G_0是开集．若$G_0\neq\varnothing$，对于任意$x_0\in G_0$，存在$y_0=Tx_0\in G$，由于G是开集，必有开球$B(y_0;\varepsilon)\subset G$，因为$T$是连续的，则有$x_0$的一个$\delta$-邻域$B(x_0;\delta)$映射到$B(Tx_0;\varepsilon)$中，而$B(Tx_0,\varepsilon)\subset G$，所以，$B(x_0;\delta)\subset G_0$，故$G_0$是开集.

充分性．假定Y中的每个开集的原象是X中的开集．则对于每个$x_0\in X$，Tx_0的任意ε-邻域$B(Tx_0;\varepsilon)=G$均是开集，于是由假设G的原象$T^{-1}(G)$是X中的开集，且$x_0\in T^{-1}(G)$，因此必有x_0的一个δ-邻域$B(x_0;\delta)\subset T^{-1}(G)$，即$B(x_0;\delta)$映射到$B(Tx_0;\varepsilon)$中，根据定义$T$在$x_0$点连续，由于$x_0\in X$是任意的，从而证得$T$是连续的.

下面我们利用闭包引进稠密集和可分空间的概念

1.3-7定义（**稠密集、可分空间**）设M是度量空间X的

子集，如果

$$\overline{M}=X$$

则称M在X中**稠密**．若X存在一可数①子集且在X中稠密，则称X是**可分的**．

由定义得知，如果M在X中稠密，那么，X里的每个球不论半径怎样小，都含有M中的点．

下面我们给出可分空间与不可分空间的例题．

【例1】 实直线R是可分的．

证明 因为有理数全体所成之集Q是可数的，且在R中稠密．

【例2】 复平面C是可分的．

证明 因为实部和虚部都是有理数的复数所成之集是C中可数的稠密子集．

【例3】 空间l^p $(1\leqslant p<\infty)$是可分的．

证明 这里l^p是实的，设M是形如

$$y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ )$$

的所有实数列所成之集，其中n是任意正整数，η_j是有理数，则M是可数的．下面证M在l^p中稠密．任意$x=(\xi_j)\in l^p$，有，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p<\infty$．对于每个$\varepsilon>0$，存在$n$，使得，

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

由于有理数在R里稠密，对于每个ξ_j $(j=1、2\cdots,n)$存在有理

① 可数子集概念请参看附录Ⅰ中A1.1.

数η_i，使，$|\xi_i-\eta_i|^p<\dfrac{\varepsilon^p}{2n}$，　于是，

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

令　$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$　则，$y\in M$，且

$$\left[d(x,y)\right]^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p$$

因此，$d(x,y)<\varepsilon$，从而证得M在l^p中稠密.

不是所有的度量空间都是可分的.

【例4】 空间l^∞是不可分的.

证明　设l^∞中其项值$\eta_i=0$或1的序列$y=(\eta_i)$所成的集为Z，则$Z\subset l^\infty$，每一$y=(\eta_i)\in Z$都对应一个实数$\hat{y}$，其二进制表示式为

$$\frac{\eta_1}{2^1}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\cdots$$

而每个$\hat{y}\in[0,1]$，都有形如(*)的二进制表示式，且不同的$\hat{y}$有不同的二进制表示式．由[0,1]上的实数是不可数的，所以，Z也不可数.

Z中任何两个不同点间的距离均等于1，以每个$y\in Z$为中心，以1/3为半径作小球，这些小球互不相交，且有不可数个．若M是l^∞中任意稠密集，那么，这些不相交球的每一个必含有M的一个元素，因此，M是不可数的，即l^∞的任意稠密子集均不可数．从而l^∞不可分.

习 题 1.3

1. 证明度量空间中 (a) 任意开球是开集；(b) 任意闭球是闭集.

2. 分别指出R上，C中开球$B(x_0;1)$都是什么？$C[-1,1]$中$x_0=t^2$的开球$B\left(x_0;\frac{1}{2}\right)$是什么？

3. 考虑$C[0,2\pi]$上的元素$x(t)=\sin t, y(t)=\cos t$试确定最小的实数r，使得$y\in B(x;r)$.

4. 试证任意非空集$A\subset(X,d)$是开的当且仅当其为开球的并.

5. 证明在离散度量空间X里，每个子集既开又闭.

6. 如果x_0是集$A\subset(X,d)$的聚点，试证x_0的任何邻域中都包含A的无穷个点.

7. 写出下列每个子集的闭包.(a) R上全体整数组成的集；(b) R上有理数全体所成之集；(c) C中具有有理实部与虚部的复数组成的集；(d) 圆盘：$\{Z \mid |Z|<1\}\subset C$.

8. 举例说明在度量空间中，开球$B(x_0;r)$的闭包$\overline{B(x_0;r)}$可能不同于闭球$\widetilde{B}(x_0;r)$.

9. 证明 $A\subset\overline{A}$，$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

10. 不属于闭集$M\subset(X,d)$的点x到M总有非零距离.（只须证$x\in\overline{A}$当且仅当$D(x,A)=0$，这里A是X的任意非空子集.）

11. 集$A\subset(X,d)$的边界点x是X的一个点（属于A或不属于A）且x的每个邻域包含A的点同时也包含不属于A的点.A的所有边界点所成之集称做A的边界.写出下列诸集的边界：(a) R上区间$(-1,1)$，$[-1,1)$，$[-1,1]$；(b) R上所有有理数组成的集；(c) 圆盘：$\{Z \mid |Z|<1\}\subset C$及

$\{Z \mid |Z| \leqslant 1\} \subset C$.

12. $B[a,b]$（参见 §1.2中的1.2-6）（$a<b$）是不可分的.

13. 证明度量空间X是可分的当且仅当X存在一个可数子集Y具有如下性质.对于每个$\varepsilon>0$和每个$x\in X$，存在一个$y\in Y$，使得$d(x,y)<\varepsilon$.

14. 试证映射T：$X\to Y$是连续的当且仅当任意闭集$M\subset Y$的原象是X中的闭集.

15. 证明在连续映射下，开集的象不一定是开集.

§1.4 收敛、柯西（Cauchy）序列、完备性

我们知道，在微积分中利用R上的度量定义了数列的收敛. 类似地，在度量空间(X,d)中利用度量d来定义序列的收敛.

1.4-1 定义（序列收敛，极限）. 设(x_n)是度量空间(X,d)中的序列，若存在$x\in X$，使得，

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

则称(x_n)**收敛**. 且x称做(x_n)的极限. 记为，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n\to x$. 若(x_n)不收敛，就称其发散.

从定义可看出，正是利用了度量d才产生出实数列$a_n = d(x_n,x)$，并由$\{a_n\}$收敛到零定义了(x_n)的收敛.

值得注意的是，收敛序列的极限x必为空间X内一点. 例如，$X=(0,1)$，$x_n=\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}\to 0\notin(0,1)$，那么，序列$\left(\dfrac{1}{n}\right)$在$(0,1)$里不收敛.

在微积分中，收敛序列是有界的，并且极限是唯一的. 收敛序列的这两个熟知的性质可推广到一般的度量空间上来.

1.4-2 引理（有界性，唯一性）．设(x_n)是度量空间(X,d)中的收敛序列，则(x_n)是有界的，且极限是唯一的．

证明　假定$x_n \to x_0 \in X$，取$\varepsilon = 1$，则存在正整数N，当$n>N$时，$d(x_n, x_0) < 1$，令，$a = \max\{d(x_1, x_0)\cdots, d(x_N, x_0)\}$，那么，对一切$n$，有，$d(x_n, x_0) < 1 + a$．即$(x_n)$有界．

若x，y都是(x_n)的极限，则，

$$0 \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

当$n\to\infty$时，$d(x, x_n)\to 0$，$d(x_n, y)\to 0$，因此$d(x, y) = 0$．即$x = y$．

1.4-3 引理．如果$x_n\to x$，$y_n\to y$，那么，

$$d(x_n, y_n)\to d(x, y).$$

证明　利用§1.1中的公式(1)立即得到，

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

将上述不等式中的x_n与x，y_n与y对换，得，

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

将这两个不等式合起来，有，

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

当$n\to\infty$时，$d(x_n, y_n)\to d(x, y)$

在微积分中，数列(x_n)收敛的充分必要条件是(x_n)满足Cauchy准则．现试将这一概念移植于度量空间．但有的度量空间满足Cauchy准则的序列可能不收敛．这是因为这样的空间不具有完备性．度量空间的完备性在很多方面起着重要作用，例如，方程解的存在、唯一性，近似解的收敛性及算子理论等方面．这也正是微积分为什么不建在有理直线上而建立在R上的理由．

1.4-4 定义（Cauchy序列，完备性）．设(X,d)是度量空间，(x_n)是X中的序列．如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)>0$，当$m,n>N$时，有，

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon \tag{1}$$

则称(x_n)为Cauchy序列（或基本序列）．如果X中的每个Cauchy序列均收敛于X里的点，则称X是完备的．

1.4-5 定理（实直线、复平面）．实直线R和复平面C是完备的度量空间．

但去掉实直线R上的一个点a，得到不完备的空间$R-\{a\}$．更进一步，当去掉实直线R上所有无理数得有理数集Q，这是个不完备的度量空间．

在一般的度量空间中，条件(1)不总是收敛的充分条件，因为空间可能是非完备的．尽管如此，条件(1)仍然是序列收敛的必要条件．

1.4-6 定理（收敛序列）．度量空间X中，每个收敛序列必为Cauchy序列．

证明　若$x_n\to x$．那么，对于每个$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)>0$，对于一切$n>N$，使得，

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此，当$m,n>N$时，有

$$d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x)+d(x,x_n)<\varepsilon$$

故证得(x_n)是Cauchy序列．

下面再给出三个经常用到的且与收敛性、完备性有关的定理．

1.4-7 定理（闭包，闭集）．设M是度量空间(X,d)

的非空子集，$\overline{M}$是M的闭包．那么，

(a) $x\in\overline{M}$当且仅当M中存在序列(x_n)，使得$x_n\to x$.

(b) M为闭的充要条件是：若$x_n\in M$，$x_n\to x$，则$x\in M$.

证明 (a)设$x\in\overline{M}$．若$x\in M$，$(x, x, \cdots,)$就是所要求的序列．若$x\notin M$，它就是M聚点，因此，每个球$B(x; 1/n)$ $(n=1, 2\cdots)$包含一个$x_n\in M$．由$\frac{1}{n}\to 0$ $(n\to\infty)$，知$x_n\to x$.

反之，如果$(x_n)\subset M$且$x_n\to x$，则$x\in M$或x的每个邻域$B(x; \varepsilon)$包含点$x_n\neq x$，后一种情况说明x是M的一个聚点．由闭包的定义知，$x\in\overline{M}$.

(b) 利用定理1.3-4之(c)，M是闭集当且仅当$M=\overline{M}$，再由本定理的(a)部分立即证得(b)．

1.4-8 定理（完备子空间）．完备度量空间X的子空间M为完备的，当且仅当M在X中是闭的．

证明 设M是完备的．设$x_n\in M$，$x_n\to x$．由定理1.4-6，(x_n)是M中的一个Cauchy序列，因为M是完备的，则$x\in M$．根据定理1.4-7(b)于是证得M是闭的．

反之，设M是X中闭集，且(x_n)是M中任意Cauchy序列，由X是完备的，则存在$x\in X$，使得$x_n\to x$．因为M是闭集，根据定理1.4-7(b) $x\in M$．从而证明了M中任意Cauchy序列均在M中收敛，即M是完备的．

1.4-9 定理（连续映射）．度量空间(X, d)到度量空

间 $(Y,\tilde{d})$ 中的映射 $T: X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续当且仅当

$$x_n\to x_0 \quad 蕴涵 \quad Tx_n\to Tx_0$$

证明 假设 T 在 x_0 连续，由定义1.3-5知，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得，

$$d(x,x_0)<\delta \quad 蕴涵 \quad \tilde{d}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$$

设 $x_n\to x_0$，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时.

$$d(x_n,x_0)<\delta$$

因此， 当 $n>N$ 时，有

$$\tilde{d}(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$$

这表示 $Tx_n\to Tx_0$.

反之，假设 $x_n\to x_0$ 蕴涵 $Tx_n\to Tx_0$，现证 T 在 x_0 连续. 若 T 在 x_0 不连续，那么，存在一个 $\varepsilon>0$，使得对于每个 $\delta>0$，都有一个 $x\neq x_0$，满足

$$d(x,x_0)<\delta, \quad 但 \quad \tilde{d}(Tx,Tx_0)\geqslant\varepsilon$$

特别取 $\delta=\dfrac{1}{n}$，则有 x_n 使

$$d(x_n,x_0)<\frac{1}{n} 但，\tilde{d}(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x_0$，但 Tx_n 不收敛于 Tx. 这与假设 $x_n\to x_0$ 蕴涵 $Tx_n\to Tx_0$ 矛盾，因此，T 在 x_0 连续.

1.4-10 几个范例的解法

【例 1】 如果 (x_n) 是度量空间 (X,d) 中的Cauchy序列，且存在一收敛的子序列 $x_{n_k}\to x\in X$. 则 $x_n\longrightarrow x$ $(n\longrightarrow\infty)$.

证明．对于每个$\varepsilon>0$，存在正整数N，当n，$m>N$时，

$$d(x_n, x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

再取k足够大，使得$n_k>N$，且$d(x_{n_k}, x)<\frac{\varepsilon}{2}$因此，当$n>n_k$时，

$$d(x_n, x)\leqslant d(x_n, x_{n_k})+d(x_{n_k}, x)<\varepsilon$$

即，$x_n \longrightarrow x$．

【例 2】若(x_n)和(y_n)为度量空间(X, d)中的两Cauchy序列，则$a_n=d(x_n, y_n)$收敛．

证明．由于(x_n)和(y_n)为Cauchy序列，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当$m, n>N$时，

$$d(x_m, x_n)<\frac{\varepsilon}{2},\ d(y_m, y_n)<\frac{\varepsilon}{2}$$

类似引理1.4—3中证法．当m，$n>N$时，有

$$|d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)|\leqslant d(x_n, x_m)+d(y_m, y_n)$$
$$<\varepsilon$$

故$a_n=d(x_n, y_n)\ (n=1, 2\cdots)$是$R$上的Cauchy 序列，由$R$完备，所以，$a_n=d(x_n, y_n)$收敛．

【例 3】设d_1和d_2是同一集X上的度量，且存在正数a和b，使得，对于所有x，$y\in X$，有，

$$ad_1(x, y)\leqslant d_2(x, y)\leqslant bd_1(x, y)$$

试证(X, d_1)和(X, d_2)中有同样的Cauchy序列．

证明．设(x_n)是(X, d_1)中的Cauchy序列，那么，对

于每个给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当m，$n>N$时，

$$d_1(x_m,\ x_n)<\frac{\varepsilon}{b}$$

所以，$d_2(x_m,\ x_n)<bd_1(x_m,\ x_n)<\varepsilon$.

即，(x_n)也是$(X,\ d_2)$中的Cauchy序列.

若(y_n)是$(X,\ d_2)$中的Cauchy序列，则对于任意$\varepsilon>0$，存在正整数N，当m，$n>N$时

$$d_2(y_m,\ y_n)<a\varepsilon.$$

因此，$d_1(y_m,\ y_n)\leqslant\frac{1}{a}d_2(y_m,\ y_n)<$

故(y_n)也是$(X,\ d_1)$中的Cauchy序列.

习 题 1.4

1.若度量空间X里的序列（x_n）收敛于x，试证（x_n）的每个子序列（x_{n_k}）也收敛于x.

2.证明$x_n\to x$当且仅当对于x的每个邻域V，均存在一个正整数n_0，使得当$n>n_0$时，$x_n\in V$.

3.证明Cauchy序列是有界的.

4.在度量空间中，试问有界序列均为Cauchy序列吗？收敛吗？

5.对引理1.4-3给出一间接证明.

6.利用1.4-10中例3的结果，证明习题1.2中9、10、11各度量空间有同样的Cauchy序列.

7.利用实直线R的完备性，证明复平面C的完备性.

§1.5 例题（完备性的证明）

在本节我们将给出某些度量空间完备性的证明，这些空

间在理论与实际应用中是经常遇到的．证明的步骤大体是：在$(X,\ d)$中任取一Cauchy序列(x_n)，相应选定一元素x作为其极限考虑，证明$x\in X$且$x_n\longrightarrow x$．在这些例题的证明中，我们将借助定理1.4-5中实直线R和复平面C的完备性．

1.5-1　R^n与C^n是完备的

证明　先考虑R^n．我们知道，R^n上的度量(欧几里得度量)为

$$d(x,\ y)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

其中，$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$．在$R^n$中任取一Cauchy序列$(x_m)$，$x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)})$

对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$m,r>N$时，

$$d(x_m,\ x_r)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)})^2\right]^{1/2}<\varepsilon \qquad (1)$$

因此，对于$j=1,2,\cdots n$，当$m,r>N$时，有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|<\varepsilon$$

这说明对每个固定的$j\,(1\leqslant j\leqslant n)$，序列$(\xi_j^{(1)},\ \xi_j^{(2)},\ \cdots)$是Cauchy实数列，知其收敛，即当$m\to\infty$时，$\xi_j^{(m)}\to\xi_j\ \in R$，利用这$n$个极限值定义$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$显然，$x\in R^n$．在(1)中令$r\to\infty$，当$m>N$时

$$d(x_m,x)\leqslant\varepsilon$$

故证得$x_m\to x\,(m\to\infty)$，并证明了R^n的完备性．

利用C的完备性，并以上述同样的方法可证明C^n的完备性．

1.5-2　空间l^∞是完备的

证明　设(x_m)是l^∞中任意Cauchy序列，这里$x_m=(\xi_1^{(m)},\ \xi_2^{(m)},\ \cdots,\ )$，已知$l^\infty$上的度量为

$$d(x, y)=\sup_j |\xi_j-\eta_j|$$

其中． $x=(\xi_j)\in l^\infty$　$y=(\eta_j)\in l^\infty$

对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当m，$n>N$时，

$$d(x_m, x_n)=\sup|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon$$

对于每个固定的j，当m，$n>N$时，有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \tag{2}$$

因此，序列$(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots,)$是$C$中Cauchy数列，知其收敛，即，当$m\to\infty$时，$\xi_j^{(m)}\to\xi_j\in C$，利用这些极限值，定义$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$

在（2）中令$n\to\infty$，当$m>N$时．

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon \tag{*}$$

因为$x_m=(\xi_j^{(m)})\in l^\infty$．则存在一实数$k_m$，对于所有的$j$，满足$|\xi_j^{(m)}|\leqslant k_m$，因此，对每个$j$有．

$$|\xi_j|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(m)}|+|\xi_j^{(m)}|\leqslant\varepsilon+k_m \qquad (m>N)$$

不等式右端是与j无关的实数，故，证得(ξ_j)是有界数列，即，$x=(\xi_j)\in l^\infty$．又由（*），得，

$$d(x_m, x)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon \qquad (m>N)$$

这说明当$m\to\infty$时，$x_m\to x$．从而l^∞的完备性得证．

1.5-3　**空间C是完备的．**C是所有收敛复数列$x=(\xi_j)$所成之集，其度量d是由空间l^∞导出的．

证明　因为C是l^∞的子空间．若能证明C是闭的，则由定理1.4-8即可证得其为完备．

任取$x=(\xi_j)\in\overline{C}$，由定理1.4-7（a）知，存在$x_n=(\xi_j^{(n)})\in$C，使$x_n\to x$　因此，对于每个$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n\geqslant N$时．对所有j，有，

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqslant d(x_n,\ x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

特别是，对于$n=N$及所有j不等式也成立，因为$x_N=(\xi_1^{(N)},\ \xi_2^{(N)},\ \cdots,\ )\in C$为收敛序列，所以，是复平面上的Cauchy序列，于是存在一个N_1，当j，$k>N_1$时，

$$|\xi_j^{(N)}-\xi^{(N)}{}_k|<\frac{\varepsilon}{3}$$

从而，当j、$k>N_1$时，有，

$|\xi_j-\xi_k|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(N)}|+|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon$ 这证明了序列$x=(\xi_j)$是收敛的，即，$x\in C$. 因为$x\in\overline{C}$是任意的，所以，C在l^∞中是闭的.

1.5-4 空间l^p是完备的. （这里p是固定的，且$1\leqslant p<+\infty$）

证明 设(x_m)是空间l^p中任意Cauchy序列，这里，$x_m=(\xi_1^{(m)},\ \xi_2{}^{(m)},\ \cdots,\ )$，对于每个$\varepsilon>0$，存在一个$N$，当$m$，$n>N$时，

$$d(x_m,x_n)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \qquad (3)$$

对于每个$j=1,2.\ \cdots$，当m，$n>N$时，有

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \qquad (4)$$

对于固定的j，由(4)知，$(\xi_j^{(1)},\ \xi_j^{(2)}.\ \cdots)$是Cauchy序列. 因为$R$和$C$是完备的，所以此序列收敛，即，当$m\to\infty$时，$\xi_j^{(m)}\to\xi_j$，利用这些极限值，定义$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$. 下面证明$x\in l^p$，且，$x_m\to x$.

由(3)，当m，$n>N$时，

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p<\varepsilon^p \qquad (k=1,2,\cdots)$$

令$n\to\infty$，当$m>N$时，

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (k=1,2,\cdots)$$

现在可令$k\to\infty$，则对于$m>N$，有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (5)$$

这就证明了$x_m-x\in l^p$　因为$x_m\in l^p$，由§1.2中Minkowski不等式，得，

$$x=x_m+(x-x_m)\in l^p$$

而且，由（5）得，$d(x_m,\ x)\leqslant\varepsilon$，即$x_m\to x(m\to\infty)$因为$(x_m)$是$l^p$中任意Cauchy序列，从而，$l^p$完备性得证.

1.5-5　空间C[a, b]是完备的.

证明　设(x_m)是$C[a,b]$中任意Cauchy序列，则，对于任意$\varepsilon>0$，存在N，当$m,\ n>N$时，

$$d(x_m,x_n)=\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon \qquad (6)$$

因此，对于任意固定的$t_0\in[a,b]$，当$m,n>N$时

$$|x_m(t_0)-x_n(t_0)|<\varepsilon$$

这说明$(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots)$是Cauchy实数列，所以收敛，即，当$m\to\infty$时，$x_m(t_0)\to x(t_0)$，以这种方法，使每个$t\in[a,b]$对应一个确定的实数$x(t)$，从而在$[a,b]$上定义了一函数$x$. 下面证$x\in C[a,b]$. 且$x_n\to x$.

在(6)中，令$n\to\infty$，当$m>N$时，得，

$$\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon$$

因此，对于每个$t\in[a,b]$，当$m>N$时.

$$|x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon$$

这说明(x_m)在$[a, b]$上一致收敛于x. 因为$x_m(t)$在$[a, b]$上连续且一致收敛于$x(t)$，则$x(t)$在$[a, b]$上连续（参见习题9），即$x \in C[a, b]$，同时证明了$x_m \to x (m \to \infty)$，从而，$C[a, b]$的完备性得证.

在前面及这里，我们都假定函数$x(t)$是实值的，为此，我们称这个空间为实$C[a, b]$. 类似地，当我们取定义在$[a, b] \subset R$上的复值连续函数时，得复$C[a, b]$空间，这个空间也是完备的，证明与前面几乎一样.

在上面的证明中，我们也得到如下的重要事实.

1.5-6 **定理（一致收敛）**. 空间$C[a, b]$中的收敛$x_m \to x$是一致收敛，即，(x_m)在$[a, b]$上一致收敛于x.

因此，$C[a, b]$上的度量，有时称为一致度量.

下面是非完备度量空间的例子.

1.5-7 **多项式**. 设X是$[0, 1]$上所有多项式所成之集. 对于任意$x, y \in X$，其度量是由$C[0, 1]$上度量导出的，即.

$$d(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$$

则(X, d)是非完备的度量空间.

证明 因为(X, d)是$C[0, 1]$的子空间，由定理1.4-8，要证(X, d)是非完备的，只须证X是非闭的. 又由定理1.4-8. 就是找一个序列$(x_n) \subset X$. 且$x_n \to x$, 但$x \notin X$.

设 $$x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \qquad t \in [0, 1]$$

显然，$x_n \in X \quad (n = 1, 2 \cdots)$. 令，

$$x(t) = e^t = 1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \qquad t \in [0, 1]$$

那么，对于任意$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，$d(x_n,$

$x)=\max\limits_{0<t<1}|x_n(t)-x(t)|=\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+2)!}+\cdots<\varepsilon$即，

$x_n\to x(n\to\infty)$，但$x(t)=e^t\notin X$.

1.5-8 **连续函数**. 设X是[0,1]上所有实值连续函数所成之集，对于任意$x,y\in X$，定义度量为

$$d(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\,dt$$

试证(X,d)是非完备的度量空间.

证明. 设$x_m(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<\frac{1}{2}\\ mt-\frac{m}{2} & \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\\ 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$

则$x_m\in X$，$(m=1,2\cdots)$，因为$d(x_m,x_n)$是图3中三角形的面

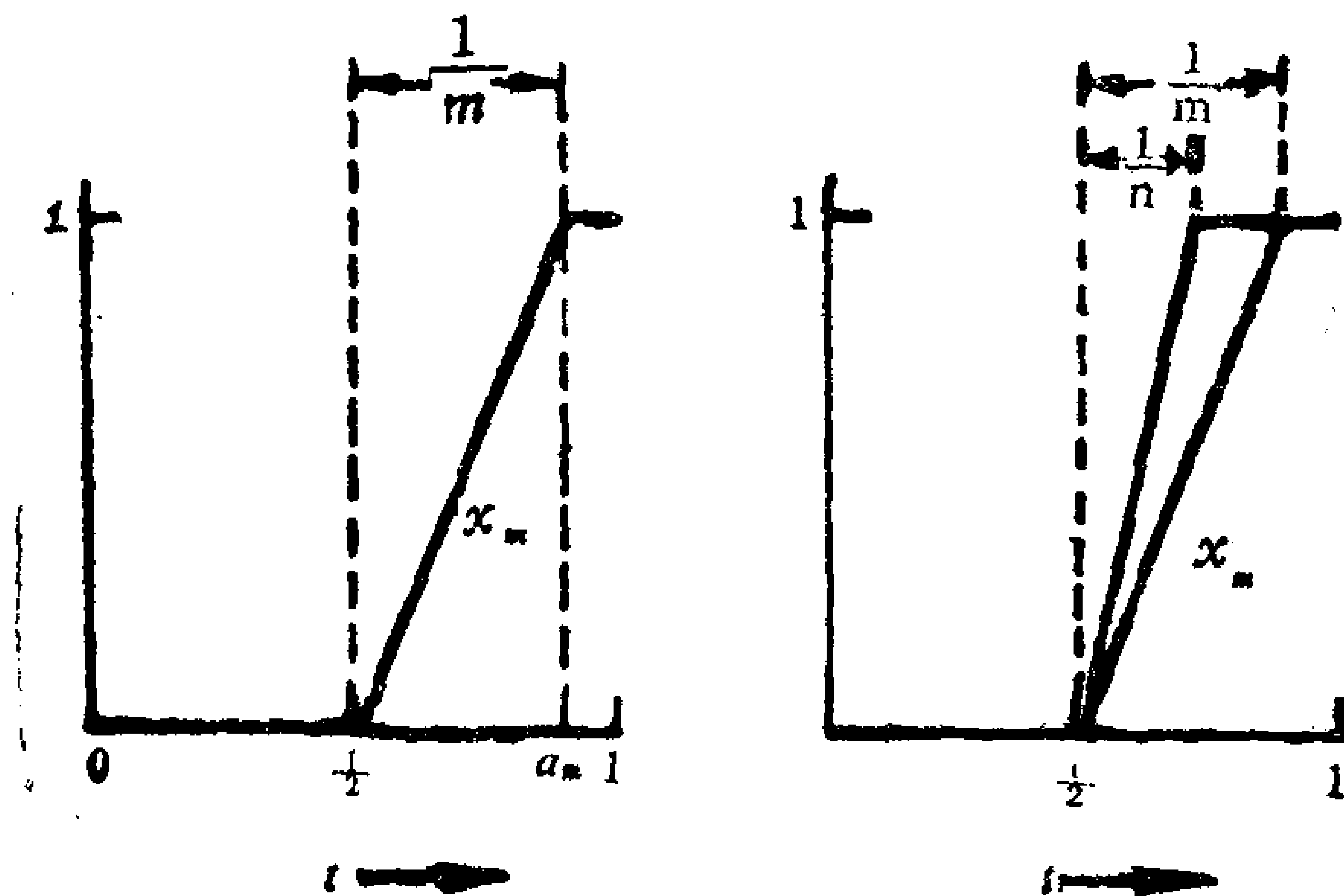


图3

积，对于每个$\varepsilon>0$，存在$N>\frac{1}{\varepsilon}$，当$m,n>N$时.

$$d(x_m,x_n)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon$$

因此，(x_m)是X中的Cauchy序列.

下面证此Cauchy序列不收敛. 若$x(t)\in X$，且 $d(x_m,x)\longrightarrow 0\ (m\to\infty)$，由于

$$\begin{aligned}d(x_m,x)&=\int_0^1 |x_m(t)-x(t)|\,dt\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}|x_m(t)-x(t)|\,dt\\&\quad+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{1}|1-x(t)|\,dt,\end{aligned}$$

右端三个积分均是非负的，因此，$d(x_m,x)\to 0$蕴涵每个积分趋于零. 因为假设$x(t)$是连续的，则，

$$x(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,\frac{1}{2})\\ 1, & t\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

对于连续函数这是不可能的. 故(x_m)在X中不收敛，从而(X,d)是非完备的.

习 题 1.5

1. 设$a,b\in R$，$a<b$.证明开区间(a,b)是R的一非完备子

空间．闭区间$[a,b]$是完备的．

2．设X是所有n个实数的有序组$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$所成之集，其度量定义为

$$d(x,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j-\eta_j|$$

这里，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，证明(X,d)是完备的．

3．设$M\subset l^\infty$是由至多含有限个非零项的序列全体组成的子空间，在M中求一不收敛的Cauchy序列．从而，证明M是不完备的．

4．利用定理1.4-8证明习题3中的M是非完备的．

5．设X是所有整数组成的集合，度量为$d(m,n)=|m-n|$，试证其为完备度量空间．

6．在实数全体组成的集合上，选定度量为

$$d(x,y)=|\text{arctg}x-\text{arctg}y|$$

试证其构成一非完备的度量空间．

7．设X是正整数全体，定义度量为，

$$d(m,n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$$

试证(X,d)是非完备的．

8．证明满足$x(a)=x(b)$的$x\in C[a,b]$构成的子空间$Y\subset C[a,b]$是完备的．

9．如果$[a,b]$上的连续函数序列(x_n)在$[a,b]$上一致收敛于x，则极限函数$x(t)$在$[a,b]$上是连继的．试证这个定理．

10．证明离散度量空间是完备的．（参看1.1-2中例5）

11．证明在空间S（参看1.2-5）中，$x_n\to x$的充要条件是对于所有$j=1,2,\cdots$，$\xi^{(n)}_j\to\xi_j$，这里$x_n=(\xi^{(n)}_j)$，$x=(\xi_j)$

12．利用习题11结果，证明序列空间S是完备的．

13．设 $x_n(t)=\begin{cases}n & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n^2},\\ t^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{n^2}<t\leqslant 1,\end{cases}$

试证 (x_n) 是1.5-8中空间X的另一个Cauchy序列.

14.证明习题13中的Cauchy序列不收敛.

15.设X是只有有限个非零项的实数列$x=(\xi_j)$全体，其度量为$d(x,y)=\sum|\xi_j-\eta_j|$，这里$y=(\eta_j)$. 令$x_n=(\xi^{(n)}_j)$，其中，

$$\xi^{(n)}_j=\begin{cases}1/j^2 & 1\leqslant j\leqslant n\\ 0 & j>n\end{cases}$$

明证 (x_n) 是X中不收敛的Cauchy序列.

§1.6 度量空间的完备化

我们知道，有理直线Q是不完备的，但可以扩充为完备的实直线R，且Q在R中稠密. 扩充的一种重要方法是，把Q内的Cauchy数列，依"可能有相同极限"分成一类，收敛到有理数的定义为R中有理元素，不收敛的定义为R中的无理元素. 用类似的方法，均可使任一非完备空间完备化. 为了精确地阐述，先引进两个有关的概念.

1.6-1 定义(等距映射. 等距空间) 设$X=(X,d)$与$\widetilde{X}=(\widetilde{X},\widetilde{d})$为度量空间.

(a) 如果X到$\widetilde{X}$的映射T保持距离不变，即，对所有x, $y\in X$.

$$\widetilde{d}(Tx,Ty)=d(x,y).$$

则称T是等距映射.

(b)如果存在一个X到$\widetilde{X}$上的等距双射T①，则称X与$\widetilde{X}$是等距空间.

因此，等距空间从度量的角度上看，两空间至多是它们

① 双射是一对一的满射. 参阅附录1A1, 2映射.

点的属性不同，可以不加区别地看成同一抽象空间的两个不同模型.

对于度量空间X，如果存在完备的度量空间$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$，使得$X$等距于$\hat{X}$的一稠密子空间$\overline{W}$，则称$\hat{X}$是$X$的完备化空间.

1.6-2 **定理**(完备化). 任一度量空间$X=(X,d)$，必存在完备化空间$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$，且在等距意义下是唯一的(即，若$\tilde{X}$为任一完备的度量空间，并存在一个与$X$等距的稠密子空间$\tilde{W}$，则$\tilde{X}$与$\hat{X}$等距).

证明. 分四步进行：

(a) 构造度量空间$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$.

(b) 构造一等距映射T：$X\to W\subset\hat{X}$，且，

$\overline{W}=\hat{X}$.

(c) 证明$\hat{X}$是完备的.

(d) 在等距意义下，证明$\hat{X}$是唯一的.

现在详细证明如下.

(a) 构造$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$. 设$(x_n)$和$(x_n')$是度量空间$X$中的柯西序列，如果$(x_n)$，$(x_n')$满足，

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_n')=0 \tag{1}$$

则称(x_n)与(x_n')等价①. 记作$(x_n)\sim(x_n')$. 设$\hat{X}$是由全体柯

① 参阅附录1中的A1.4.

西序列的等价类$\hat{x}$，$\hat{y}$…组成的集合．$(x_n)\in\hat{x}$表示(x_n)是$\hat{x}$中一个元素，或称(x_n)是$\hat{x}$的一个代表．对于任意$\hat{x}$，$\hat{y}\in\hat{X}$定义

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,\ y_n) \tag{2}$$

其中，$(x_n)\in\hat{x}$，$(y_n)\in\hat{y}$.

首先证明(2)式右端极限存在．由

$$d(x_n.\ y_n)\leqslant d(x_n.x_m)+d(x_m,\ y_m)+d(y_m,y_n)$$

得，
$$d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n)$$

将m与n互换可得类似不等式，合起来，有

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n). \tag{3}$$

因为(x_n),(y_n)都是Cauchy序列，当m，n足够大时，可以使(3)小于任意给定的$\varepsilon>0$，故证得$\{d(x_n,y_n)\}$是Cauchy数列，又R是完备的，所以(2)中的极限存在．

还需证明(2)中的极限与等价类$\hat{x}$，$\hat{y}$中代表(x_n)，(y_n)的选择无关．事实上，若$(x_n)\sim(z_n)$,$(y_n)\sim(w_n)$,那么由(1).

$|d(x_n,\ y_n)\ -d(z_n,w_n)|\leqslant d(x_n,z_n)\ +d(y_n,w_n)\to 0(n\to\infty)$因此.$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(z_n,wn)$.

下面证(2)中的$\hat{d}$是$\hat{X}$上的度量．显然，$\hat{d}$满足度量公理$(M1)$与$(M3)$，也有$\hat{d}(\hat{x},\hat{x})=0$，而且，从$\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=0$，可推出$(x_n)\sim(y_n)$．从而，$\hat{x}=\hat{y}$．所以$(M2)$得证．

在

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

中令$n\to\infty$可得($M4$).

(b) 构造一等距映射T：$X\to W\subset\hat{X}$，并证明$\overline{W}=\hat{X}$．对每个$b\in X$，对应一个$\hat{b}\in\hat{X}$，且$(b,b,\cdots)\in\hat{b}$．按$b\mapsto\hat{b}=Tb$，其中$(b,b,\cdots)\in\hat{b}$定义一映射T：$X\to W=T(X)\subset\hat{X}$．由(2)得，

$$\hat{d}(\hat{b},\hat{c})=d(b,c)$$

这里$(c,c,\cdots)\in\hat{c}$，$c\in X$．所以T是等距的，任何等距映射都是一对一的．因为$T(X)=W$．即T又是满射，因此，X与W是等距的〔参看定义1.6-1(b)〕.

我们证明子空间W在$\hat{X}$中稠密．事实上，任取$\hat{x}\in\hat{X}$，设$(x_n)\in\hat{x}$，对于每个$\varepsilon>0$，存在正整数N，当m，$n\geqslant N$时，$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$，特别有，

$$d(x_n,x_N)<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n>N)$$

设$(x_N,x_N,\cdots,)\in\hat{x}_N$，则，$\hat{x}_N\in W$．由(2)得，

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{x}_N)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_N)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

这就证明了对于任意$\hat{x}\in\hat{X}$的每个ε—邻域都包含W的一个元素．因此，W在$\hat{X}$里稠密.

(c)证明$\hat{X}$的完备性．设$(\hat{x}_n)$是$\hat{X}$中任意Cauchy序列．由于W在$\hat{X}$中稠密，所以，对于每个$\hat{x}_n$存在$\hat{z}_n\in W$，使得，

$$\hat{d}(\hat{x}_n,\hat{z}_n)<\frac{1}{n} \tag{4}$$

由三角不等式，有，

$$\hat{d}(\hat{z}_m,\hat{z}_n)\leqslant\hat{d}(\hat{z}_m,\hat{x}_m)+\hat{d}(\hat{x}_m,\hat{x}_n)+\hat{d}(\hat{x}_n,\hat{z}_n)$$

$$<\frac{1}{m}+\hat{d}(\hat{x}_m,\hat{x}_n)+\frac{1}{n}$$

因为$(\hat{x}_n)$是Cauchy序列．当m、n足够大时，上式可小于任意给定的$\varepsilon>0$．因此，$(\hat{z}_m)$是Cauchy序列．由于$T:X\to W$是等距的且$\hat{z}_m\in W$则(z_m)是X中Cauchy序列，其中$z_m=T^{-1}\hat{z}_m$．令$\hat{x}\in\hat{X}$是(z_m)所属的类．我们证明$\hat{x}$是$(\hat{x}_n)$的极限．由(4)式，有，

$$\hat{d}(\hat{x}_n,\hat{x})\leqslant\hat{d}(\hat{x}_n,\hat{z}_n)+\hat{d}(\hat{z}_n,\hat{x}) \tag{5}$$

$$<\frac{1}{n}+\hat{d}(\hat{z}_n,\hat{x})$$

由于$(z_m)\in\hat{x}$，且$\hat{z}_n\in W$，因此，$(z_n,z_n,\cdots)\in\hat{z}_n$不等式(5)变为．

$$\hat{d}(\hat{x}_n,\hat{x})<\frac{1}{n}+\lim_{m\to\infty}d(z_n,z_m)$$

只要n足够大，右端可比任意给定的$\varepsilon > 0$还要小，所以任意Cauchy序列$(\hat{x}_n) \subset \hat{X}$在$\hat{X}$中都有极限，于是$\hat{X}$是完备的.

(d)在等距意义下，证明$\hat{X}$的唯一性．若$\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$是$X$的另一个完备化空间，则$X$等距于$\tilde{X}$的一稠密子空间．从度量角度看，等距空间是不加区别的．因此，我们将X看成$\hat{X}$的子空间也看成$\tilde{X}$的子空间，且视X在$\hat{X}$和$\tilde{X}$中稠密．从而，对于每个$\tilde{x} \in \tilde{X}$，必有序列$(x_n) \subset X$，使得在$\tilde{X}$中，$x_n \to \tilde{x}$，所以，(x_n)是X中Cauchy序列，同时也是$\hat{X}$中Cauchy序列，故在$\hat{X}$中必收敛于某个元素$\hat{x}$．而且，当$\tilde{x}$给定时，$\hat{x}$是唯一确定的并与(x_n)的选择无关．事实上，若还有，$(x_n^1) \subset X$，使在$\tilde{X}$中，$x_n^1 \to \tilde{x}$，但在$\hat{X}$中，$x_n^1 \to \hat{x}^1 \in \hat{X}$，则有，

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}^1) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_n^1) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$$

所以，$\hat{x} = \hat{x}^1$．于是作$\tilde{X}$到$\hat{X}$的映射$T_0 : T_0\tilde{x} = \hat{x}$，下面证明$T_0$是满射．对于任意$\hat{y} \in \hat{X}$，必有$y_n \in X$，使得在$\hat{X}$中，$y_n \to \hat{y}$，因此，$(y_n)$是$X$中也是$\tilde{X}$中的Cauchy序列，故在$\tilde{X}$中必收敛于某$\tilde{y}$．显然有，$T_0\hat{y} = \tilde{y}$．从而证得$T_0$是满射．此外，

$$\hat{d}(T_0\tilde{x}, T_0\tilde{y}) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

即T_0是一对一的等距映射又是满射．因此$\tilde{X}$与$\hat{X}$等距.

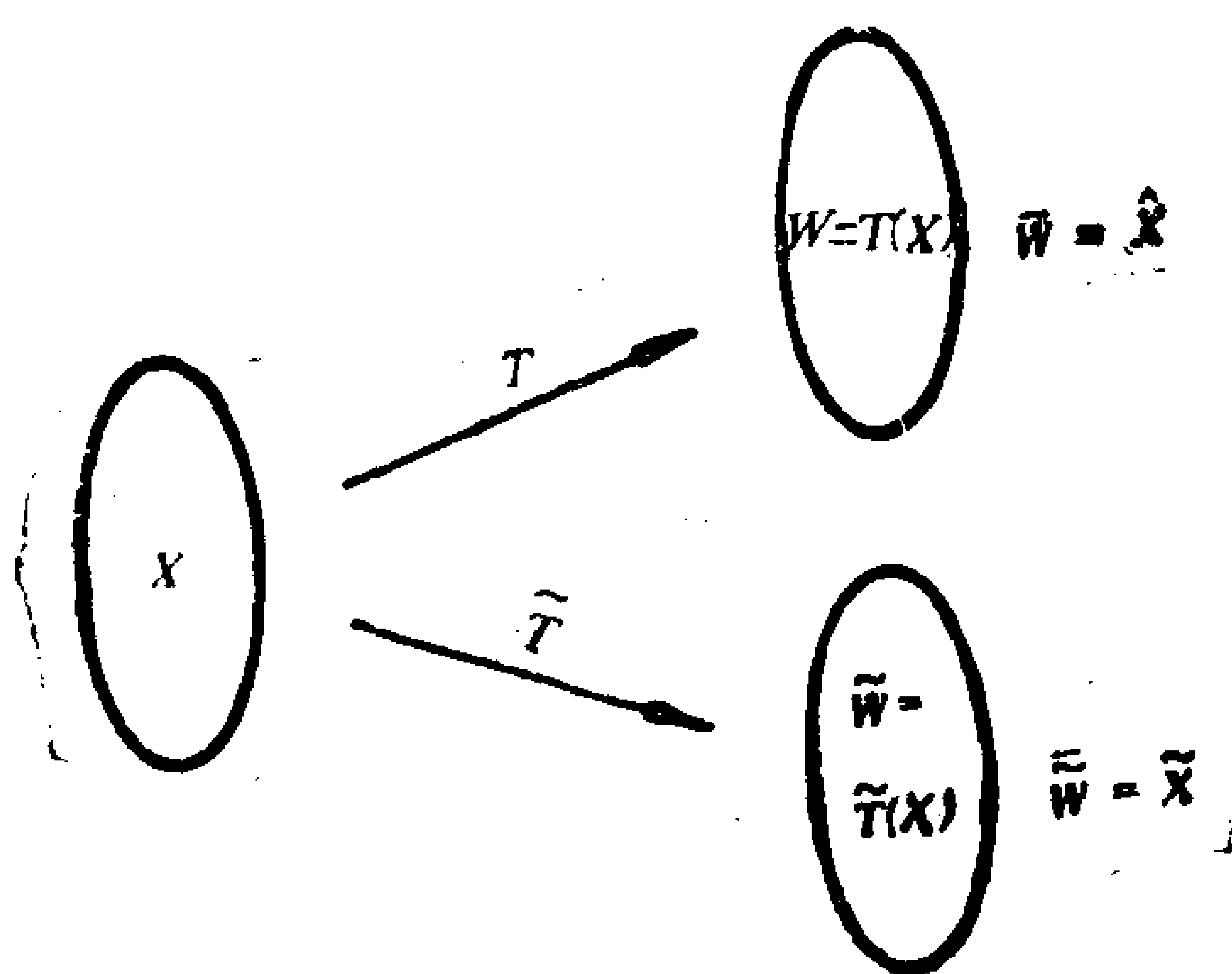


图4　定理1.6-2的图示

习　题　1.6

1. 如果Y是由有限多个点组成的度量空间的子空间，试证Y是完备的.

2. 设X是一切有理数所成之集，试问按度量$d(x,y)=|x-y|$构成的度量空间(X,d)之完备化空间是什么？

3. 离散度量空间X的完备化空间是什么？（参图1.1-2中例5）.

4. 若X_1与X_2是等距的，且X_1是完备的，证明X_2是完备的.

5. （同胚）如果一个连续的双射T：$X\to Y$，其逆映射是连续的，则称T是一个同胚，此时度量空间X与Y称做同胚的.（a）证明如果X与Y是等距的，则它们是同胚的.（b）举例说明一完备的与一非完备的度量空间可以是同胚的.

6. 证明$C[0,1]$与$C[a,b]$是等距的.

7. 如果(X,d)是完备的，且$\tilde{d}=d/1+d$，试证$(X,\tilde{d})$是完备的.

8. 证明习题7中，$(\widetilde{X}, d)$ 的完备性蕴涵 (X, d) 的完备性.

9. 如果 (X, d) 中的 (x_n) 及 (x_n') 满足定理1.6-2中的(1)，且 $x_n \to l$，证明 (x_n') 收敛并有极限 l.

10. 如果 (x_n)，(x_n') 是度量空间 (X, d) 中的收敛序列，且有相同的极限 l. 证明它们满足定理1.6-2中的(1).

11. 证明定理1.6-2中的(1) 在 X 的所有Cauchy序列组成之集上定义了一等价关系.

12. 如果 (x_n) 是 (X, d) 中的Cauchy序列，并与 X 中的 (x_n^1) 满足定理1.6-2中的(1)，证明 (x_n^1) 是 X 中的Cauchy序列.

13. (伪度量). 如果函数 d: $X \times X \to R$ 满足§1.1中的 $(M1)$、$(M3)$、$(M4)$ 及

$(M2^*)$　　$d(x, x) = 0$.

则称 d 是集 X 上的一伪度量. 试问度量和伪度量之间有什么不同? 证明 $d(x, y) = |\xi_1 - \eta_1|$ 是有序实数对全体所成之集上的伪度量. 这里 $x = (\xi_1, \xi_2)$，$y = (\eta_1, \eta_2)$.

14. 设 $d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$，如果 X 是:

(1) $[a, b]$ 上所有实值连续函数所成之集.

(2) $[a, b]$ 上全体Riemann可积实值函数组成之集.

试问 d 是 X 上的度量? 或是伪度量?

15. 若 (X, d) 是伪度量空间，称集.

$$B(x_0; r) = \{x \mid d(x, x_0) < r, x \in X\}$$

为 X 中以 x_0 为中心，r 为半径的开球.

试问习题13中半径为1的开球是什么?

第二章 赋范空间、巴拿赫(Banach)空间

在第一章中研究了度量空间，在那里只涉及到空间的度量性质，度量属于集的几何结构．但第一章的很多空间同时可以定义元素的加法和数乘运算，构成一定的代数系统，这是集的代数结构．本章所要研究的赋范空间就是度量与代数结构有机结合的产物，它具有更大的优越性．赋范空间、特别是Banach空间（完备的赋范空间）以及在其上定义的线性算子的理论是泛函分析中最重要、最基本的内容．

重要概念、主要内容的概述

赋范空间（2.2-1）是度量依范数定义的向量空间（2.1-1）．范数是平面上或三维空间中向量长度的推广．Banach空间（2.2-1）是完备的赋范空间．任何赋范空间必有一Banach空间为其完备化度量空间（2.3-2）．

在赋范空间中，可以定义和使用无穷级数（§2.3）

本章另一个重要概念是定义在赋范空间上的线性算子，算子是赋范空间X到赋范空间Y中的映射．从赋范空间X到数域R或C中的映射称做泛函．其中特别重要的是有界线性算子(§2.7）和有界线性泛函（§2.8），定理2.7-13指出线性算子是连续的当且仅当它是有界的．

从赋范空间X到赋范空间Y中的有界线性算子全体可构成一赋范空间（§2.7），记作$B(X,Y)$，类似地，X上所有有界线性泛函亦构成一赋范空间，称做X的对偶空间，记为X^*（§2.8）.

有穷维赋范空间比无穷维赋范空间简单，有穷维向量空间上的线性算子可用矩阵来表示（§2.6）.

§2.1 向 量 空 间

向量空间在很多数学分支和它的应用中起着重要作用. 在研究某些理论和实际问题时，只有收敛概念是不够的，例如，考察极限过程，若没有代数结构，只能研究序列的收敛. 一旦与代数运算结合起来，就可以研究无穷级数的敛散性，这不仅在内容上大大丰富了极限理论而且也是某些应用的理论基础. 下面我们引进向量空间的概念.

2.1-1 **定义（向量空间）**. 数域K上的向量空间X（或称做线性空间）是在其上定义了元素（向量）的两个代数运算的非空集合. 这两个代数运算是:

向量加法. 是指从$X\times X$到X中的映射：$(x,y)\to x+y$（$x+y$称做x与y的和），并满足

$$x+y=y+x \qquad x,y\in X \qquad \text{（加法交换律）}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z) \quad x,y,z\in X. \quad \text{（加法结合律）}$$

X中存在零向量θ，使得对每个$x\in X$，有

$$x+\theta=x \quad \text{成立}$$

对于每个$x\in X$，存在$-x\in X$，使得

$$x+(-x)=\theta$$

数量α（K中元素）与X中向量x的乘法（简称数乘），是指从$K\times X$到X中的映射：
$(\alpha,x)\to\alpha x$（αx称为α与x的乘积），并满足，

$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$，$\alpha,\beta\in K$，$x\in X$（乘法结合律）

对于每个$x\in X$，$1\in K$，有

$1\cdot x=x$

$$\left.\begin{aligned}\alpha(x+y)&=\alpha x+\alpha y\\(\alpha+\beta)x&=\alpha x+\beta x\end{aligned}\right\}\quad \alpha,\beta\in K\quad x,y\in X\text{（分配律）}$$

在泛函分析中，数域K是实数域R或复数域C．若$K=R$时，则称X是实向量空间；若$K=C$时，则称X是复向量空间．

读者可以证明，对于任意$x\in X$，$\alpha\in K$，有

$$ox=\theta \tag{1a}$$

$$\alpha\theta=\theta \tag{1b}$$

$$(-1)x=-x \tag{2}$$

2.1-2 例题

【例1】 在R^n中如果加法和数乘定义如下：

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \cdots,\ \xi_n+\eta_n)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\ \cdots,\ \alpha\xi_n)$$

这里$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$，$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n)\in R^n$，$\alpha\in R$.
那么，R^n成为一实向量空间．

类似地，C^n可以成为一个复向量空间．

【例2】 $C[a,b]$是实向量空间，这里不考虑其几何结构—度量．只考虑代数结构，两个代数运算定义为，

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \qquad (\alpha \in R)$$

因为x, y是$[a,b]$上的连续函数，α是实数，从而，$x+y$、αx都是$[a,b]$上的连续函数。即此空间关于加法和数乘运算是封闭的。并可以验证它们满足向量空间定义中的诸公理。

【例 3】 空间$l^p(p\geqslant 1)$，如果在l^p中定义两个代数运算

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\cdots)$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\ \alpha\xi_2,\cdots)$$

这里，$x=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p$, $\alpha\in K$ ($K=R$或$K=C$)，则由$\sum|\alpha\xi_K|^p=|\alpha|^p\sum|\xi_K|^p<+\infty$, 知，$\alpha x\in l^p$ 由Minkowski不等式可得$x+y\in l^p$，即在l^p中关于加法和数乘运算是封闭的．向量空间诸公理成立是容易验证的，因此，l^p是向量空间．

此外，l^∞、$B(A)$按通常的加法、数乘运算均构成向量空间．

现在，我们来介绍与向量空间有关的几个概念．

设X是数域K上的向量空间，Y是X的非空子集，如果对于所有x, $y\in Y$，及任意$\alpha,\beta\in K$，有，$\alpha x+\beta y\in Y$，则称Y是X的向量子空间例如，R^3中过原点的直线和过原点的平面均是R^3的向量子空间。l^p是l^∞的向量子空间。特别是当$Y=X$时，Y称做X的假子空间，当$Y\neq X$ $(X\neq\{\theta\})$时，Y称做X的真子空间．每个向量空间X都有一个特殊的子空间$Y=\{\theta\}$。值得注意的是向量空间的非空子集并非都是向量子空间，看其是否关于两个代数运算封闭。如，R不是C的向量子空间，这是因为R在复数域上关于数乘运算不封闭。

设X是数域K上的向量空间，$x_1,\cdots,x_m$是X中的m个（有限）向量，α_1, $\cdots$, $\alpha_m\in K$，称向量

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$$

为向量$x_1, \cdots, x_m$的一个线性组合，或称x可用$x_1, \cdots, x_m$线性表示。

对于非空子集$M \subset X$，M中向量的线性组合的全体称做M的张成。记作$\mathrm{Span}M$. 显然，$M \subset \mathrm{Span}M$，且$\mathrm{Span}M$是X的一向量子空间。

2.1-3 **定义（线性相关和线性无关）** 设X是向量空间，$M = \{x_1, \cdots, x_r\} \subset X$，如果$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$是使

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = \theta \qquad (3)$$

成立的唯一的r个数，那么称M是线性无关的，如果存在不全为零的某r个数使(3)也成立，则称M是线性相关的。

设M是X的任意子集，如果M的每个非空有限子集都是线性无关的，则称集M是线性无关集。否则，称M是线性相关的。

若$M = \{x_1, \cdots x_r\}$是线性相关的，那么，M至少有一个向量可表示成其他向量的线性组合。事实上，若M线性相关，至少有一个$\alpha_j \neq 0$由(3)可解出，

$$x_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}x_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}x_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_j}x_r$$

下面我们用线性无关与线性相关的概念定义向量空间的维数。

2.1-4 **定义（有穷维与无穷维向量空间）**. 设X是向量空间，如果存在正整数n，使得X中有n个向量$x_1, \cdots, x_n$线性无关，而X的任何$n+1$个向量均线性相关，则称X是有穷维

向量空间，其维数为n，记作$\dim X=n$. 特别地，若$X=\{\theta\}$，规定X为有穷维向量空间，且$\dim\{\theta\}=0$，非有穷维向量空间称为无穷维向量空间。记$\dim X=\infty$

例如，R^n、C^n都是n维向量空间。$C[a,b]$，l^2均是无穷维向量空间。

如果$\dim X=n$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X中一线性无关集，则称$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的一个基。

一般地，如果B是向量空间X（不必是有穷维的）的线性无关子集，且$\mathrm{Span}B=X$，则称B为X的一个Hamel基.

例如，R^n中，$e_1=(1,0,0\cdots0)$，$e_2=(0,1,0\cdots,0)\cdots e_n=(0,0,0,\cdots,1)$则$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是$R^n$中一个基. 设$p[a,b]$是$[a,b]$上多项式的全体与数0构成的向量空间，那么，$\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$是$p[a,b]$的一Hamel基。

每个向量空间$X\neq\{\theta\}$都存在一Hamel基，对于有穷维向量空间，这个结论容易证明。对于无穷维向量空间，可用第四章的Zorn引理证明.

向量空间的Hamel基不是唯一的，但每个Hamel基的基数都是相同的（因为证明中需要集论中一些较深的知识，故证略），这个基数称为X的维数。这里的定义既包含了定义2.1-4，又是它的推广。

2.1-5 定理（子空间的维数）设X是n维向量空间，则X的任一真子空间Y的维数小于n。

证明. 若$n=0$，则$X=\{\theta\}$，这时X没有真子空间。若$n\neq0$，$\dim Y=0$. 则$Y=\{\theta\}$，且$\dim Y<\dim X$. 若$n\neq0$ $\dim Y\neq0$. 由于，$\dim Y\leqslant\dim X=n$. 只须证$\dim y\neq n$，假定$\dim Y=n$，那么，Y的每个基也是X的基，由X的每一元

素x均可由该基线性表示及Y为一子空间，故$x\in Y$，于是$Y=X$．这与Y是X的真子空间矛盾。因此，$\dim Y<n$．

习　题　2.1

1．证明实数全体按通常的加法和数乘运算构成一维实向量空间．复数全体构成一维复向量空间．

2．证明课文中的(1a)、(1b)、及(2)．

3．写出R^3中$M=\{(1,1,1),(0,0,2)\}$的张成．

4．指出下列R^3的子集哪些能构成R^3的子空间，这里，$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$．

(a)$\xi_1=\xi_2$、$\xi_3=0$的所有x；

(b)$\xi_1=\xi_2+1$的所有x；

(c)$\xi_1>0$，$\xi_2>0$，$\xi_3>0$ 的一切x；

(d)$\xi_1-\xi_2+\xi_3=k$（k为常数）的x全体；

5．证明$\{x_1,\cdots,x_n\}$，$x_j=t^j$是$C[a,b]$中一线性无关集．$j=0,1,2,\cdots,n-1$，

6．试证在n维向量空间X中，任意$x\in X$，可唯一地表示成已知基向量$e_1,\cdots,e_n$的线性组合。

7．设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是复向量空间X的基，找一个基使X成为实向量空间。试问在这两种情况下，X的维数是什么？

8．若M是复向量空间X的线性相关集，当X按习题7的方法成为一实向量空间时，试问M在X中是否线性相关？

9．定义在区间$[a,b]\subset R$上的所有次数不超过n的实系数多项式及$x=0$组成的集$p[a,b]$，证明以通常的加法及与实数的乘法构成一个$n+1$维的实向量空间．$x=0$与次数不超过n的$[a,b]$上的复系数多项式全体构成一复向量空间$\widetilde{X}$，$p[a,b]$是$\widetilde{X}$的子空间吗？

10．设Y和Z都是向量空间X的子空间，证明$Y\cap Z$是X的子空间．$Y\cup Z$是否是X的子空间？举例说明．

11. 设$M\neq\phi$是向量空间X的任一子集，证明Span$M$ 是X的子空间.

12. 证明所有实二阶方阵构成一向量空间X. X中的零向量是什么？确定$\dim X$，求出X的一个基。给出X的子空间例子。所有对称矩阵$x\in X$能否形成子空间？所有降秩矩阵能构成子空间吗？

13. （乘积），证明同一数域上的两个向量空间的笛卡儿乘积$X=X_1\times X_2$，其上定义代数运算

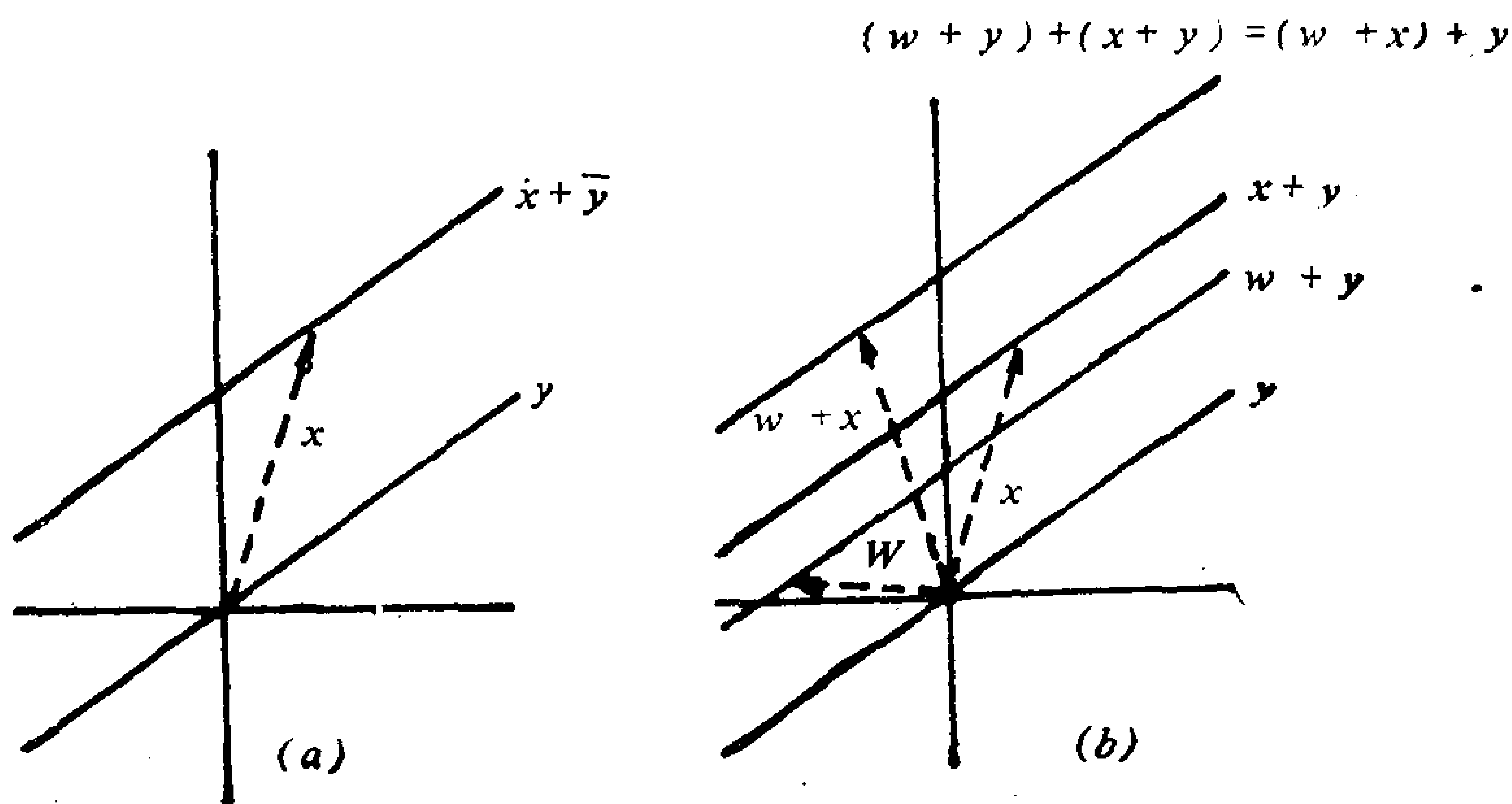
$$(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$$
$$a(x_1, x_2)=(ax_1, ax_2)$$

后成为一向量空间.

14. （商空间、余维数）设Y是向量空间X的子空间. $x\in X$，称$x+Y=\{v|v=x+y, y\in Y\}$是x关于Y的陪集. 证明这些不同的陪集形成X的一个划分.并证明在下列代数运算下，

$$(x+Y)+(w+Y)=(x+w)+Y$$
$$\alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$

以陪集作为元素构成一向量空间，称做X关于Y的商空间，记作X/Y. $\dim(X/Y)$ 称为Y的余维数.记为$\operatorname{codim}Y=\dim(X/Y)$.



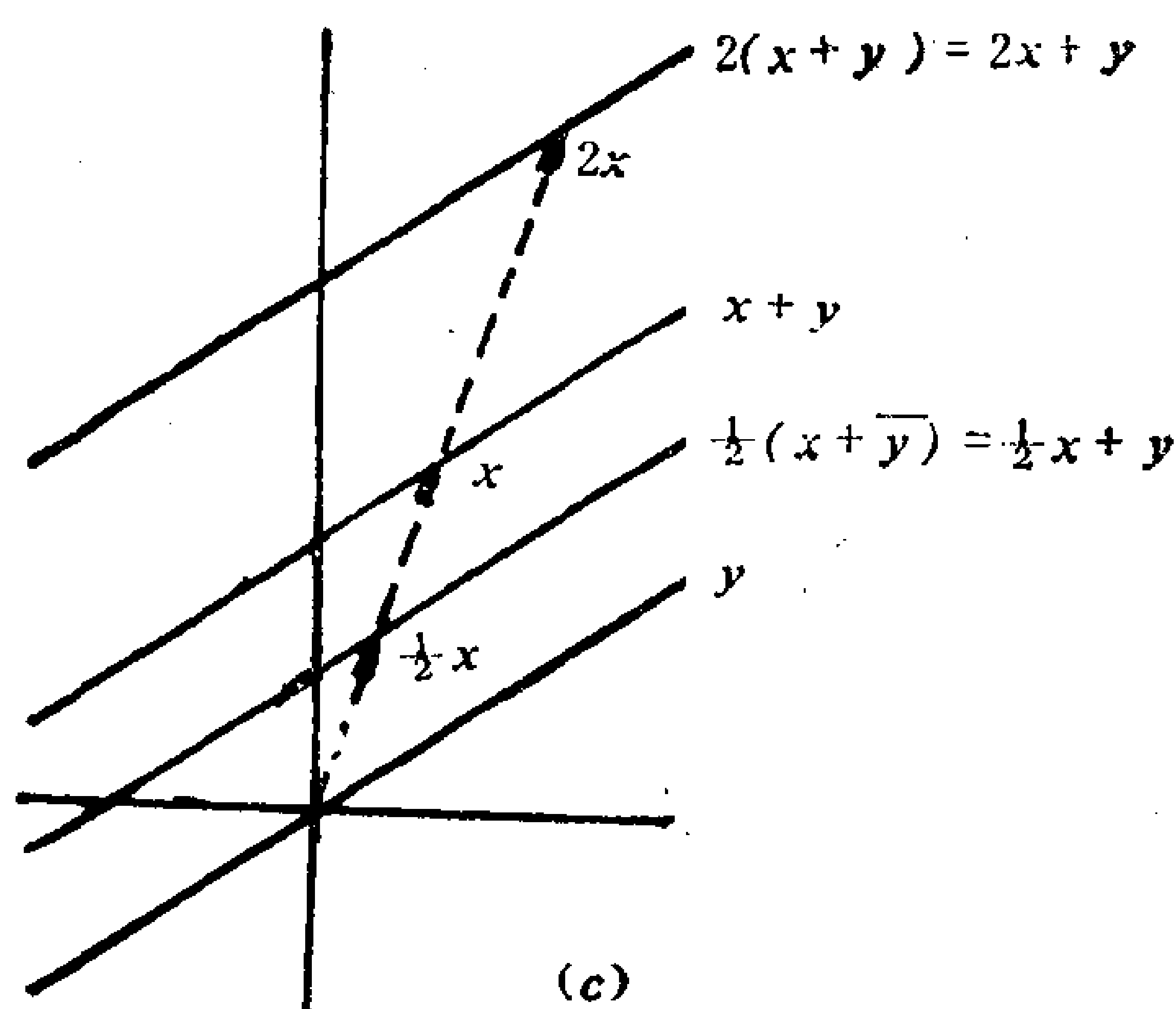


图 5 .(a) $x+Y$ 的图示,(b) 商空间中,向量加法图示
(c) 商空间中,向量数乘运算的图示

15. 设 $X=R^3$, $Y=\{(\xi_1,0,0)|\xi_1\in R\}$, 求 X/Y, X/X, $X/\{\theta\}$

§2.2 赋范空间、Banach空间

向量空间很多也是度量空间. 为使度量与代数运算结合起来, 我们在向量空间上建立向量的范数, 它是平面上和三维空间中向量模的概念的自然推广. 并由范数定义向量空间的度量, 从而产生了赋范空间, 若在这种度量下赋范空间是完备的, 称为Banach空间.

2.2-1 **定义(赋范空间.Banach空间)** 设 X 是数域 K 上的向量空间, 在 X 上定义映射 $X\to R$: $x\longmapsto\|x\|$, 对于任意 x、$y\in X$, $\alpha\in K$ 若满足

$$\|x\|\geqslant 0 \qquad (N1)$$

$$\|x\|=0 \text{当且仅当} x=\theta \tag{N2}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\| \tag{N3}$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{N4}$$

则称$\|x\|$为x的范数．称$(X,\|\cdot\|)$为赋范空间（或赋范向量空间），简记作X.

在X上定义度量

$$d(x,y)=\|x-y\| \tag{1}$$

若X在度量(1）下是完备的，则称X是Banach空间.

(1）也称做由范数导出的度量.

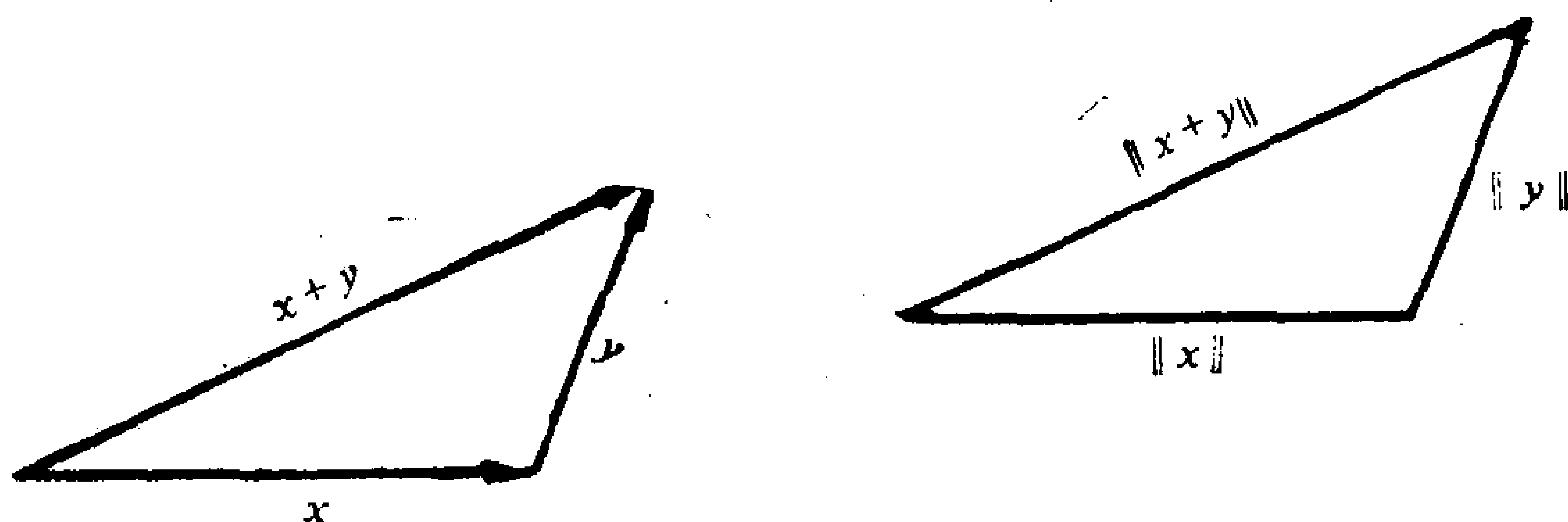


图 6　三角不等式（$N4$）的图示

2.2-2　欧几里得空间R^n及酉空间C^n. 对于$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$定义范数

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{1/2}=\sqrt{|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \tag{2}$$

易验证$(N1)$、$(N2)$、$(N3)$成立，$(N4)$可由*Minkowski*不等式证得．由范数导出的度量是1.1-2中的度量(4），$y=(\eta_1,\cdots\eta_n)$

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2}$$

在1.5-1中已证明在此度量下R^n和C^n是完备的．因此，R^n、C^n均是Banach空间.

特别是在R^3中，

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$$

这表明向量的范数是向量长度这个初等概念的推广。

2.2-3 **空间l^p($p\geqslant 1$)．**在l^p上定义范数，

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p} \qquad x=(\xi_j)\in l^p. \tag{3}$$

易验证(3)满足范数公理($N1$)至($N4$)，由(3)导出的度量为

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p}$$

l^p在这个度量下是完备的（1.5-4中已证明）．
故l^p是Banach空间

2.2-4 **空间l^∞是Banach空间．**容易证明

$$\|x\| = \sup_j|\xi_j| \qquad x=(\xi_j)\in l^\infty$$

是l^∞上向量的范数，并且度量

$$d(x,y) = \sup_j|\xi_j-\eta_j| \qquad x=(\xi_j),\ y=(\eta_j)\in l^\infty$$

是由这个范数导出的．l^∞的完备性已在1.5-2中证得．

2.2-5 **空间$C[a,b]$是Banach空间．**在$C[a,b]$上定义

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \qquad x\in C[a,b] \tag{4}$$

可以验证(4)满足($N1$)至($N4$)．并在(4)的导出度量下，$C[a,b]$的完备性在1.5-5中巳证明．

2.2-6 **非完备的赋范空间．**可以证明[0,1]上实值连续函数全体，按其范数

$$\|x\| = \int_0^1|x(t)|\,dt \tag{5}$$

成为一赋范空间．在范数(5)的导出度量下，是非完备的

（在1.5-8中已证明）

还可以证明，$[a,b]$上实值连续函数全体，按范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{1/2} \tag{6}$$

构成一非完备的赋范空间.

赋范空间是度量空间，其度量由(1) 给出，有了度量，就可以研究收敛概念.

设(x_n)是赋范空间X中的序列，$x\in X$，如果，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

则称x_n依范数收敛于x，记作，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x$，或，$x_n\to x$.

由定义2.2-1中的$(N4)$，可得如下不等式

$$|\,\|y\| - \|x\|\,| \leqslant \|y - x\| \tag{7}$$

证明留给读者（参看习题 3），不等式(7) 蕴涵范数的连续性.

在赋范空间中，加法运算和数乘运算均是连续的。设X是数域K上的赋范空间. (x_n)、(y_n)是X中的序列，x、$y\in X$，且$x_n\to x$，$y_n\to y$. 则，

$$x_n + y_n \to x + y.$$

若(α_n)是K中数列，$\alpha_n\to\alpha\in K$，$x_n\to x$，则

$$\alpha_n x_n \to \alpha x.$$

证明，由于$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$

因此 $x_n + y_n \to x + y$.

因为$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leqslant \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha x\|$

$$= |\alpha_n|\,\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\,\|x\|$$

并且(α_n)是收敛数列，故有界，于是，

$$\alpha_n x_n \to \alpha x.$$

每个赋范空间都是度量空间，但是，并非任何度量空间的度量都是由范数导出的。由范数导出的度量需满足下面两个性质.

2.2-7 **引理.** 设X是赋范空间，d是由范数导出的度量，对于所有$x, y, a \in X$，每个$\alpha \in K$，则有，

(a) $d(x+a, y+a) = d(x, y)$（平移不变性）

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$（绝对齐次）　　(8)

证明　$d(x+a, y+a) = \|(x+a)-(y+a)\| = \|x-y\|$

$$= d(x, y).$$

$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x, y).$

例如，序列空间S，1.2-5中我们曾证明过S是度量空间．其度量为，

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

这里，$x = (\xi_i)$，$y = (\eta_i)$.

不难看出d不满足(8)中的(b)，因此，d不是由范数导出的度量，即S不是赋范空间.

习　题　2.2

1. 证明赋范空间中向量x的范数$\|x\|$是从x到θ的距离.

2. 验证平面上和三维空间中向量长度满足范数公理($N1$)至($N4$).

3. 若X是赋范空间，$x, y \in X$，则，

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$$

4．证明："由$\|x\|=0$推出$x=0$"可代替$(N2)$

5．验证2.2-2中的(2)满足（$N1$）至（$N4$）．

6．设X是所有有序实数对$x=(\xi_1,\ \xi_2)$，$y=(\eta_1,\ \eta_1)$，…，组成的向量空间，证明，

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|$$

$$\|x\|_2=(\xi_1{}^2+\xi_2{}^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty=\max\ \{|\xi_1|,\ |\xi_2|\}$$

均是X上的范数．

7．验证2.2-3中的(3)满足$(N1)$至$(N4)$．

8．证明．

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|+\cdots+|\xi_n|$$

$$\|x\|_p=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots+|\xi_n|^p)^{1/p}\qquad(1<p<+\infty)$$

$$\|x\|_\infty=\max\ \{|\xi_1|,|\xi_2|\},\ \cdots,\ |\xi_n|\}$$

均是n个复数有序组全体所组成的向量空间上的范数．

9．验证2.2-5中的(4)满足$(N1)$至$(N4)$．

10．（单位球面）在赋范空间X中，称集

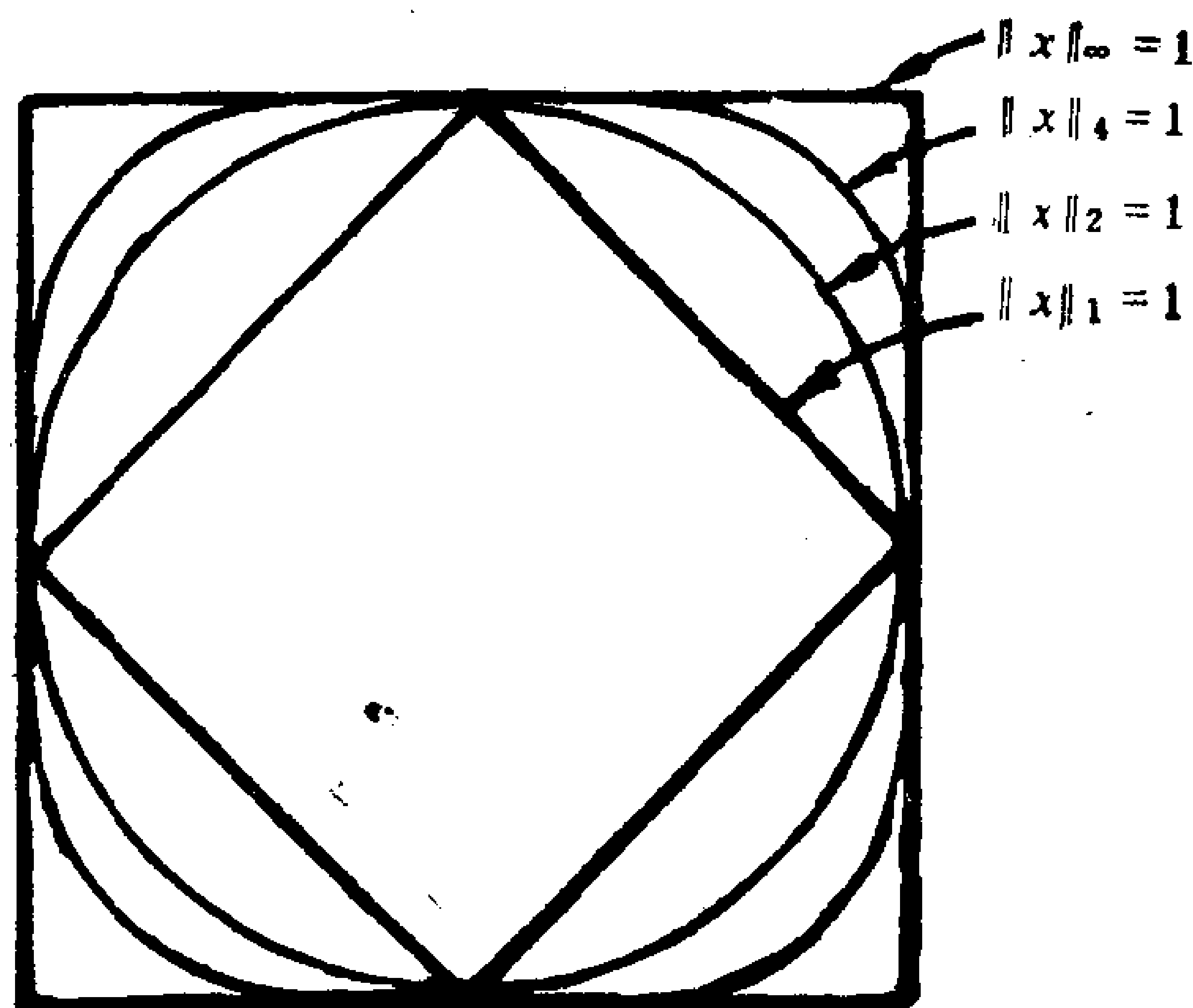


图7　习题10中的单位球面

$$S(\theta;\ 1)=\{x \mid \|x\|=1,\ x\in X\}$$

为单位球面. 试证由习题 6 中各范数及

$$\|x\|_4=(\xi_1{}^4+\xi_2{}^4)^{1/4}$$

所确定的单位球面分别如图 7 所示.

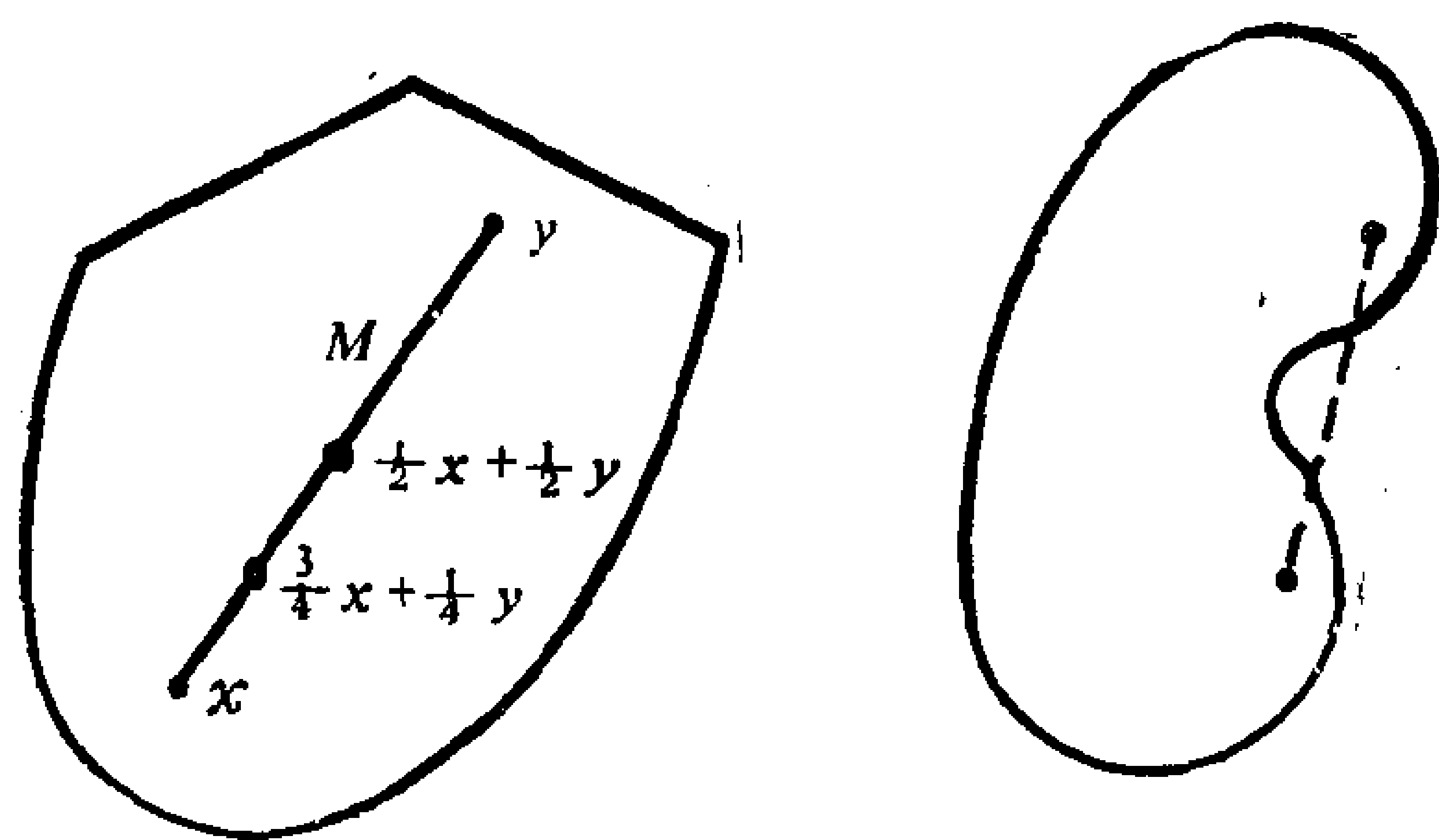
11. (凸集、线段) 设A是向量空间X的子集, 如果x, $y\in A$蕴涵

$$M=\{z \mid z=\alpha x+(1-\alpha)y,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}\subset A$$

则A称为凸集. M称做以x、y为端点的闭线段. 试证在赋范空间中, 闭单位球

$$\widetilde{B}(\theta;\ 1)=\{x \mid \|x\|\leqslant 1\}$$

是凸的.



(a)凸集 (b)非凸

图 8 凸集与非凸集的图示

12. 利用习题11, 证明

$$\varphi(x)=(\sqrt{|\xi_1|}+\sqrt{|\xi_2|})^2$$

不是有序实数对$x=(\xi_1,\ \xi_2)$所组成的向量空间上的范数 (请参照图9中$\varphi(x)=1$的图形).

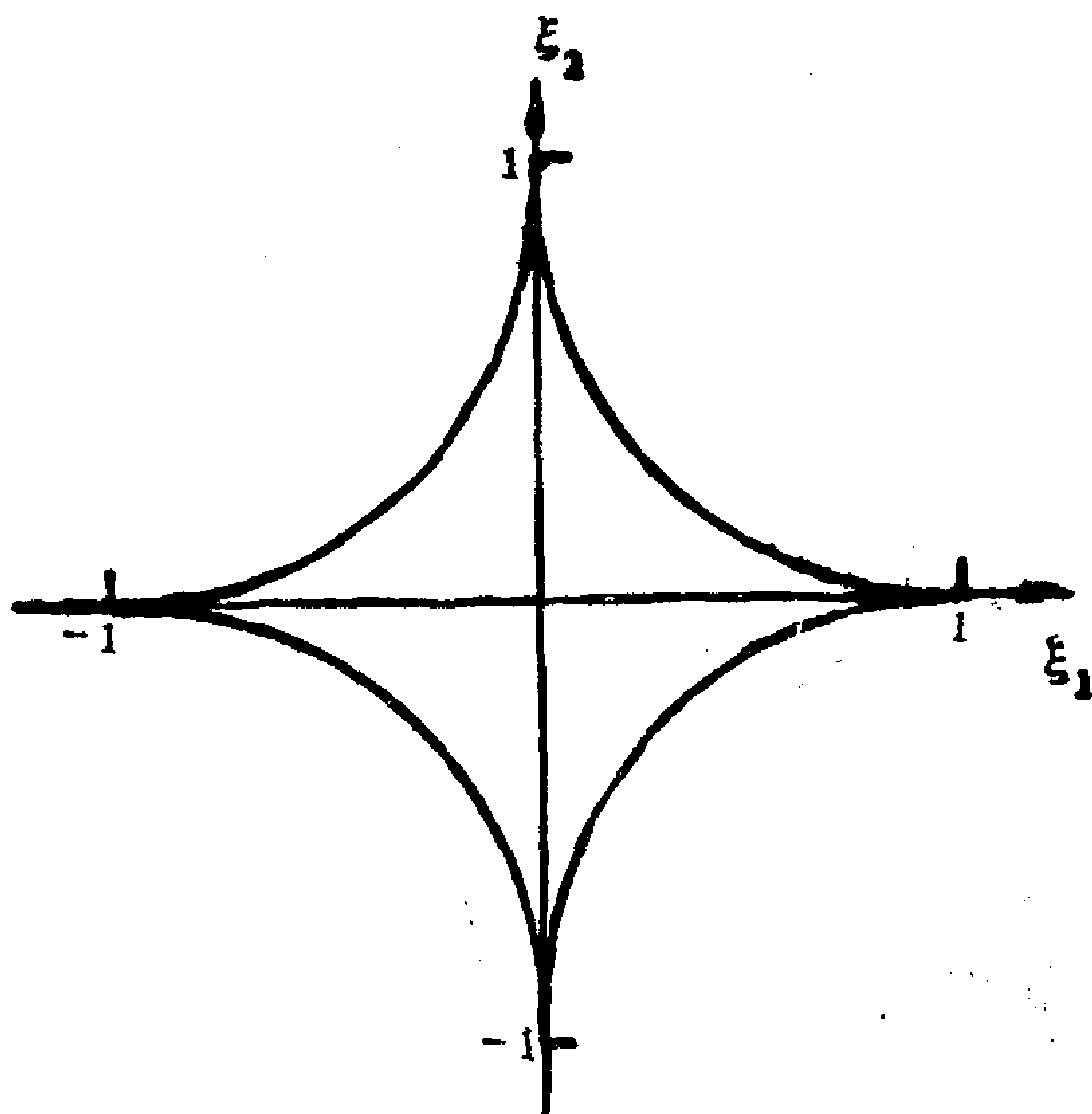


图 9　习题12中$\varphi(x)=1$的图形

13. 证明向量空间$X\neq\{\theta\}$上的离散度量不能由范数导出。(参阅1.1-2中的例5)

14. 如果d是由空间$X\neq\{\theta\}$的范数导出的，证明

$$\tilde{d}(x,\ y)=\begin{cases}0 & x=y\\ d(x,\ y)+1 & x\neq y\end{cases}$$

不能由范数导出。

15. (有界集)证明赋范空间X的子集M为有界的充要条件是：存在一个正数C，使得对于每个$x\in M$，有

$$\|x\|\leqslant C$$

(有界的定义见习题1.2中的第 6 题)

§2.3　赋范空间的另一些性质

在赋范空间中，既有代数运算，又有极限运算，因此可

以引进无穷级数的概念.

设(x_n)是赋范空间X中的序列，表示式，

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \qquad (1)$$

称做赋范空间X的无穷级数.

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

称做级数$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$的部分和. 如果存在$S \in X$，使得

$\|S - S_n\| \to 0$，则称级数收敛于S，S叫做级数$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$的和，记作$S = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$.

如果数项级数$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$收敛，则称级数$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$绝对收敛. 我们提醒读者，在赋范空间$X$里，绝对收敛蕴涵收敛当且仅当$X$是完备的（参看本节习题5至7）.

设(e_n)是赋范空间X中的序列，如果对于每个$x \in X$，存在唯一的数列(α_n)，使得

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0$$

则称(e_n)为赋范空间X的Schauder基.

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

称做x关于(e_n)的展开.

例如，l^p有一个Schauder基(e_n)，这里，$e_n = (\delta_{nj})$，即e_n的第n项为1，其余各项都为零.

具有Schauder基的赋范空间一定是可分的（参看习题8），反之，可分的赋范空间不一定有Schauder基. *P.Enflo*于1973年构造了一个没有Schauder基的可分的Banach

空间.

因为赋范空间是度量空间，那么，关于度量空间完备性的一些结论在赋范空间中仍然成立.

赋范空间X的子空间Y是指X作为向量空间的子空间，并且Y上的范数是X的范数在Y上的限制.若Y在X中是闭的，则称Y是X的闭子空间.

Banach空间X的子空间Y是指X作为赋范空间的子空间，不必要求Y完备. 利用定理1.4-8得到如下的定理.

2.3-1 定理(**Banach空间的子空间**) Banach空间X的子空间Y为完备的充要条件是集Y在X中是闭的.

赋范空间X中的(x_n)是Cauchy序列必须且只须对于每个$\varepsilon>0$，存在N，当m，$n>N$时

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon \tag{2}$$

成立.

·**2.3-2 定义**(**同构向量空间、同构的赋范空间**)设X、Y是同一数域K上的两个向量空间，如果存在X到Y的双射T，使得对任意x_1，$x_2\in X$，$\alpha,\beta\in K$.有，

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2 \tag{3}$$

则称X与Y是同构的向量空间.

同构的赋范空间是指保持范数不变的同构的向量空间，即，$\|Tx\|_Y=\|x\|_X$和(3)都成立.

2.3-3 定理(**完备化**)设$X=(X,\|\cdot\|)$是赋范空间，那么，存在一个Banach空间$\hat{X}$，使得X与$\hat{X}$的一个稠密子空间W同构.且在同构的意义下，$\hat{X}$是唯一的.

证明 根据度量空间完备化定理1.6-2，存在一完备度

量空间$\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$和它的一个稠密子集$W$，并存在一等距映射$A$：$X\to W$. 因为这里的$X$是赋范空间，首先要把$\hat{X}$变成向量空间，使其$W$为$\hat{X}$的向量子空间；然后，在$\hat{X}$上定义范数，成为赋范空间.

对于$\hat{x}$，$\hat{y}\in\hat{X}$，$\hat{x}$，$\hat{y}$是X中Cauchy序列的等价类，任取$(x_n)\in\hat{x}$，$(y_n)\in\hat{y}$，令$z_n=x_n+y_n$，由于

$\|z_n-z_m\|=\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\|\leqslant\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|$ 则(z_n)是X中的Cauchy序列，于是(z_n)属于某个等价类$\hat{z}$. 定义$\hat{x}$与$\hat{y}$的和为，

$$\hat{x}+\hat{y}=\hat{z}$$

$\hat{z}$与$\hat{x}$、$\hat{y}$中代表(x_n)、(y_n)的选择无关.

类似地，定义数α与$\hat{x}$的数乘为

$$\alpha\hat{x}=\hat{\omega}\qquad(\alpha x_n)\in\hat{\omega}$$

$\hat{\omega}$与$\hat{x}$中的代表(x_n)的选择无关.

不难验证$\hat{X}$是一向量空间. 下面验证W是$\hat{X}$的向量子空间且X与W是同构的向量空间.

对于任意$\hat{x}$，$\hat{y}\in W$，α，$\beta\in K$，则存在x，$y\in X$使得$(x,x,\cdots)\in\hat{x}$，$(y,y,\cdots)\in\hat{y}$，由$\hat{X}$上两个代数运算的定义知，$(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y,\cdots)\in\alpha\hat{x}+\beta\hat{y}$. 从而$\alpha\hat{x}+\beta\hat{y}\in W$. 即$W$是$\hat{X}$的向量子空间.

对于任意x，$y\in X$，$\alpha,\beta\in K$，映射$A:X\to W$满足：$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$.因此，$X$与$W$是同构的向量空间.

在子空间W上定义范数

$$\|\hat{x}\|_1=\hat{d}(\hat{x},\hat{\theta})\qquad \hat{x}\in W.$$

则 $\|\hat{x}\|_1=\hat{d}(\hat{x},\hat{\theta})=d(x,\theta)=\|x\|\qquad x\in X.$

故X与W是同构的赋范空间.[$\|\cdot\|_1$显然满足$(N1)$至$(N4)$]

今将W上的范数$\|\cdot\|_1$扩充到全空间$\hat{X}$.对于$\hat{x}\in\hat{X}$,定义

$$\|\hat{x}\|_2=\hat{d}(\hat{x},\hat{\theta})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,\theta)$$

$(x_n)\in\hat{x}$,

$\|\cdot\|_2$显然满足$(N1)$和$(N2)$.由于度量d是由范数导出的.因此，$\|\alpha\hat{x}\|_2=\hat{d}(\alpha\hat{x},\hat{\theta})=\lim_{n\to\infty}d(\alpha x_n,\alpha\theta)$

$=|\alpha|\lim_{n\to\infty}d(x_n,\theta)=|\alpha|\,\|\hat{x}\|_2$,这里，$(x_n)\in\hat{x}$,于是$(N3)$得证.由范数$\|\cdot\|$的三角不等式，得，

$$\begin{aligned}\|\hat{x}+\hat{y}\|_2=\hat{d}(\hat{x}+\hat{y},\hat{\theta})&=\lim_{n\to\infty}d(x_n+y_n,\theta)\\&=\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\|x_n\|+\lim_{n\to\infty}\|y_n\|\\&=\lim_{n\to\infty}d(x_n,\theta)+\lim_{n\to\infty}d(y_n,\theta)\\&=\|\hat{x}\|_2+\|\hat{y}\|_2,\end{aligned}$$

这里，$(x_n)\in\hat{x}$，$(y_n)\in\hat{y}$故$(N4)$成立.由于

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n - y_n, \theta)$$

$$= \hat{d}(\hat{x} - \hat{y}, \hat{\theta})$$

$$= \|\hat{x} - \hat{y}\|_2$$

所以，$\hat{d}$是由$\|\cdot\|_2$导出的，因而，$\hat{X}$是一个Banach空间.并且可以证明，在同构的意义下，$\hat{X}$是唯一的

例如，$[a,b]$上实值连续函数全体其范数为

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{1/2}$$

构成的赋范空间的完备化空间是Banach空间$L^2[a,b]$.

对于熟悉Lebesgue积分的读者，我们要指出，$L^2[a,b]$也可以用直接方法得到，即$L^2[a,b]$是由$[a,b]$上 $x(t)^2$的Lebesgue积分存在且有限的Lebesgue可测函数$x(t)$的全体组成的.$L^2[a,b]$的元素是函数的等价类，x等价于y是指$[x(t) - y(t)]^2$在$[a,b]$上的Lebesgue积分等于零.

习 题 2.3

1. 证明空间c是空间l^∞的向量子空间（参看1.5-3)，并且收敛于零的数列全体组成的空间c_0也是l^∞的向量子空间.

2. 证明c_0是l^∞的闭子空间，因此c_0是完备的.

3. 在l^∞中，设Y是由仅含有限个非零项的序列组成的子集，证明Y是l^∞的子空间，但不是闭子空间.

4. 证明赋范空间X的子空间Y的闭包$\overline{Y}$还是X的向量子空间.

5. （绝对收敛）举例说明在一般赋范空间中，级数的绝对收敛$\|y_1\| + \|y_2\| + \cdots$不蕴涵级数$y_1 + y_2 + \cdots$的收敛.(提示：考虑习题

8中的Y和(y_n)，这里，$y_n=(\eta_j^{(n)})$，$\eta_n^{(n)}=\frac{1}{n^2}$，$\eta_j^{(n)}=0$，$(j\neq n)$．

6．如果在赋范空间X中，任何级数的绝对收敛总蕴涵级数收敛，证明X是完备的．

7．证明在巴拿赫空间中，绝对收敛的级数必收敛．

8．（Schauder基）证明若赋范空间有一Schauder基，则此空间可分．

9．设$e_n=(\delta_{nj})$，证明(e_n)是l^p的Schauder基（这里$p\geqslant1$）．

10．（拟范数）向量空间X上拟范数是一映射$p:X\to R$，且满足§2.2中的$(N1)$、$(N3)$、$(N4)$．证明

$$p(\theta)=0$$

$$|p(y)-p(x)|\leqslant p(y-x)．$$

（因此，若$p(x)=0$蕴涵$x=\theta$，则p是一个范数．）

11．证明在习题10中，使得$P(x)=0$的元素$x\in X$，构成X的一子空间N，并证明，对于$\hat{x}\in X/N$，（参见§ 1.2习题14）$x\in\hat{x}$，$\|\hat{x}\|_0=P(x)$是定义在X/N上的范数．

12．（商空间）设Y是赋范空间$(X,\ \|\cdot\|)$的闭子空间，证明．对于$\hat{x}\in X/Y$

$$\|\hat{x}\|_0=\inf_{x\in\hat{x}}\|x\|$$

是X/Y上的一个范数．

13．（赋范空间的乘积），如果$(X_1,\ \|\cdot\|_1)$与$(X_2,\|\cdot\|_2)$是赋范空间，证明

$\|x\|=\max\{\|x_1\|_1,\ \|x_2\|_2\}$　$x=(x_1,\ x_2)$是乘积空间$X=X_1\times X_2$上的范数$\|\cdot\|$

§2.4 有穷维赋范空间及其子空间

有穷维赋范空间比无穷维赋范空间简单，它具有某些无穷维空间所没有的性质，这些性质对研究许多问题(例如，逼近论、谱论)是很有用的.

下面的引理是推导其他定理的基础.

2.4-1 引理(线性组合)设X为一赋范空间，$\{x_1\cdots,x_n\}$是X中一线性无关向量集.则存在一常数$C>0$.使得对于任意一组数$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，有

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n\|\geqslant C(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|) \tag{1}$$

证明.令$S=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$，若$S=0$，则对任意常数$C$，(1)均成立.设$S>0$,那么，(1)等价于

$$\|\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n\|\geqslant C\left(\beta_j=\alpha_j/s\quad \sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1\right) \tag{2}$$

因此，只须证(2)成立.

用反证法证，若(2)不成立.则存在序列(y_m)

$$y_m=\beta_1^{(m)}x_1+\cdots+\beta_n^{(m)}x_n\qquad \sum_{j=1}^{n}|\beta_j^{(m)}|=1$$

$$\|y_m\|<\frac{1}{m}\to 0\quad (m\to\infty)$$

由于$\sum\limits_{i=1}^{n}|\beta_j^{(m)}|=1$，有$|\beta_j^{(m)}|\leqslant 1,(j=1,2\cdots n)$，

即对于每个固定的$j=1,2\cdots n$,序列，

$$(\beta_j^{(m)})=(\beta_j^{(1)},\beta_j^{(2)},\cdots)$$

有界，根据Bolzano-Weierstrass定理，$(\beta_1^{(m)})$有一收敛子序列$(\beta_1^{(m_k)})$，令$\beta_1^{(m_k)}\to\beta_1$ $(k\to\infty)$，并令$(y_{1,m})$表示(y^m)的相应子序列.同理$(\beta_2^{(m_k)})$也有一个收敛的子序列，令β_2表示这个子序列的极限，$(y_{2,m})$表示(y_1,m)中相应于$(\beta_2^{(m_k)})$的收敛子序列的子列.这样进行n次后，得到(y_m)的子序列$(y_{n,m})$，

$$y_{n,m}=\sum_{j=1}^{n}r_j^{(m)}\ x_j \qquad \sum_{j=1}^{n}|r_j^{(m)}|=1$$

这里，$r_j^{(m)}\to\beta_j\ (m\to\infty)$因此，

$$y_{n,m}\to y=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$$

由$\sum_{j=1}^{n}|r_j^{(m)}|=1$，得$\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|=1$，故$\beta_j\ (j=1,2\cdots n)$不全为零，因为$\{x_1,\cdots,x_n\}$线性无关，于是，$y\neq\theta$，另一方面，由范数连续性，得$\|y_{n,m}\|\to\|y\|$.但$\|y_m\|\to 0$，所以$\|y_{n,m}\|\to 0$，由数列极限的唯一性，有$\|y\|=0$.因而，$y=\theta$，这与$y\neq\theta$矛盾.因此，引理得证.

2.4-2 定理(完备性) 赋范空间X的每个有穷维子空间Y是完备的.特别是，有穷维赋范空间是完备的.

证明. 设$\dim Y=n$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是Y的一个基，(y_m)是Y中任意Cauchy序列.则每个y_m可唯一地表示为

$$y_m=\alpha_1^{(m)}e_1+\cdots+\alpha_n^{(m)}e_n$$

由(y_m)是Cauchy序列，故对于每个$\varepsilon>0$，存在一个N，当$m, r>N$时，有

$$\|y_m-y_r\|<\varepsilon$$

根据引理2.4-1，存在常数$c>0$，使得

$$c\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)}|\leqslant\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)})e_j\|=\|y_m-y_r\|<\varepsilon$$

$(m, r>N)$

因此，对于每个j（$j=1, 2\cdots n$），有，

$$|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j^{(r)}|<\frac{\varepsilon}{c}\quad(m, r>N)$$

即n个序列

$$(\alpha_j^{(m)})=(\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}\cdots)\qquad j=1, 2\cdots n$$

中的每一个都是**R**或**C**中的Cauchy序列，令 $\alpha_j^{(m)}\longrightarrow\alpha_j$ $(m\to\infty)$，利用这n个极限α_1, …, α_n定义，

$$y=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n$$

则$y\in Y$，且，

$$\|y_m-y\|=\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)}-\alpha_j)e_j\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(m)}-\alpha_j|\,\|e_j\|$$

$$\longrightarrow0\quad(m\to\infty)$$

即$y_m\to y$，这就证明了Y中任意Cauchy序列均在Y中收敛，因此，Y是完备的．

根据定理2.4-2和定理1.4-8，立即得出下面定理，

2.4-3 **定理(闭性)**．赋范空间X的每个有穷维子空间在X中是闭的．

值得注意的是，无穷维子空间不一定是闭的．例如，$X=C[0, 1]$，$Y=\mathrm{Span}\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$是所有多项式组成的集，$Y$是$C[0, 1]$的子空间但$Y$在$C[0,1]$中不是闭的（参看1.5-7），

有穷维向量空间X的另一个重要性质是其上所有范数导出的X的拓扑（参看§1.3）均是相同的，即X上所有开子

集，与X上范数选择无关，这可从下面看到，

2.4-4 **定义**(**等价范数**)设X是向量空间，$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$是X上的两个范数，如果存在正数a和b，使得，对于所有$x\in X$，有

$$a\|x\|_0\leqslant\|x\|\leqslant b\|x\|_0 \tag{3}$$

则称范数$\|\cdot\|$与范数$\|\cdot\|_0$等价.

2.4-5 **定理**(**等价范数**)在有穷维向量空间X上，任何两个范数$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$都是等价的.

证明 设$\dim X=n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基. 则，每个$x\in X$可唯一地表示为

$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n$$

根据引理2.4-1，存在常数$C>0$，使得，

$$\|x\|\geqslant C(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|)$$

另一方面，有

$$\|x\|_0\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\ \|e_j\|_0\leqslant K\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j| \qquad K=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|e_j\|$$

合起来 得

$$a\|x\|_0\leqslant\|x\| \qquad a=\frac{C}{K}$$

再将两范数$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$的位置互换，就得到(3)中的后一个不等式，故证得$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$等价，

这个定理蕴涵有穷维空间中序列的敛散性与范数的选择无关.

习 题 2.4

1. 举出l^∞和l^2的非闭子空间的例子.

2. 如果$X=R^2$，$x_1=(1,0)$，$x_2=(0,1)$；若$X=R^3$
$x_1=(1,0,0)$，$x_2=(0,1,0)$，$x_3=(0,0,1)$，试分别求出(1)中c的最大可能值.

3. 在定义2.4-4中，证明等价关系的诸公理成立.

4. 证明向量空间上由等价范数导出的拓扑是相同的.

5. 若$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$是向量空间X上的等价范数，证明$(X,\|\cdot\|)$和$(X,\|\cdot\|_0)$中的Cauchy序列是相同的.

6. 证明习题2.2的第8题中$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$是等价的（用定义2.4-4直接证明）

7. 设$\|\cdot\|$是习题2.2的第8题中向量空间X上的任意范数，证明（不用定理2.4-5）存在一个常数$b>0$，使得对所有$x\in X$，有$\|x\|\leqslant b\|x\|_2$

8. 证明习题2.2第8题中的 范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的，且满足，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$$

9. 如果向量空间X上的两个范数$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_0$是等价的，证明$\|x_n-x\|\to 0$蕴涵$\|x_n-x\|_0\to 0$（反之亦然）.

10. 证明所有复的$m\times n$阶矩阵$A=(\alpha_{ij})$构成一mn维的向量空间Z.证明Z上所有范数是等价的.对于空间Z，类似于习题2.2第8题中的$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_\infty$都是什么？

§2.5 紧性及有穷维数

有穷维赋范空间及其子空间的另外几个基本性质是与紧性有关的，首先引进紧性的概念.

2.5-1 定义（紧性）.设X是度量空间，如果X中的每

① 精确地说X是列紧的.这是分析中最重要一种紧性.还有另外两种紧性，但在度量空间中，这三种概念是一致的.参看附录A1，5-

个序列都有一个收敛的子序列，则称X是紧①空间，设M是X的子集，若M是X的紧子空间，即，M中的每个序列都有一个收敛的子序列，其极限是M中的一个元素，则称M是紧集．

2.5-2 **引理(紧性)**．如果M为度量空间X中的紧子集，则M在X中为有界的闭集，

证明 (a)证M为闭的．对于每个$x \in \overline{M}$，根据定理1.4-7(a)，M中必存在序列(x_n)，使得，$x_n \to x$，因为M是紧的．则$x \in M$，故M为闭的．

(b)证M有界，若M无界，对于固定的$y_0 \in M$和自然数n，存在$y_n \in M$，使得$d(y_n, y_0) > n$，即(y_n)是M中的无界序列，根据定理1.4-2，(y_n)不含任何收敛的子序列，这与M是紧集矛盾，因而，M有界．

例如，R中的区间(0，1)是非紧集．R中的自然数集$\{1, 2, \cdots n, \cdots\}$也是非紧集．而区间[0，1]是$R$中的紧集．

对于有穷维赋范空间，引理2.5-2的逆亦成立．

2.5-3 **定理(紧性)**．在有穷维赋范空间X中，任何子集M为紧的充要条件是M为有界闭集．

证明 只须证有界闭性蕴涵紧性．设$\dim X = n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基，(x_m)是M中任意序列则x_m有唯一表示式

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(m)} e_n$$

因为M有界，对所有m，有，$\|x_m\| \leqslant K$ (K是常数)，由引理2.4-1，存在常数$C > 0$，使得

$$C \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| = \|x_m\| \leqslant K$$

因此，对于每个固定的j，数列$(\xi_j^{(m)})$是有界的，根据Bolzano-

Weierstrass-定理，存在一聚点ξ_j，$1\leqslant j\leqslant n$. 令$z=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$，和证明引理2.4-1一样．$(x_m)$有一子序列收敛于$z$，因为$M$是闭的，于是$z\in M$，这就证明了$M$是紧的.

对于无穷维赋范空间，有界闭集不一定是紧的，例如，l^2中的点集$\{e_n\}$，$e_n=(\delta_{nj})$，因为$\|e_n\|=1$，故$\{e_n\}$有界．对于任意自然数m，n，$m\neq n$，那么，$\|e_m-e_n\|=\sqrt{2}$．所以$\{e_n\}$没有聚点，于是$\{e_n\}$是闭集，但不是紧集.

还有一些结果是从F．Riesz引理推导出来的，为此，先介绍F．Riesz引理.

2.5-4 **黎斯(F．Riesz)引理**．设X是赋范空间(X是任意维的)，Y和Z是X的子空间，Y是闭的，且Y又是Z的真子空间，那么，对于区间（0，1）内的每个实数θ，存在$z\in Z$，$\|z\|=1$，使得

$$\|z-y\|\geqslant\theta \qquad \text{所有}y\in Y$$

证明 任意$v\in Z-Y$到Y的距离为

$$a=\inf_{y\in Y}\|v-y\|$$

由于Y是闭的，则$a>0$，根据下确界定义，存在一个$y_0\in Y$，使得，

$$a\leqslant\|v-y_0\|\leqslant\frac{a}{\theta} \tag{1}$$

令，$z=c(v-y_0)$，$c=\|v-y_0\|^{-1}$，于是，$\|z\|=1$ 对于每个$y\in Y$，

$$\|z-y\|=\|c(v-y_0)-y\|=c\left\|v-y_0-\frac{1}{c}y\right\|$$

$= c\|v - y_1\|$

这里，$y_1 = y_0 + \frac{1}{c}y \in Y$，因此，$\|v - y_1\| \geqslant a$，

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geqslant ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geqslant \frac{a}{a/\theta} = \theta$$

对于所有$y \in Y$均成立．从而，引理证毕．

由F．Riesz引理可得出下面这个十分有用的定理。

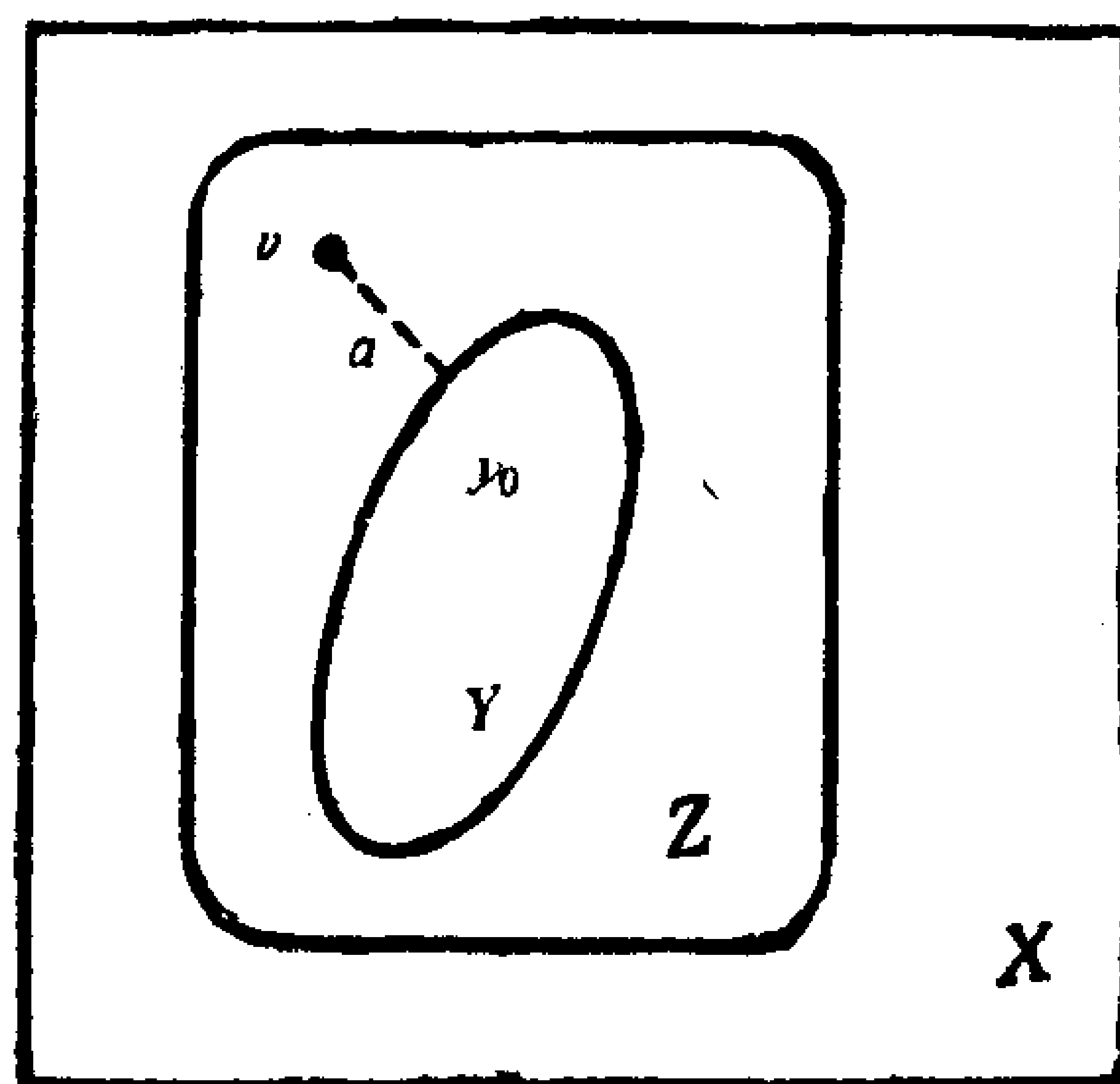


图10 Riesz引理证明图示

2.5-5 定理(有穷维数)．赋范空间X中的闭单位球$\widetilde{B} = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}$如果是紧的，则$X$是有穷维的．

证明 假定$\widetilde{B}$是紧的，$\dim X = \infty$，选$x_1 \in X$ $\|x_1\| = 1$，令由x_1生成的X的真子空间 为 X_1，根据定理2.4-3，X_1是闭的．因为$\dim X = \infty$，由F．Riesz引理，必存在$x_2 \in X$，$\|x_2\| = 1$，使得

$$\|x_2 - x_1\| \geqslant \theta = \frac{1}{2},$$

令由x_1、x_2生成的X的二维闭的真子空间为X_2，再利用F．Riesz引理，存在$x_3 \in X$，$\|x_3\| = 1$，使得对于所有$x \in X_2$，有，

$$\|x_3 - x\| \geqslant \frac{1}{2}$$

特别地，

$$\|x_3 - x_1\| \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\|x_3 - x_2\| \geqslant \frac{1}{2}$$

依此类推，可得序列$(x_n) \subset \widetilde{B}$．当$m \neq n$时，

$$\|x_m - x_n\| \geqslant \frac{1}{2}$$

因此，(x_n)不可能有收敛的子序列，这与$\widetilde{B}$是紧的矛盾，于是证得$\dim X < \infty$

紧集有些很好的属性，与连续映射有关的一个基本性质是紧集有紧的映象．

2.5-6**定理**　**(连续映射)**．设X、Y是度量空间，$T: X \to Y$是连续映射，则X的紧子集M的象$T(M)$在Y中是紧的．

证明　设(y_n)是$T(M)$中任意序列，必存在$x_n \in M$，使得，$y_n = Tx_n$，因为M是紧的，(x_n)有一个子序列(x_{n_k})在M中收敛，由于T是连续的．利用定理1.4-9，则(Tx_{n_k})是(y_n)的子序列且在$T(M)$中收敛．故$T(M)$是紧的．

分析中，闭区间上的连续函数取得最大、最小值这一性质可以移植到度量空间的紧集上．

2.5-7　**推论(最小值和最大值)**．设X是度量空间，M是X的紧子集，$T: M \to R$是连续映射，则T在M上取得最小、最大值．

证明．根据定理2.5-6，$T(M)$是R中的紧集，由引理

2.5-2，$T(M)$是有界闭集．因此，$\inf T(M)$、$\sup T(M)$存在且$\inf T(M)\in T(M)$，$\sup T(M)\in T(M)$，即存在$x_1\in M$，$x_2\in M$，使得，$\inf T(M)=Tx_1$，$\sup T(M)=Tx_2$．于是证得Tx在x_1、x_2处分别取最小、最大值．

习 题 2.5

1.证明R^n和C^n不是紧空间．

2.证明由无穷多个点组成的离散度量空间（参看1.1-2中例5）X不是紧空间．

3.在R^2平面上，举出紧和非紧曲线的例子．

4.证明序列空间S中的无穷子集M为紧的必要条件是：存在数v_1，v_2，…，使得对于所有$x=(\xi_K(x))\in M$，有$|\xi_K(x)|\leqslant v_K$（可以证明此条件也是M为紧的充分条件．）

5.（局部紧）如果度量空间X的每个点都有一个紧邻域，则称X是局部紧的．证明R、C、R^n、C^n均是局部紧空间．

6.证明紧度量空间是局部紧的．

7.在Riesz引理2.5-4中，若$\dim Y<\infty$，证明θ也可以选为1．

8.在习题2.4第7题中，直接证明（不用2.4-5）存在$a>0$，使得$a\|x\|_2\leqslant\|x\|$（利用2.5-7）

9.如果X是紧度量空间，M是X的闭子集，证明M是紧的．

10.设X、Y是度量空间，X是紧的，$T:X\to Y$是连续的双射，证明T是一同胚（习题1.6第5题）

§2.6 线 性 算 子

在微积分中，我们曾研究过实直线R上（或R的子集上）的实值函数，这样的函数是从它的定义域到R中的映射．在泛函分析中，我们要研究一般空间之间的映射．

向量空间到向量空间的映射称做算子。其中我们特别感兴趣的是保留向量空间两种代数运算的算子，这就是本节所要讨论的线性算子.

2.6-1　**定义（线性算子）** 设X、Y是同一数域K上的两个向量空间，如果算子T满足：

(i) T的定义域$D(T)$是X的向量子空间，T的值域$R(T)$包含在Y中.

(ii) 对于所有x，$y\in D(T)$，任意$\alpha\in K$，有，

$$
\begin{aligned}
&T(x+y)=Tx+Ty\\
&T(\alpha x)=\alpha Tx
\end{aligned}
\tag{1}
$$

成立，则称T是线性算子.

公式(1) 表明线性算子T是从一个向量空间（T的定义域）到另一个向量空间中的同态．即T在下述意义下保留了向量空间的两个运算，先在(1) 的左边作向量空间的运算（加法和数乘）然后将所得向量映射到Y中．而在右边，先将向量x、y映射到Y中，后在Y中作向量运算其结果相等，这一性质非常重要.

公式(1) 等价于，

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \quad x,y\in D(T),\ \alpha,\ \beta\in K \tag{2}$$

我们给出线性算子的例子，算子的线性性质留给读者验证.

2.6-2　**恒等算子**．设X是向量空间，称映射

$$I: x\longmapsto x$$

是X上的**恒等算子**．I是线性算子.

2.6-3　**零算子**．设X是向量空间，称映射

$$0: x \longmapsto \theta$$

是**零算子**，零算子是线性算子.

2.6-4 **微分算子**. 设$P[a, b]$是$[a, b]$上所有多项式组成的向量空间. 微分算子

$$T: x(t) \longmapsto \frac{dx}{dt}$$

是$P[a, b]$上的一个线性算子.

2.6-5 **积分**. 通过

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau \qquad t \in [a, b]$$

定义一个从$C[a, b]$到自身中的线性算子T.

2.6-6 **用t作的乘法**. 通过

$$Tx(t) = tx(t)$$

定义的算子T：$C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$是线性的.

2.6-7 **R^3上的叉积和点积**. 设$a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$是$R^3$中一固定向量，对任一向量$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，由

$$T_1 x = a \cdot x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$$

$$T_2 x = a \times x$$

定义的算子$T_1: R^3 \longrightarrow R$和算子$T_2: R^3 \longrightarrow R^3$都是线性算子.

2.6-8 **矩阵**. 一个r行n列矩阵$A = (\alpha_{ij})$通过

$$y = Ax, \quad x = (\xi_j) \in R^n, \quad y = (\eta_i) \in R^r$$

定义的算子$T: R^n \longrightarrow R^r$是线性算子.

现在，我们来讨论线性算子的一些性质.

首先，讨论有穷维向量空间到有穷维向量空间的线性算子与矩阵的关系.

设X、Y是同一数域K上的向量空间，且$\dim X = n$,

$\dim Y = r$，那么，

(i) 任何$r \times n$矩阵$A = (\alpha_{ij})$表示一个n维向量空间X到r维向量空间Y的线性算子.

(ii) n维向量空间X到r维向量空间Y的线性算子可用一个$r \times n$矩阵表示.

证明. (i) 在X中选定一个基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，在Y中选定一个基$\{b_1, \cdots, b_r\}$，对于$x \in X$，有，$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ 利用矩阵乘法.

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} \cdots \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

求得r个数$\eta_1, \cdots \eta_r$，定义

$$Tx = y = \sum_{i=1}^{r} \eta_i b_i = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \right) b_i$$

根据矩阵乘法的线性性，则T是X到Y的线性算子。

(ii) 设$T: X \to Y$是线性算子，$\{e_1, \cdots e_n\}$、$\{b_1, \cdots b_r\}$分别是X，Y的一个固定基（其顺序也是固定的）则，

$Te_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} b_i$，对$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$，$Tx = y = \sum_{i=1}^{r} \eta_i b_i$，

由

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \xi_j Te_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \right) b_i$$

得，$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j \quad i=1,2\cdots r$. 即$T$可用$A=(\alpha_{ij})$表示

在(1)中取$\alpha=0$，得出线性算子的第二个性质：$T\theta=\theta$
但一般地，$Tx=\theta$不一定有$x=\theta$.

$$N(T)=\{x \mid Tx=\theta,\ x\in D(T)\}.$$

称为线性算子T的零空间.

线性算子的另一个性质是其值域和零空间都是向量空间.

2.6-9 定理（值域和零空间）. 设T是线性算子，那么，

(a) 值域$R(T)$是向量空间.

(b) 若$\dim D(T)=n<\infty$，则，
$\dim R(T)\leqslant n$.

(c) 零空间$N(T)$是向量空间.

证明. (a) 任取y_1, $y_2\in R(T)$, α, $\beta\in K$，存在x_1, $x^2\in D(T)$，使得，$y_1=Tx_1$, $y_2=Tx_2$，由于$D(T)$是向量空间，得，$\alpha x_1+\beta x_2\in D(T)$，于是$T(\alpha x_1+\beta x_2)\in R(T)$.
因为T是线性的，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\alpha y_1+\beta y_2$$

因此，$\alpha y_1+\beta y_2\in R(T)$. 这就证明了$R(T)$是向量空间.

(b) 任取$R(T)$中$n+1$个向量y_1, …, y_{n+1}, $D(T)$中存在x_1, …, x_{n+1}，使得 $y_1=Tx_1$, …, $y_{n+1}=Tx_{n+1}$，由于$\dim D(T)=n$，集$\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$必线性相关，因此，存在不全为零的数α_1, …, α_{n+1}，使得

$$\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1}=\theta$$

由于T是线性的，且$T\theta=\theta$，有

$$T(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_{n+1}\ x_{n+1}\ )=\alpha_1 y_1+\cdots+$$
$$\alpha_{n+1}\ y_{n+1}\ =\theta$$

即，$\{y_1,\ \cdots,\ y_{n+1}\}$是线性相关的，根据定义，

$$\dim R(T)\leqslant n.$$

(c) 任取$x_1, x_2\in N(T)$，则，$Tx_1=\theta$，$Tx_2=\theta$. 对于任何数α，β，因为T是线性的，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\theta \tag{3}$$

即，$\alpha x_1+\beta x_2\in N(T)$. 因此，$N(T)$是向量空间

下面我们来研究线性算子的逆，如果线性算子T：$D(T)\to Y$对于任意x_1，$x_2\in D(T)$，有

$$x_1\neq x_2\quad 蕴涵\quad Tx_1\neq Tx_2 \tag{4}$$

则称T是单射的或称一对一的.

显然(4)等价于

$$Tx_1=Tx_2\quad 蕴涵\quad x_1=x_2 \tag{4*}$$

此时T的逆算子

$$T^{-1}:R(T)\to D(T) \tag{5}$$

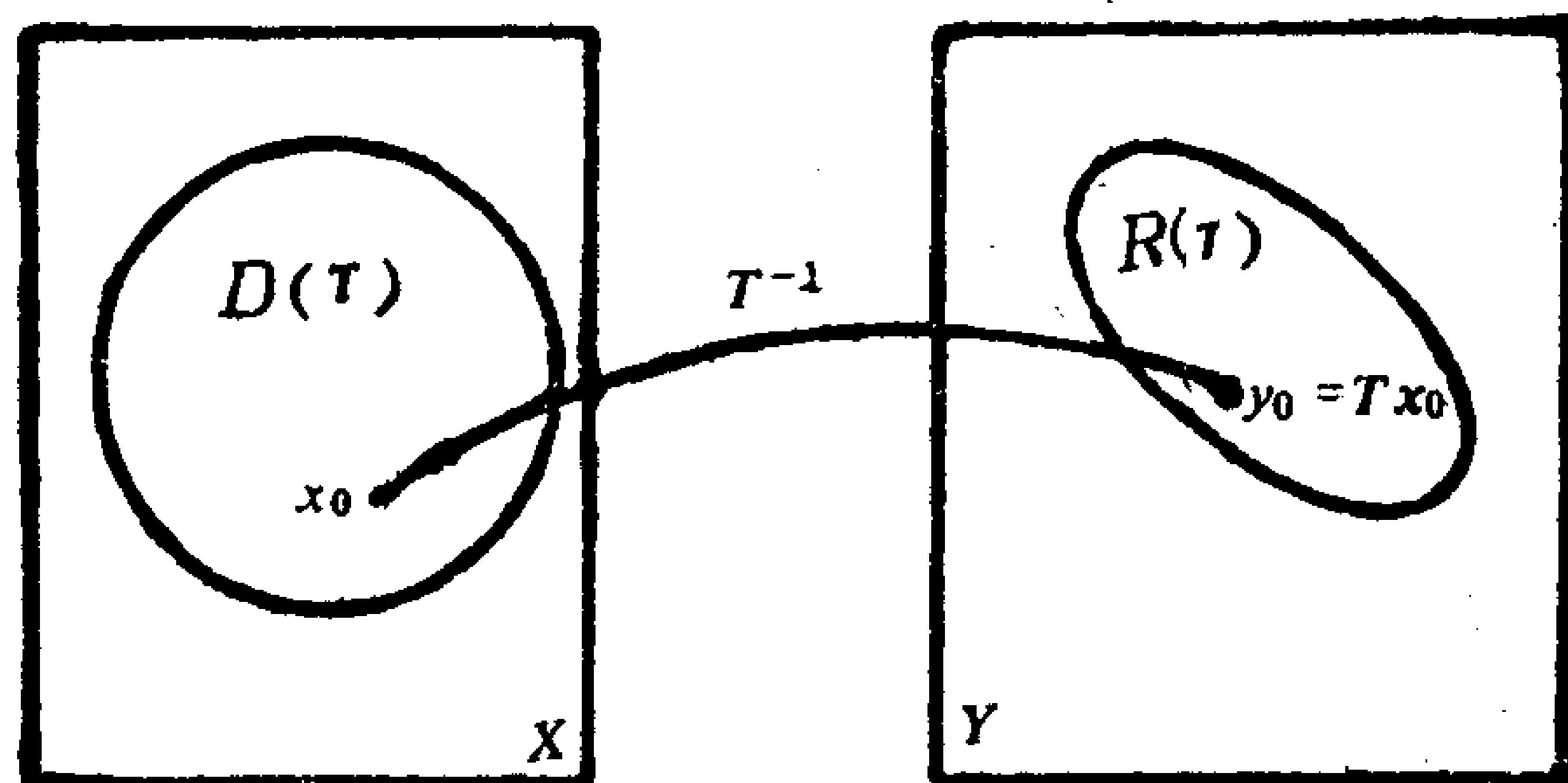


图11 (5) 中逆映射的表示

$$y \longmapsto x \qquad Tx = y$$

存在.

由(5)得,

$$T^{-1}Tx = x, \qquad 对于每个 x \in D(T)$$

$$TT^{-1}y = y \qquad 对于每个 y \in R(T).$$

对于向量空间的线性算子，其逆存在的充要条件是零空间仅由零向量组成.

2.6-10 **定理（逆算子）**. 设X、Y是同一数域K上的向量空间. $T:D(T)\to Y$是线性算子，其值域$R(T)$包含在Y中，定义域$D(T)\subset X$，那么,

(a) $T^{-1}:R(T)\to D(T)$存在的充要条件是

$Tx=\theta$ 蕴涵 $x=\theta$.

(b) 若T^{-1}存在，则T^{-1}是线性的.

(c) 若$\dim D(T)=n<\infty$. T^{-1}存在，则,

$$\dim R(T) = \dim D(T)$$

证明 (a) 假设$Tx=\theta$蕴涵$x=\theta$，设，$Tx_1=Tx_2$，由于T是线性的，有

$$T(x_1-x_2) = Tx_1 - Tx_2 = \theta$$

由假设知，$x_1-x_2=\theta$，即$x_1=x_2$，因此,

$Tx_1=Tx_2$蕴涵$x_1=x_2$，由(4*)知T^{-1}存在. 反之，若T^{-1}存在，则(4*)成立，在(4*)中令$x_2=\theta$ 得，$Tx_1=\theta$ 蕴涵$x_1=\theta$. 因此(a)得证.

(b) 假定T^{-1}存在，任取y_1，$y_2\in R(T)$. 则存在x_1，$x_2\in D(T)$，使得，$y_1=Tx_1$，$y=Tx_2$. 于是，$x_1=T^{-1}y_1$，$x_2=T^{-1}y_2$，对于任意数α，β. 由于T是线性的，有,

$$\alpha y_1+\beta y_2 = \alpha Tx_1+\beta Tx_2 = T(\alpha x_1+\beta x_2)$$

因此，

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

又T^{-1}的定义域$D(T^{-1})=R(T)$是向量空间[根据定理2.6-9(*a*)]，故证得T^{-1}是线性算子.

(*c*) 由定理2.6-9(*b*)，有，$\dim R(T)\leqslant\dim D(T)$，对于$T^{-1}$，有$\dim R(T^{-1})\leqslant\dim D(T^{-1})$，而$\dim R(T^{-1})=\dim D(T)$，$\dim D(T^{-1})=\dim R(T)$. 因此，证得，$\dim R(T)=\dim D(T)$.

最后，我们给出线性算子乘积的逆的公式.

2.6-11 **定理（算子乘积的逆）**. 设X、Y、Z是向量空间，$T:X\to Y$和$S:Y\to Z$是双射线性算子，那么，乘积ST的逆$(ST)^{-1}$存在，且，(6)

$$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$$

证明. 由于T、S都是双射线性算子，则T^{-1}，S^{-1}，均存在，且ST也是双射的，于是$(ST)^{-1}$存在，

$$ST(ST)^{-1}=I_Z$$

这里，I_Z是空间Z上的恒等算子.

因此. 得，

$$S^{-1}ST(ST)^{-1}=S^{-1}I_Z=S^{-1}，$$ 由

$$S^{-1}S=I_Y$$

有，$$T(ST)^{-1}=S^{-1}$$

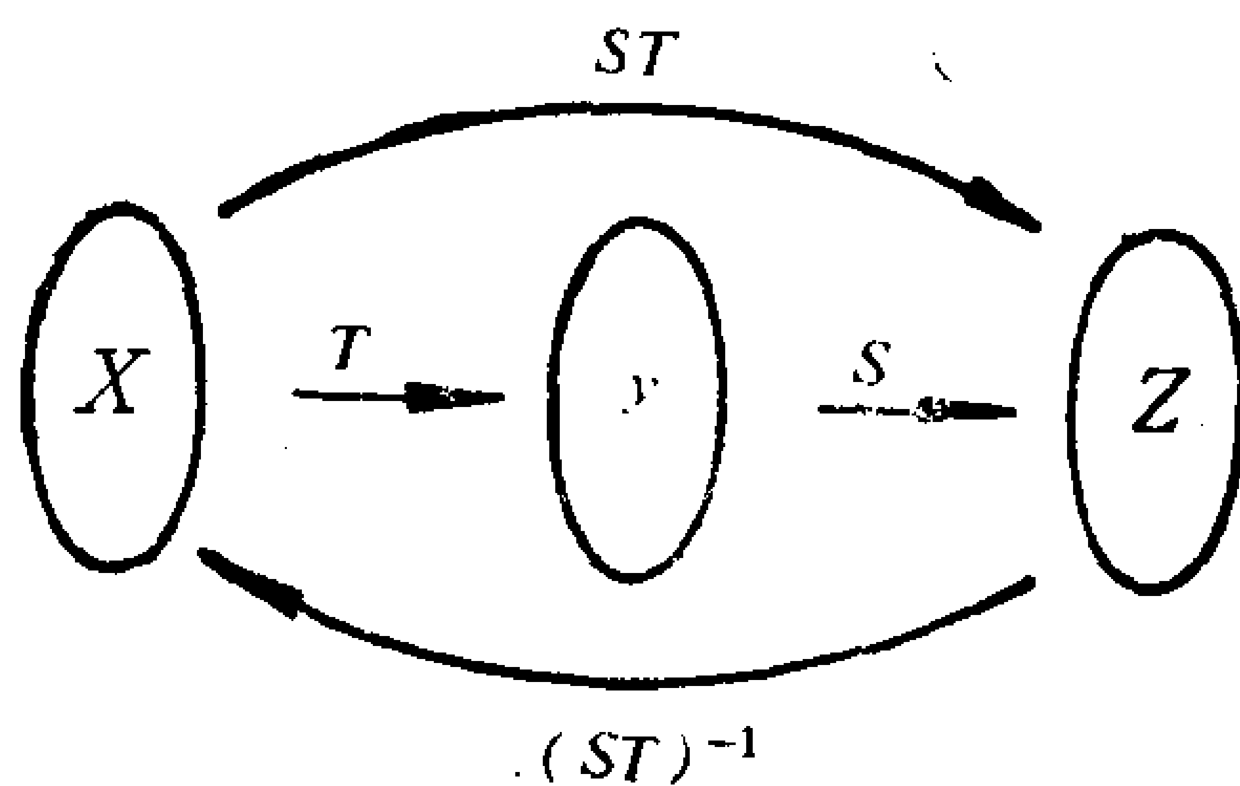


图12 定理2.6-11的图示

再将T^{-1}左乘上式两边，利用$T^{-1}T=I_X$，从而证得，

$$T^{-1}T(ST)^{-1}=(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$$

习 题 2.6

1．验证2.6-2，2.6-3和2.6-4中的算子均是线性的。

2．证明，分别由

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, 0)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (0, \xi_2)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (r\xi_1, r\xi_2)$$

定义的从R^2到R^2中的算子T_1，…，T_4均是线性的，并从几何上解释这些算子．

3．指出习题2中的T_1、T_2、T_3的定义域、值域和零空间都是什么？

4．分别指出习题2中的T_4，2.6-4中的T，2.6-7中的T_1和T_2的零空间都是什么？

5．设V、W分别是向量空间X、Y的向量子空间，$T:X\to Y$是线性算子，证明$T(V)$和$T^{-1}(W)$均是向量空间．

6．若两个线性算子的积存在，证明它是线性的．

7．（可交换性）设X是向量空间，$S:X\to X$，$T:X\to X$是任意算子，若$ST=TS$，则称S和T是可交换的．试问习题2中的T_1和T_3可交换吗？

8．用2行2列的方阵表示习题2中的各算子．

9．在2.6-8中，用分量形式写出$y=Ax$，并证明T是线性的．

10．设X是由所有2×2阶的复矩阵组成的向量空间，$b\in X$是一固定矩阵，用乘积$Tx=bx$定义$T:X\to X$，证明T是线性的，T^{-1}在什么条件下存在？

11．2.6-4中的T^{-1}存在吗？

12．设$T:D(T)\to Y$是线性算子，其逆存在，如果$\{x, \cdots, x_n\}$是$D(T)$中的线性无关集，证明$\{Tx_1, \cdots, Tx_n\}$也是线性无

关的．

13．设$T: X\to Y$是线性算子，并且，$\dim X=\dim Y=n<\infty$，证明$R(T)=Y$的充要条件是T^{-1}存在．

14．设X是R上处处具有所有阶导数的实值函数构成的向量空间，用$y=Tx=x'(t)$，定义$T: X\to X$，证明$R(T)=X$，但T^{-1}不存在．对照习题13解释之．

§2.7 有界线性算子

前一节介绍的算子，只与空间的代数运算有关，现在，我们考虑算子与范数的联系．

2.7-1 定义(有界线性算子) 设X、Y是同一数域K上的赋范空间，T：$D(T)\to Y$是线性算子，$D(T)\subset X$．如果存在常数$c>0$，使得对于一切$x\in D(T)$，有，

$$\|Tx\|_Y\leqslant c\|x\|_X \tag{1}$$

或简记为，$\|Tx\|\leqslant c\|x\|$．

那么，称T是有界线性算子．否则称T为无界算子．

值得注意的是有界算子的定义与微积分中函数有界的定义是不一致的．微积分中，有界函数是指值域有界而言．这里的有界线性算子是指$D(T)$中的有界集其象在Y中亦为有界集的那种算子．例如，$f(x)=x$是R到R的有界线性算子，但不是R上的有界函数．

由(1)式，有$\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c$．$(x\neq\theta)$因此，数集

$\left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\middle| x\in D(T)，x\neq 0\right\}$存在上确界，且，

$\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}<+\infty$，将此数定义成$T$的范数，即

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in D(T)\\x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2}$$

如果$D(T)=\{\theta\}$，我们定义$\|T\|=0$，此时，$T=0$.

由(2)得，$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant\|T\|$，从而，有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\| \qquad x\in D(T) \tag{3}$$

对于x，$y\in D(T)$，利用下列不等式，

$$\|T\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\geqslant\sup_{\substack{x\neq\theta\\\|x\|\leqslant 1}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\geqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\geqslant$$

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{y\neq\theta}\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\|=\|T\|.$$

从而，得

$$\|T\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \tag{4}$$

2.7-2 恒等算子. 赋范空间$X\neq\{\theta\}$上的恒等算子I: $X\to X$是有界算子且易证$\|I\|=1$.

2.7-3 零算子. 赋范空间X上的零算子0是有界的且范数$\|0\|=0$.

2.7-4 积分算子. 通过

$$y(t)=Tx=\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

定义一积分算子$T:\dot{C}[0,1]\longrightarrow \dot{C}[0,1]$. 这里的$K(t,\tau)$是定义在$G=J\times J$上的连续函数，$J=[0,1]$. 由于$K(t,\tau)$在闭域$G$上连续，则它有界，即存在常数$k_0$，使得对一切$(t,\tau)\in G$，有

$$|K(t,\tau)|\leqslant k_0.$$

又 $$|x(t)|\leqslant \max_{t\in J}|x(t)|=\|x\|.$$

因此，

$$\|Tx\|=\max_{t\in J}\left|\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau\right|$$

$$\leqslant \max_{t\in J}\int_0^1 |K(t,\tau)|\,\|x(\tau)\|d\tau$$

$$\leqslant k_0\|x\|.$$

从而，T是有界的.

2.7-5 矩阵. r行n列实矩阵$A=(\alpha_{jk})$通过，

$$y=Ax \qquad x=(\xi_j)\in R^n,\quad y=(\eta_j)\in R^r \tag{5}$$

定义一算子$T:R^n\to R^r$. 下面证明T有界.

R^n上的范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{1/2}$$

用分量形式表示(5)，得，

$$\eta_j=\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\xi_k \tag{5'}$$

利用Cauchy-Schwarz不等式，有，

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^r \eta_j^2=\sum_{j=1}^k\left(\sum_{k=1}^r \alpha_{jk}\xi_k\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^r\left[\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{2}\right)\|x\|^{2}$$

令，$C^{2}=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{2}$，则，$\|Tx\|\leqslant C\|x\|$．证毕．

不是所有线性算子都是有界的，今举一个无界的线性算子．

2.7-6 **微分算子**．设$P[0,1]$是$[0,1]$上所有多项式(包括0)构成的赋范空间，其范数为

$$\|x\|=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$$

通过，

$$Tx(t)=x'(t)$$

在$P[0,1]$上定义的微分算子是线性的，但不是有界的．事实上，选$x_n(t)=t^n$，则，$\|x_n\|=1$，且

$$Tx_n(t)=x'_n(t)=nt^{n-1}$$

于是，$\|Tx_n\|=n$，$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}=n$，这说明不存在固定的正数$c$，

使得，$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}\leqslant c$．故$T$无界．

有界线性算子有下面一些性质．

2.7-7 **定理**．设X，Y是赋范空间，T：$D(T)\rightarrow Y$是线性算子，这里$D(T)\subset X$．那么，T为有界的充要条件是T将$D(T)$中的每一个有界集映成Y中的有界集．

证明 必要性，设$B\subset D(T)$是有界集，即存在常数$K>0$，对于任意$x\in B$．有，$\|x\|\leqslant K$．由于T有界，有常数$c>0$，使得对于每一个$x\in B$，下式成立．

$$\|Tx\| \leqslant c\|x\| \leqslant cK$$

故，$T(B)$有界.

充分性. 假设T将$D(T)$中的每一个有界集映成Y中的有界集. 由于单位球面

$$S = \{x \mid \|x\| = 1, \ x \in D(T)\}$$

是$D(T)$中的有界集，因此，有，

$$\|Tx\| \leqslant c \qquad 任意x \in S.$$

这里的c为常数. 从而对于任意$x \in D(T)$，$x \neq \theta$

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant c.$$

成立. 由于T是线性的，于是

$$\|Tx\| \leqslant c\|x\|$$

对于$x = \theta$此式也成立. 因而，T有界.

2.7-8 **定理(有穷维数)**. 如果赋范空间X是有穷维的，则X上的每一个线性算子均是有界的.

证明. 设T是X上的任意一个线性算子，$\dim X = n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基，对于任意$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$，由于$T$是线性的，有，

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j Te_j\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \, \|Te_j\|$$

$$\leqslant \max_K \|Te_K\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$$

根据引理2.4-1，存在常数$c > 0$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leqslant \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right\| = \frac{1}{c}\|x\|$$

因此，

$$\|Tx\| \leqslant K\|x\| \qquad K = \frac{1}{c}\max_{K}\|Te_K\|$$

故T是有界的.

2.7-9 定理（连续性）. 设X，Y是赋范空间，T是$D(T)\subset X$到Y的线性算子，如果T在某一点$x_0\in D(T)$连续，则T在$D(T)$上是连续的.

证明　对于任意$x\in D(T)$，若$x_n\in D(T)$，$x_n\to x$，那么，$x_n-x\to\theta$，　$x_0+(x_n-x)\to x_0$．由于T在x_0连续，于是，

$\|T[x_0+(x_n-x)]-Tx_0\|\to 0$，因为$T$为线性，即有$\|T(x_n-x)\|=\|Tx_n-Tx\|\to 0$，从而证得，

$x_n\to x$蕴涵$Tx_n\to Tx$，根据定理1.4-9，T在x点连续，由于$x\in D(T)$是任意的．因此，T是连续的.

2.7-10 定理（连续性与有界性）．设X，Y是赋范空间，T是$D(T)\subset X$到Y的线[illegible]则T为连续的充要条件是T有界.

证明　必要性．假设T在$D(T)$上连续，那么，T在$\theta\in D(T)$是连续的．因此对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得满足$\|x-\theta\|=\|x\|<\delta$的所有$x\in D(T)$，有

$$\|Tx-T\theta\|=\|Tx\|<\varepsilon$$

任取 $y\in D(T)$，$y\neq\theta$，令 $x=\dfrac{\delta}{2\|y\|}y$ 则

$\|x\|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，由于$T$是线性的，于是

$$\|Tx-T\theta\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|y\|}y\right)\right\|=\frac{\delta}{2\|y\|}\|Ty\|<\varepsilon$$

即 $\|Ty\| \leqslant c\|y\| \qquad c=\dfrac{2\varepsilon}{\delta}$

对于$y=\theta$上述等式亦成立．故证得T有界．

充分性．设T有界，存在常数$c>0$，对于一切$x\in D(T)$，有，$\|Tx\|\leqslant c\|x\|$，任取$(x_n)\in D(T)$，$x_n\to\theta$，则$\|Tx_n\|\leqslant c\|x_n\|\to 0$．由$T\theta=\theta$，即，$\|Tx_n-T\theta\|\to 0$．因此，$T$在$\theta\in D(T)$连续，根据定理2.7-9，$T$连续．

定理2.7-10揭示了线性算子的一个重要性质——连续性和有界性是等价的．

2.7-11 **推论（零空间）**．设T是有界线性算子，则零空间$N(T)\subset D(T)$是闭的．

证明 对于每个$x\in\overline{N(T)}\subset D(T)$，根据定理1.4-7(a)．存在$(x_n)\subset N(T)$，使得$x_n\to x$，由于$T$有界，利用定理2.7-10，$T$是连续的[illegible]$Tx_n\to Tx$，又，$Tx_n=\theta$．所以，$Tx=\theta$．即，$x\in N(T)$．从而证得$N(T)$是闭的．

2.7-12 **定理（有界线性扩张）**．设X是赋范空间，Y是巴拿赫空间，T是$D(T)\subset X$到Y的有界线性算子，则T具有有界线性扩张

$$\widetilde{T}:\ \overline{D(T)}\to Y.$$

且，
$$\|\widetilde{T}\|=\|T\|.$$

证明 对于任意$x\in\overline{D(T)}$，根据定理1.4-7(a)，存在$(x_n)\subset D(T)$．使得$x_n\to x$．因为T是有界线性算子，则，

$$\|Tx_n-Tx_m\|=\|T(x_n-x_m)\|\leqslant\|T\|\,\|x_n-x_m\|$$

即，(Tx_n)是Y中的Cauchy序列，由于Y是完备的．于是存

在$y\in Y$，使得

$$Tx_n\to y.$$

我们通过

$$\widetilde{T}x=y$$

定义算子$\widetilde{T}$.

首先证明对于固定的$x\in\overline{D(T)}$，$\widetilde{T}x$有确定的意义，即$\widetilde{T}x$与$D(T)$中收敛于x的序列的选择无关. 假定$x_n\to x$，$z_n\to x$，则

$$(v_m)=(x_1,z_1,x_2,z_2,\cdots,)$$

收敛，于是(Tv_m)在Y中收敛，而且两个子序列(Tx_n)，(Tz_n)一定有相同的极限.

$\widetilde{T}$是线性的这是显然的，并且.

$$\widetilde{T}x=Tx\qquad 对于每个x\in D(T)$$

因此，$\widetilde{T}$是T的线性扩张. 下面证明$\widetilde{T}$的有界性. 由于T有界，有

$$\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\,\|x_n\|$$

因为$Tx_n\to\widetilde{T}x$，利用范数的连续性，得.

$$\|\widetilde{T}x\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\qquad\qquad x\in\overline{D(T)}.$$

从而$\widetilde{T}$是有界的. 并且，$\|\widetilde{T}\|\leqslant\|T\|$. 另一方面，算子的范数是用上确界定义的，因此，$\|T\|\leqslant\|\widetilde{T}\|$故，

$$\|\widetilde{T}\|=\|T\|.$$

前面我们讨论了有界线性算子的一般性质，下面我们考

察定义在赋范空间X上的值域包含在赋范空间Y中的有界线性算子的全体所具有的性质.

2.7-13 **定理**〔空间B(X, Y)〕. 设X, Y是数域K上的赋范空间. $B(X,Y)$是定义在全空间X上的、值域在Y中的有界线性算子全体，如果在$B(X,Y)$上定义如下的代数运算：

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x \qquad T_1,T_2\in B(X,Y),x\in X$$
$$(\alpha T)x=\alpha Tx \qquad \alpha\in K,T\in B(X,Y),\ x\in X. \tag{6}$$

并定义范数

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{7}$$

那么，$B(X,Y)$构成一赋范空间.

证明 (a)证$B(X,Y)$是向量空间，即证(6)式定义的T_1+T_2，αT均是X上的有界线性算子.

对于任意$x_1,x_2\in X$，$\alpha\in K$，有.

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(x_1+x_2)&=T_1(x_1+x_2)+T_2(x_1+x_2)\\&=T_1x_1+T_1x_2+T_2x_1+T_2x_2\\&=(T_1x_1+T_2x_1)+(T_1x_2+T_2x_2)\\&=(T_1+T_2)x_1+(T_1+T_2)x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(\alpha x_1)&=T_1(\alpha x_1)+T_2(\alpha x_1)\\&=\alpha(T_1x_1+T_2x_1)\\&=\alpha(T_1+T_2)x_1\end{aligned}$$

而且，$\|(T_1+T_2)x\|=\|T_1x+T_2x\|\leqslant(\|T_1\|+\|T_2\|)\|x\|$.

$\|(\alpha T)x\|=|\alpha|\,\|Tx\|\leqslant|\alpha|\,\|T\|\,\|x\|$

因此，$T_1+T_2\in B(X,Y)$，$\alpha T\in B(X,Y)$，故$B(X,Y)$是

向量空间.

(b) 证 $B(X,Y)$ 是赋范空间．由(a)知 $B(X,Y)$ 是向量空间，下面只须证(7)式满足范数公理.

(N1)．$\|T\|=\sup\limits_{\substack{x\in X\\x\neq0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\geqslant0$

(N2)．$\|T\|=0$，当且仅当对于每个 $x\in X$，$\|Tx\|=0$

而 $\|Tx\|=0$，$x\in X$，必须且只须 $T=0$

(N3)．$$\|\alpha T\|=\sup\limits_{\substack{x\in X\\\|x\|=1}}\|(\alpha T)x\|=|\alpha|\sup\limits_{\substack{x\in X\\\|x\|=1}}\|Tx\|$$
$$=|\alpha|\ \|T\|.$$

(N4)．$$\|T_1+T_2\|=\sup\limits_{\substack{x\in X\\\|x\|=1}}\|(T_1+T_2)x\|$$
$$\leqslant\sup\limits_{\substack{x\in X\\\|x\|=1}}\|T_1x\|+\sup\limits_{\substack{x\in X\\\|x\|=1}}\|T_2x\|$$
$$=\|T_1\|+\|T_2\|$$

因此，$B(X,Y)$ 是赋范空间.

2.7-14 **定理（完备性）**．如果 Y 是Banach空间，则，$B(X,Y)$ 亦是一Banach空间.

证明　设 (T_n) 是 $B(X,\ Y)$ 中任意Cauchy序列，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$．使得

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon\qquad(m,n>N)$$

因此，对于任意给定的 $x\in X$ 及 $\tilde{\varepsilon}>0$，取 $\varepsilon=\frac{\tilde{\varepsilon}}{\|x\|}$（这里假设 $x\neq0$），有

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\ \|x\|$$
$$<\varepsilon\|x\|=\tilde{\varepsilon}\qquad(m,n>N)\ (8)$$

对于$x=\theta$，(8) 式亦成立．即$(T_n x)$是Y中的Cauchy序列．由于Y完备，所以，$T_n x\to y\in Y$，y是由x确定的，这就定义了一个算子$T:X\to Y$，

$$y=Tx=\lim_{x\to\infty}T_n x \qquad x\in X.$$

因为T_n是线性的，有

$$\begin{aligned}T(\alpha x_1+\beta x_2)&=\lim_{n\to\infty}T_n(\alpha x_1+\beta x_2)\\&=\alpha\lim_{n\to\infty}T_n x_1+\beta\lim_{n\to\infty}T_n x_2\\&=\alpha Tx_1+\beta Tx_2\end{aligned}$$

即，T是线性算子．

在(8) 中令$m\to\infty$，利用范数的连续性得，

$$\|T_n x-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\| \qquad n>N,\ x\in X. \quad (9)$$

因此，当$n>N$时，(T_n-T)是有界线性算子，由于T_n有界，$B(X,Y)$是向量空间，所以，$T=T_n-(T_n-T)$有界，即，$T\in B(X,Y)$．由(9) 可得

$$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon \qquad (n>N)$$

故$T_n\to T$（按范数收敛）

习 题 2.7

1．证明通过 $(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)\mapsto(\zeta_1/1,\zeta_2/2,\cdots,\zeta_n/n,\cdots)$ 定义的算子$T:l^\infty\to l^\infty$是线性有界的．

2．证明有界线性算子$T:X\to Y$的值域$R(T)$在Y中不一定是闭的．(提示：利用习题1中的T)

3．设T是从赋范空间X到赋范空间Y上的有界线性算子，如果存在正数b，使得，对于所有$x\in X$有：$\|Tx\|\geqslant b\|x\|$．证明T^{-1}存在并有界．

4．证明有界线性算子$T: X \to Y$的逆$T^{-1}: R(T) \to X$不一定是有界的．（利用习题1中的T）

5．设$T: C[0,1] \to C[0,1]$是通过

$$y(t) = Tx = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

定义的．求$R(T)$及T^{-1}：$R(T) \to C[0,1]$．T^{-1}是否有界．

6．在$C[0,1]$上分别由

$$T_1 x = y(s) = s\int_0^1 x(\tau)d\tau$$

$$T_2 x = y(s) = s x(s)$$

定义算子T_1和T_2，T_1与T_2可以交换吗？求$\|T_1\|$、$\|T_2\|$、$\|T_1T_2\|$、$\|T_2T_1\|$．

7．设X是R上所有有界实值函数构成的赋范空间，其范数为$\|x\| = \sup_{t\in R}|x(t)|$．设$T: X \to X$是由$Tx = y(t) = x(t+\triangle)$定义的．其中$\triangle > 0$是一常数．问$T$是否线性有界．（见图13）

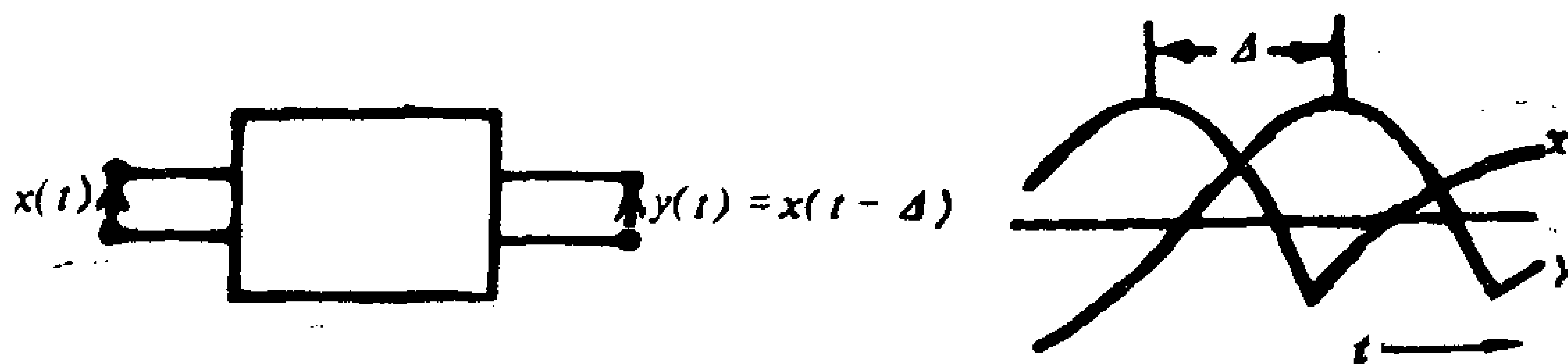


图13　电延迟线图形

8．设X是由所有n个实数有序组所组成的向量空间，Y是由r个实数的有序组全体构成的向量空间．$r\times n$矩阵$A=(a_{ij})$定义一个从X到Y中的线性算子，设Z是所有$r\times n$实矩阵所成的向量空间．$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$分别是Z、X、Y上的范数，

如果，$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|\,\|x\|_1$

则称$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$相容，证明由

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

定义的范数$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$相容，这个范数叫做由$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$定义的自然范数，若取$\|x\|_1=\max_j|\xi_j|$，$\|y\|_2=\max_j|\eta_j|$，试证自然范数为

$$\|A\|=\max_j\sum_{k=1}^n|\alpha_{jk}|$$

9．证明在2.7-5中，$r=n$时，由

$$\|A\|=\left(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\alpha_{jk}\right)^{1/2}$$

定义一相容范数，但对于$n>1$这不是由R^n上的Euclidean范数定义的自然范数．

10．如果在习题8中，选，

$$\|x\|_1=\sum_{j=1}^n|\xi_j|\qquad\|y\|_2=\sum_{k=1}^r|\eta_k|$$

$$\|A\|=\max_k\sum_{j=1}^r|\alpha_{jk}|$$

证明$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$相容．

11．证明在习题10中，当$n=r$时，$\|\cdot\|$是由$\|\cdot\|_1$及$\|\cdot\|_2$定义的自然范数．

12．确定由$\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&1&0\end{pmatrix}$表示的算子$T:R^3\to R^2$的零空间．

13．设$T:R^3\to R^3$是通过$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mapsto(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2)$定义的算子，求$R(T)$、$N(T)$及表示$T$的矩阵．

14．向量空间$B(X,Y)$的零元素是什么？$T\in B(X,Y)$的负元素是什么？

15．设X,Y是赋范空间，$T_n:X\to Y$ $(n=1,2\cdots)$是有界线性算子．证明如果$T_n\to T$，则对每一个$\varepsilon>0$，存在N，使得对于所有$n>N$及任何给定闭球中的一切x，有，$\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$．

§2.8 有界线性泛函与对偶空间

泛函是值域位于实数域或复数域的算子，经常用小写字母f、g、h，等表示，$f(x)$表示f在点x的值.

本节要讨论的是有界线性泛函.

2.8-1 定义(线性泛函). 从向量空间X的子空间$D(f)$到X的数域K的线性算子f称做线性泛函. $D(f)$称做f的定义域. f的值域记作$R(f)=\{f(x)|x\in D(T)\}$.

2.8-2 定义（有界线性泛函）. 设X是数域K上的赋范空间，f是从$D(T)\subset X$到K的线性算子，如果存在一个常数$C>0$，使得对于所有$x\in D(T)$有，

$$|f(x)|\leqslant C\|x\| \tag{1}$$

则称f是有界线性泛函.

$f: D(f)\to K$的范数定义为，

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ x=1}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|=1}}|f(x)| \tag{2}$$

由(2) 可得，

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\| \quad 对所有x\in D(T). \tag{3}$$

2.8-3 空间R^3中的点积. 设$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^3$是一固定向量，通过

$$f(x)=\alpha\cdot x=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3, x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R_3$$

定义一泛函$f: R^3\to R$，则f是有界线性泛函，且，$\|f\|=\|\alpha\|$.

证明 f为线性的这是显而易见的. 下面证f是有界的. 由Cauchy-schwarz不等式，有

$$|f(x)| = |\alpha\cdot x|\leqslant\|\alpha\|\|x\|$$

因此，f是有界的，且，$\|f\|\leqslant\|a\|$．另一方面，当$x=a$时（假定$a\neq\theta$，若$a=\theta$时，$f=0$）得

$$\|f\|\geqslant\frac{|f(a)|}{\|a\|}=\frac{\|a\|^2}{\|a\|}=\|a\|.$$

从而证得，$\|f\|=\|\alpha\|$．

2.8-4　**定积分**．在空间$C[a,b]$上通过定积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt$$

定义的泛函$f:C[a,b]\to R$是线性有界的，且，$\|f\|=b-a$．

证明　显然，f是线性的．只证有界性，

由于，
$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)dt\right|\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$$
$$=(b-a)\|x\|.$$

因此，f有界且，$\|f\|\leqslant b-a$，另外，取$x_0=1$

那么，$\|x_0\|=1$，$\|f\|\geqslant|f(x_0)|=\int_a^b dt=b-a$，从而，

$\|f\|=b-a$．

2.8-5　**空间**$C[a,b]$．选固定的$t_0\in J=[a,b]$，由

$$f_1(x)=x(t_0)\qquad\qquad x(t)\in C[a,b]$$

定义的泛函$f_1:C[a,b]\to R$是线性、有界的，且f_1的范数为$\|f_1\|=1$．

证明　显然f_1是线性的．只证f_1有界，由

$$|f_1(x)|=|x(t_0)|\leqslant\|x\|\qquad 对于每个\ x\in C[a,b]$$

知f_1有界且$\|f_1\|\leqslant 1$．另一方面，取$x_0=1$，得$\|x_0\|=1$，$\|f_1\|\geqslant|f_1(x_0)|=1$，因此，$\|f_1\|=1$．

2.8-6　**空间**l^2．取一固定的$\alpha=(\alpha_j)\in l^2$，由

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i \qquad x=(\xi_i)\in l^2$$

定义的泛函$f: l^2\to C$是线性、有界的，且$\|f\|=\|\alpha\|$.

证明 由Cauchy-Schwarz不等式可得级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$绝对收敛，又$l^2$完备．所以此级数收敛，即$f$是$l^2$上的一泛函．线性是显然的，下面证$f$是有界的．再利用一次Cauchy-Schwarz不等式，得，

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i\xi_i|$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_i|^2}=\|\alpha\|\,\|x\|$$

从而，f有界且，$\|f\|\leqslant\|\alpha\|$.

另一方面，取$x=\overline{\alpha}=(\overline{\alpha_i})\in l^2$（假定$\alpha\neq\theta$，若$\alpha=\theta$，则$f=0$），于是，$\|f\|\geqslant\dfrac{|f(\overline{\alpha})|}{\|\overline{\alpha}\|}=\dfrac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|}=\|\alpha\|$ 因此证得

$\|f\|=\|\alpha\|$.

以上各泛函均是线性的，下面举一个非线性泛函的例子．

2.8-7 范数．赋范空间$(X,\|\cdot\|)$上的范数$\|\cdot\|$是X上的一个非线性泛函．

有界线性泛函是有界线性算子，因此前面介绍的有界线性算子的性质对有界线性泛函来说亦成立．

2.8-8 定理（连续性与有界性）．定义域$D(f)$在赋范空间X中的线性泛函f为连续的充要条件是f有界．此外，线性泛函f在$D(f)$中某一点连续，则f在$D(f)$上连续．

定义在向量空间X上的线性泛函全体，按如下代数运算

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \tag{4}$$

构成一向量空间，称做X的代数对偶空间，记作X'，X'的代数对偶空间X''称做X的第二代数对偶空间．今考察X与X''之间的关系．

对于每个固定的$x\in X$，由

$$g(f)=g_x(f)=f(x) \tag{5}$$

得到一个定义在X'上的泛函g_x．g_x是线性的．事实上，对于任何$f_1,f_2\in X'$及任意数α、β，有

$$\begin{aligned} g_x(\alpha f_1+\beta f_2)&=(\alpha f_1+\beta f_2)(x)\\ &=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\\ &=\alpha g_x(f_1)+\beta g_x(f_2) \end{aligned}$$

因此，$g_x\in X''$．定义映射

$$C:X\rightarrow X''$$
$$x\longmapsto g_x$$

C称做X到X''中的标准映射（也称为X到X''中的标准嵌入）．

C的定义域X是向量空间，并且，

$$\begin{aligned} [C(\alpha x+\beta y)](f)&=g_{\alpha x+\beta y}(f)\\ &=f(\alpha x+\beta y)\\ &=\alpha f(x)+\beta f(y)\\ &=\alpha g_x(f)+\beta g_y(f)\\ &=\alpha(Cx)(f)+\beta(Cy)(f) \end{aligned}$$

从而，C是线性映射．

如果C是双射，则X与$R(c)=X''$是同构的向量空间.此时称X是代数自反空间.

设X是n维向量空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的一个基，利用§2.6中有穷维向量空间上线性算子与矩阵的关系(i)与(ii)，X上的每个线性泛函f确定一个$1\times n$矩阵$(f(e_1),\cdots f(e_n))$，反之，每个$1\times n$矩阵$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，由

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j \qquad x=\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j,\ f(e_j)=\alpha_j \tag{6}$$

定义X上一线性泛函f.

特别由下列n个$1\times n$矩阵

$(1,0,0,\cdots,0,0)$

$(0,1,0,\cdots,0,0)$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

$(0,0,0,\cdots,0,1)$

定义n个线性泛函$f_1,\cdots,f_n$，f_k在e_j处具有值

$$f_k(e_j)=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases} \tag{7}$$

$\{f_1,\cdots,f_n\}$称为X基$\{e_1,\cdots,e_n\}$的对偶基.

2.8-9 **定理(X'的维数)**. 设X是n维向量空间$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的一个基. 那么由(7)确定的$\{f_1,\cdots,f_n\}$是X的代数对偶空间X'的一个基. 且$\dim X'=\dim X=n$

证明 设

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_kf_k(x)=0 \qquad 对于每个x\in X \tag{8}$$

取$x=e_j$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(e_j)=\beta_j=0. \qquad j=1,2\cdots n$$

因此，集$F=\{f_1,\cdots,f_n\}$线性无关.

对于每个$f\in X'$，记$f(e_j)=\alpha_j$，则有，

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\alpha_j, \quad 每个x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\in X$$

根据(7)，$f_j(x)=f_j(\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n)=\xi_j$

从而，$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j(x)$，对于每个$x\in X$.

即X上的每个线性泛函f可唯一地表示成$f_1,\cdots,f_n$的线性组合，于是证得$\{f_1,\cdots,f_n\}$是X'的一个基，且$\dim X'=\dim X=n$.

2.8-10 **引理（零向量）**. 设X是n维向量空间，$x_0\in X$，如果对于所有$f\in X'$，有$f(x_0)=0$，则，$x_0=\theta$.

证明 设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是X的一个基，$x_0=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^0 e_j$ 根据假定，对于每个$f\in X'$，有

$$f(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^0 f(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^0\alpha_j=0$$

今取用$(\overline{\xi_1^0},\cdots,\overline{\xi_n^0})$通过(6)定义的泛函$f_0$代入上式，于是得$\xi_j^0=0, j=1,2,\cdots,n$. 即$x_0=\theta$.

2.8-11 **定理（代数自反性）** 有穷维向量空间X是代数自反的.

证明 首先标准映射C：$X\to X''$是线性的．设$Cx_0=0$，则对于所有$f\in X'$，有

$$(Cx_0)(f)=g_{x_0}(f)=f(x_0)=0$$

由引理2.8-10知，$x_0=\theta$. 因此C是一对一的映射，C^{-1}：

$R(C)\to X$存在．根据定理2.6-10，$\dim R(C)=\dim X$．由定理2.8-9得，

$$\dim X''=\dim X'=\dim X$$

从而，$\dim R(C)=\dim X''$．因为$R(C)$是X''的向量子空间，从定理2.1-5知$R(C)$不是X''的真子空间，因此，$R(C)=X''$，即证得X是代数自反空间．

现在我们讨论赋范空间X上有界线性泛函全体构成的赋范空间．

2.8-12　**定义（对偶空间）**．设X是赋范空间，X上有界线性泛函全体按代数运算(4)以及(2)式定义的范数所构成的赋范空间X^*称为X的对偶空间

R和C按通常的度量是完备的，利用定理2.7-14立即得出下面定理．

2.8-13　**定理（对偶空间）**．任何赋范空间X的对偶空间X^*均是Banach空间（不论X是否是Banach空间）．

对于空间的研究常常要和它们的对偶空间的研究联系起来，因此，有必要找出某些重要空间的对偶空间．

2.8-14　**空间R^n的对偶空间是R^n．**

证明　根据定理2.7-8，有$(R^n)'=(R^n)^*$，每个$f\in(R^n)'$，具有下列表示式

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j r_j,\quad r_j=f(e_j)$$

这里$e_j=(\delta_{jk})$是$1\times n$矩阵，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是R^n的基．

$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$．定义算子

$$T:\ (R^n)^*\to R^n$$

$$f \longmapsto (f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

对任意数α，所有$f, g \in (R^n)^*$，有，

$$T(f+g) = ((f+g)(e_1), \cdots, (f+g)(e_n))$$
$$= \{(f(e_1)+g(e_1)), \cdots, (f(e_n)+g(e_n))$$
$$= (f(e_1), \cdots, f(e_n)) + (g(e_1), \cdots, g(e_n))$$
$$= Tf + Tg.$$
$$T(\alpha f) = ((\alpha f)(e_1), \cdots, (\alpha f)(e_n))$$
$$= (\alpha f(e_1), \cdots, \alpha f(e_n))$$
$$= \alpha(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$
$$= \alpha Tf.$$

因此，T是线性的.

对于每个$(r_1, \cdots, r_n) \in R^n$，通过(6)确定一个$f \in (R^n)^*$，且$f(e_j) = r_j \quad j = 1, 2, \cdots, n$，即

$$(r_1, \cdots, r_n) = (f(e_1), \cdots f(e_n)) = Tf.$$

因此T是满射.

若$Tf = \theta$，那么，$(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = (0, \cdots, 0)$ 即，$f(e_j) = 0, j = 1, 2\cdots, n$. 从而对于每个$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in R^n$，有

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = 0$$

故$f = 0$，因此，T是一对一的.

利用Cauchy-Schwarz不等式，得

$$|f(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i r_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} r_j^2\right)^{1/2} \|x\|$$

从而，$\|f\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)^{1/2}$. 取$x = (r_1, \cdots, r_n)$

有，

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left(\sum_{j=1}^{n} r_j^2\right)^{1/2}.$$

因此，证得f的范数是Euclidean范数，即，

$$\|f\| = \left(\sum_{j=1}^{n} f(e_j)^2\right)^{1/2}. \quad [f(e_1), \cdots, f(e_n)] \in R_n.$$

于是，$\|Tf\| = \left(\sum_{j=1}^{n} f(e_j)^2\right)^{1/2} = \|f\|$

故，T是保范的．这就证明了$(R^n)^*$与R^n是同构的赋范空间．所以，在同构意义下，$(R^n)^* = R^n$．

2.8-15　空间l^1的对偶空间是l^∞

证明　令$e_k = (\delta_{kj}) \in l^1$，由§2.3知，$(e_k)$是$l^1$的Schauder基，因此，每个$x \in l^1$，可唯一地表示为，

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{9}$$

对于任意$f \in (l^1)^*$，因为f是线性有界的，有，

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k r_k, \qquad r_k = f(e_k), \tag{10}$$

由于，$\|e_k\| = 1$，得，

$$|f(e_k)| \leqslant \|f\| \, \|e_k\| = \|f\|. \tag{11}$$

$$\sup |f(e_k)| \leqslant \|f\|.$$

因此，$(f(e_k)) \in l^\infty$，通过

$$Tf = (f(e_k))$$

定义算子$T:(l^1)^* \to l^\infty$．

显然T是线性的．且对于每个$(\alpha_k) \in l^\infty$，通过，

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k \qquad x = (\xi_k) \in l^1$$

得l^1上一泛函g，并有，

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \alpha_k| \leqslant \sup_j |\alpha_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$$
$$= \sup_j |\alpha_j| \, \|x\|.$$

从而，g是有界线性泛函，即，$g \in (l^1)^*$因此，T是满射.

从(10)得，

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k r_k| \leqslant \sup_j |r_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$$
$$= \sup_j |f(e_j)| \, \|x\|$$
$$\|f\| \leqslant \sup_j |f(e_j)|$$

由(11)有，$\|f\| \geqslant \sup_j |f(e_j)|$．所以，$\|f\| = \sup_j |f(e_j)|$

故f的范数是空间l^∞上的范数，并且.

$$\|Tf\| = \|f\| = \sup_j |f(e_j)|$$

从而证得T又是保范的、有界的、一对一的，因此，$(l_1)^*$与l^∞是同构的赋范空间，即在同构的意义下，$(l_1)^* = l^\infty$.

2.8-16 空间l^p的对偶空间是l^q. $(1 < p < +\infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

证明 令$e_k = (\delta_{kj}) \in l^p$，则$(e_k)$是$l^p$的Schauder基，每个$x = (\xi_k) \in l^p$，有唯一的表达式

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{12}$$

对于任意$f \in (l^p)^*$，因为f是线性有界的，有，

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k r_k \qquad r_k = f(e_k) \tag{13}$$

今证$(r_k)\in l^q$. 取$x_n=(\xi_k^{(n)})\in l^p$

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|r_k|^q/r_k & k\leqslant n.\text{且}r_k\neq 0\\ 0 & k>n\text{或}r_k=0\end{cases} \tag{14}$$

将$x_n=(\xi_k^{(n)})$代入(13)，得，

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}r_k=\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q$$

利用(14)及$(q-1)p=q$，有，

$$|f(x_n)|\leqslant\|f\|\|x_n\|=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{1/p}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\right)^{1/p}$$

因此， $$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\leqslant\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\right)^{1/p}$$

从而. $$\left(\sum_{k=1}^{n}|r_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|$$

因为n是任意正整数，令$n\to\infty$，得.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|r_k|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\| \tag{15}$$

即，$(r_k)\in l^q$.

定义算子T,

$$T:(l^p)^*\to l^q$$

$$f\longmapsto(f(e_k))$$

显然，T是线性的，

对于任意$(\alpha_k)\in l^q$，定义

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k$$

得到l^p上一线性泛函g，由Hölder不等式，有

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \alpha_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^q\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^q\right)^{1/q} \|x\|$$

所以g有界．$\alpha_k = g(e_k)$．$(\alpha_k) = Tg$，因此，T是满射．

由(13)及Höider不等式，有

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k r_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^q \Big)^{1/q} \|x\|.$$

从而，$\|f\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |r_k{}^q|\right)^{1/q}$，再由(15)，得

$$\| f \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)^q\right)^{1/q}$$

因此，$\|Tf\| = \|f\|$．故T是保范的，且是一对一的．在同构的意义下，$(l^p)^* = l^q$

以上几例给出的三个重要空间上有界线性泛函的一般形式，这在实际中是十分有用的，有关$C[a,b]$上的泛函，以及赋范空间X的第二对偶空间X^{**}将在第四章中讨论．

习 题 2.8

1．证明由

$$f_1(x) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt \qquad y_0 \in C[a,b] \text{固定}$$

$f_2(x) = \alpha x(a) + \beta x(b)$　α,β是固定的数，定义的$C[a,b]$上的两个泛函f_1、f_2是线性有界的．

2．求通过

$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt$$

定义的$C[-1, 1]$上的线性泛函f的范数.

3. 证明通过

$f(x)=\xi_n$(n是固定的)，$x=(\xi_j)\in l^\infty$.定义l^∞上一线性泛函，问f有界吗?

4. 设$C^1[a, b]$是$J=[a, b]$上连续可微函数全体构成的赋范空间，其范数为，

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|+\max_{t\in J}|x'(t)|$$

证明此范数满足范数公理，令，

$$f(x)=x'(c). \quad c=\frac{a+b}{2}.$$

证明f是$C^1[a,b]$上的有界线性泛函.如果将f看成$C[a,b]$中所有连续可微函数组成的子空间上的泛函，证明f是无界的.

5. 设$f\neq 0$是向量空间X上的任意线性泛函.$x_0\in X-N(f)$是任意固定的元素，证明任意$x\in X$，有唯一的表示式

$$x=ax_0+y, \quad y\in N(f).$$

6. 证明习题5中，X里的两元素x_1，x_2属于商空间$X/N(f)$的同一元素当且仅当，$f(x_1)=f(x_2)$；并证$\mathrm{Codim}N(f)=1$.

7. 证明定义在同一向量空间上且有同一零空间的两个线性泛函$f_1\neq 0$和$f_2\neq 0$是成比例的.

8. (超平面)如果Y是向量空间X的子空间，且$\mathrm{Codim}Y=1$，则X/Y的每个元素叫做平行于Y的超平面. 证明对于X上的任意线性泛函$f\neq 0$,集$H_1=\{x\in X|f(x)=1\}$是平行于$N(f)$的超平面.

9. 如果Y是向量空间X的子空间，f是X上线性泛函. 并且$f(Y)$不是X的整个数域.证明对于所有$y\in Y$，有，$f(y)=0$.

10. 证明赋范空间X上有界线性泛函$f\neq 0$的范数等于原点到超平面$H_1=\{x\in X|f(x)=1\}$距离$\tilde{d}=\inf\{\|x\| \,|f(x)=1\}$的倒数.

11. 设$\{f_1, f_2, f_3\}$是R^3基$\{e_1, e_2, e_3\}$的对偶基.这里，

$e_1=(1,1,1)$，$e_2=(1,1,-1)$，$e_3=(1,-1,-1)$。令$x=(1,0,0)$，求$f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$。

12．如果f是n维向量空间X上的线性泛函，那么零空间$N(f)$可能有怎样的维数．求由$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$，$\alpha_1\neq0$定义的$R^3$上泛函$f$零空间$N(f)$的一个基．

13．如果Z是n维向量空间X的$(n-1)$维子空间．证明Z是X上一适当线性泛函f的零空间，f在只差一个倍数的情况下，是唯一确定的．

14．设Z是n维向量空间X的真子空间，令$x_0\in X-Z$，证明在X上存在一线性泛函f，使得$f(x_0)=1$，对于所有$x\in Z$，有$f(x)=0$

15．如果f_1，…，f_p是n维向量空间X上的p个线性泛函，这里$p<n$．证明在X中存在一个$x\neq\theta$，使得$f_1(x)=0$，…，$f_p(x)=0$．

16．（线性扩张）设Z是n维向量空间X的真子空间，设f是Z上一线性泛函．证明f可以线性扩张到X上，即X上存在一线性泛函$\tilde{f}$，使得$\tilde{f}|_Z=f$．

17．如果X是由n个实数的有序组构成的赋范空间，其范数为$\|x\|=\max_j|\xi_j|$，这里，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，问对偶空间X^*上相应的范数是什么？

18．证明C_0的对偶空间是l^1（参看2.3节习题1）

19．（零化子）设$M\neq\varnothing$是赋范空间X的任意子集，称集$M^a=\{f\in X^*|f(x)=0$，每个$x\in M\}$为M的零化子．证明M^a是X^*的闭向量子空间．问X^a和$\{0\}^a$都是什么？

20．如果M是n维赋范空间X的m维子空间，证明M^a是X^*的$(n-m)$维子空间．

第三章　内积空间、希耳伯特(Hilbert)空间

内积空间是特殊的赋范空间．内积空间的理论是D．Hilbert(1912)在积分方程的研究中开创的。它比一般的赋范空间历史更长、内容更丰富。内积空间是欧几里得空间的自然推广，并保持其很多特性，其核心概念是直交．由直交性产生了投影定理与Fourier级数的一般理论．这些性质在一般赋范空间中是不具备的，而内积空间所以具有如此性质，其关键是引进了新的结构——内积．本章着重介绍内积空间的概念及其基本性质．

重要概念、主要内容的概述

内积空间X(3.1—1)是在向量空间上定义了内积$\langle x, y\rangle$，而内积是三维欧氏空间中点积概念的推广．利用内积可以定义范数和直交．

Hilbert空间H是完备的内积空间。Hilbert空间主要特征是：

(Ⅰ)H可表示为闭子空间与其直交补的直交和(3.2—5)

(Ⅱ)　标准直交集和序列，以及H中元素的对应表示．(§3.3，§3.4)

(Ⅲ)　有界线性泛函由内积的Riesz表示(§3.5)

(Ⅳ)　有界线性算子$T:H_1\to H_2$的Hilbert伴随算子T^*

的唯一存在.（§3.6）

利用Hilbert伴随算子定义自伴算子、酉算子、正规算子（§3.7）. 这些算子在应用中均十分重要.

§3.1 内积空间、Hilbert空间

3.1-1 定义（内积空间、Hilbert空间）. 设X是数域K(R或C)上的向量空间，如果映射

$\langle\cdot,\ \cdot\rangle: X\times X\to K$，对于任意$x$，$y$，$z\in X$，及每个$\alpha\in K$，满足.

（Ⅰ$P1$）. $\langle x+y,\ z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

（Ⅰ$P2$）. $\langle \alpha x, y\rangle=\alpha\langle x, y\rangle$

（Ⅰ$P3$） $\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}$

$\langle x, x\rangle\geqslant 0$

（Ⅰ$P4$） $\langle x,\ x\rangle=0$，当且仅当$x=\theta$.

则称$\langle x,\ y\rangle$为x，y的内积. 定义了内积的向量空间X称做内积空间，完备的内积空间称做Hilbert空间（度量由内积通过下面公式(4)定义）（Ⅰ$P3$)中的上横表示复共轭，若X是实内积空间，那么，

$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$ （对称性）

由（Ⅰ$P1$)至（Ⅰ$P3$)得，

$$\begin{aligned}
&(a)\quad \langle \alpha x+\beta y,\ z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle\\
&(b)\quad \langle x,\ \alpha y\rangle=\bar{\alpha}\langle x,\ y\rangle. \qquad (1)\\
&(c)\quad \langle x,\ \alpha y+\beta z\rangle=\bar{\alpha}(x, y)+\bar{\beta}\langle x, z\rangle
\end{aligned}$$

(1a)表示内积对第一个因子是线性的.（1c)表明内积对第二个因子是共轭线性的. 共轭线性也称做“半线性”因此，内

积是“个半线性”．

3.1-2 **引理（Schwarz不等式）**．设X是内积空间，则对于任意x，$y\in X$，有．

$$|\langle x, y\rangle|^2\leqslant\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \tag{2}$$

证明 若$y=\theta$，(2)式中等号成立．若$y\neq\theta$，对任一数α，有，

$$0\leqslant\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle=\langle x, x\rangle-\overline{\alpha}\langle x, y\rangle-\alpha[\langle y, x\rangle-\overline{\alpha}\langle y, y\rangle]$$

令$\alpha=\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$，代入上式得，

$$0\leqslant\langle x, x\rangle-\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle,$$

从而，（2）式得证．

在内积空间X中，对于任意$x\in X$，定义范数，

$$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{3}$$

（3）式满足($N1$)和($N2$)．由(Ⅰ$P2$)与(Ⅰ$P3$)有，

$\|\alpha x\|=\sqrt{\langle\alpha x, \alpha x\rangle}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle}=|\alpha|\,\|x\|$，即($N3$)成立．由Schwarz不等式

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$$

得，

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2=\langle x+y, x+y\rangle&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2|\langle x, y\rangle|+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

因此，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. 故(3)式是$X$上的范数.

由此可见，内积空间必是赋范空间，其由范数导出的度量为，

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle} \quad (4)$$

3.1-3 欧几里得（Euclidean）空间R^n和酉空间C^n. 对于任意$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in R^n$，定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i \quad (5)$$

对于任意$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in C^n$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in C^n$，定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_i} \quad (6)$$

易验证(5)、(6)满足内积公理(I$P1$)至(I$P4$). 故，R^n、C^n均是内积空间，并有度量.

$$d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\left[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right]^{1/2}$$

在此度量下，R^n、C^n的完备性已在1.5-1中证明. 因此，R^n与C^n是$Hilbert$空间.

3.1-4 连续函数空间. 设X是$[a,b]$上复值连续函数全体，其内积定义为，

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \quad (7)$$

可以证明(7)式是X上的内积.（参见习题8）. 并有度量

$$d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt\right]^{1/2}$$

在此度量下，X是不完备的(自证). 所以，X是内积空间，

而不是希尔伯特空间.

3.1-5 Hilbert空间l^2. 在l^2上定义内积，

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i} \tag{8}$$

因为对于任意x，$y \in l^2$，由Cauchy-Schwarz不等式知(8)式右端级数收敛，并满足(ⅠP1)至(ⅠP4). 在度量

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x-y,\ x-y\rangle} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^2\right]^{1/2}$$

下l^2是完备的(在1.5-4中已证明).

l^2是最早提出来的希耳伯特空间的一个典型空间，它是由D. Hilbert(1912年)在积分方程著作中首先介绍的. 但是，希耳伯特空间的公理化定义直到1927年才由J. Von. Neumann在关于"量子力学的数学基础"一篇论文中第一次给出. 那时的定义包含了可分性. 后来(1934)H. Löwig、F. Rellich和F. Riesz指出，对于理论的绝大部分来说，可分性是不必要的. 此后，这个条件就从定义中去掉了.

内积空间的范数有下列重要性质.

3.1-6 引理（平行四边形等式）. 设X是内积空间，$\|\cdot\|$是由内积通过(3)定义的范数. 则对于任意$x, y \in X$，有.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{9}$$

（留作习题，参看习题1）

如果$X = R^2$，等式(9)有明显的几何意义：平行四边形两对角线长度的平方和等于四边长度的平方和. 因此，对于内积空间，等式(9)称做平行四边形等式.

引理3.1-6表明由内积定义的范数必满足平行四边形等

式(9). 不满足(9)的范数不能由内积导出. 由下列看出不是所有赋范空间都是内积空间.

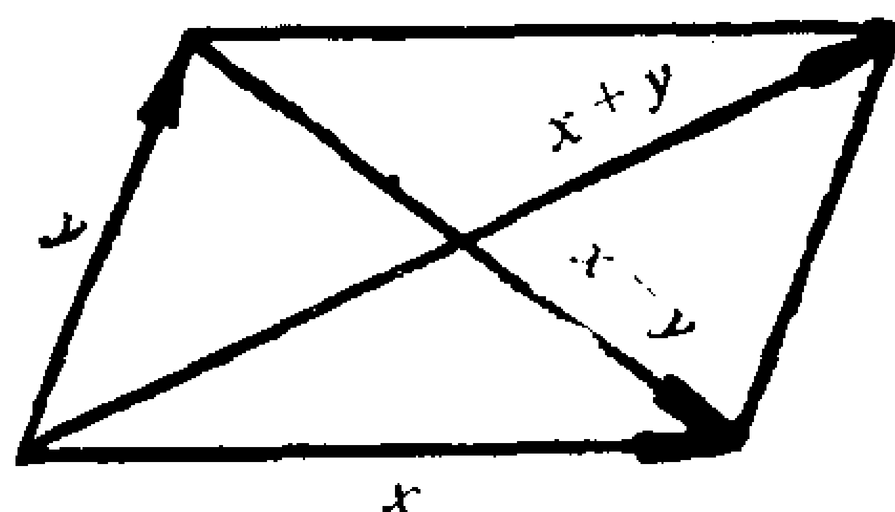


图14 平面上边x与y的平行四边形

3.1-7 **空间l^p ($p\neq 2$) 不是内积空间.**

证明 取$x=(1,1,0,0,\cdots,)\in l^p$, $y=(1,-1,0,0,\cdots,)\in l^p$那么, $\|x\|=\|y\|=2^{1/p}$, $\|x+y\|=\|x-y\|=2$. 因为$p\neq 2$, 所以, (9)式不成立, l^p的范数不能由内积导出, 故l^p ($p\neq 2$)不是内积空间.

3.1-8 $C[a,b]$**不是内积空间.**

证明 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant b\leqslant t}|x(t)|$, 取$x(t)=1$, $y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$

则, $\|x\|=\|y\|=1$ $x(t)+y(t)=1+\dfrac{t-a}{b-a}$, $x(t)-y(t)$

$$=1-\frac{t-a}{b-a},\quad \|x+y\|=2,\quad \|x-y\|=1.$$ 于

是, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$, $2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$, 即$C[a,b]$上的范数不满足平行四边形等式(9). 因此, $C[a,b]$不是内积空间.

内积空间的内积可以用范数表示. 对于实内积空间, 有.

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \qquad (10)$$

对于复内积空间, 有,

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{11}$$

$$\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

(10)与(11)通常称为极化恒等式（参看习题 4）

内积空间X的子空间Y是指赋范空间X的子空间，并将X上的内积限制在$Y\times Y$上.

Hilbert空间H的子空间Y定义为内积空间H的子空间. 不要求完备. 即Y不一定是Hilbert空间.

由定理2.3-1和2.4-2立即得出下面定理：

3.1-9 **定理（子空间）**. 设Y为Hilbert空间H的子空间，那么，

(*a*) Y为完备的充要条件是Y在H中闭.

(*b*) 若Y是有穷维的，则Y是完备的.

(*c*) 若H是可分的，则Y亦可分.

3.1-10 **引理(内积的连续性)**. 在内积空间中，若$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$\langle x_n, y_n\rangle\to\langle x, y\rangle$

证明 利用Schwarz不等式，得，

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leqslant \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

从本节例题看出，内积空间有完备的，也有非完备的. 对于非完备的内积空间可以完备化. 为此，我们首先介绍内

积空间同构的概念.

3.1-11 定义(内积空间同构). 设X、$\widetilde{X}$是同一数域K上的内积空间，如果存在X到$\widetilde{X}$上的线性双射$T: X\to\widetilde{X}$，且保持内积不变

$$\langle Tx, Ty\rangle=\langle x, y\rangle$$

则称X与$\widetilde{X}$为同构的内积空间. T称做从内积空间X到内积空间$\widetilde{X}$上的同构映射.

3.1-12 定理(完备化). 设X是内积空间，则必存在一Hilbert空间H为X的完备化空间，即X与H的稠密子空间W同构，且在内积空间同构的意义下，H是唯一的.

证明 由于内积空间X必是赋范空间，利用定理2.3-3，存在一Banach空间H，使得X与H的稠密子空间W同构，并有同构映射T: $X\to W$.

首先在W上定义内积. 对于任意$\hat{x}$, $\hat{y}\in W$，存在x, $y\in X$，使得，$\hat{x}=Tx$, $\hat{y}=Ty$，定义.

$$\langle\hat{x}, \hat{y}\rangle=\langle x, y\rangle. \tag{12}$$

由于T是线性双射，易验证(12)左端满足($IP1$)至($IP4$).

且$\langle Tx, Ty\rangle=\langle x, y\rangle$. $\|\hat{x}\|=\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}=\sqrt{\langle\hat{x}, \hat{x}\rangle}$

即T保持内积不变，原范数和由内积(12)导出的范数一致. 因此，X与W是同构的内积空间.

现在我们在H上定义内积. 由于X与W同构，可视X在H中稠密. 对于任意$\hat{x}$, $\hat{y}\in H$，存在$(x_n)\subset X$, $(y_n)\subset X$,

使得$x_n \to \hat{x}$，$y_n \to \hat{y}$，通过

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle \tag{13}$$

定义H上的内积．可以证明(13)右端极限存在，并且数值$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$与$(x_n)$、$(y_n)$的选择无关，即这样定义的内积有唯一确定的意义．利用内积的连续性．易验证$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$满足$(IP1)$至$(IP4)$．并有，$\|\hat{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\langle x_n, x_n \rangle}$

$= \sqrt{\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle}$．故$H$上原来的范数与内积(13)导出的范数是一致的．因此，H是Hilbert空间．

如果X还有一个完备化空间$\widetilde{H}$，利用定理2.3-3及内积的连续性，可以证明$\widetilde{H}$与H是同构的内积空间．

习 题 3.1

1．证明公式(9)．

2．若X是实内积空间，证明$\|x\| = \|y\|$蕴涵$\langle x+y, x-y \rangle = 0$．如果$X = R^2$这在几何上意味着什么？ 如果$X$是复的其意味着什么？

3．(Appolonius恒等式）证明在内积空间X中，对于任意$x, y, z \in X$，有，

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{1}{2}(x+y)\right\|^2$$

并证明此恒等式不能由平行四边形等式(9)推出.

4. 证明公式(10)和(11).

5. 在内积空间中，若对所有x，有，$\langle x, u\rangle=\langle x, v\rangle$则，$u=v$.

6. 若z_1，z_2表示复数，证明$\langle z_1, z_2\rangle=z_1\overline{z_2}$是一内积. 其在复平面上产生通常的度量.

7. 设X为所有复数的有序对构成的向量空间，在X上定义范数，

$$||x||=|\xi_1|+|\xi_2|$$

这里$x=(\xi_1, \xi_2)\in X$，试问X能成为内积空间吗?

8. 证明(7)满足内积公理($IP1$)至($IP4$).

9. 如果X为有穷维向量空间，且$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基. 证明X上的内积完全由数值$r_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle$确定.我们能任意选择数$r_{ij}$吗?

10. 在R^2和R^3中，Schwarz不等式表示什么? 在这些情况下给出另外的证明.

11. 设X是由$x=0$和$[a, b]$上次数不超过2的实系数多项式组成，并按(7)定义内积，证明X是完备的. 若Y由X中满足$x(a)=0$的x全体组成，Y是X的子空间吗? $x\in X$且次数等于2的x全体能构成X的子空间吗?

12. 举出l^2子空间的例子.

13. 证明对于内积空间的序列(x_n)，条件.

$$||x_n||\to||x||\text{和}\langle x_n, x\rangle\to\langle x, x\rangle\text{蕴涵}x_n\to x.$$

14. 设V为$J=[a, b]$上连续复值函数全体所成的向量空间，令

$X_1=(V, ||\cdot||_\infty)$，$X_2=(V, ||\cdot||_2)$

这里，$||x||_\infty=\max\limits_{t\in J}|x(t)|$，$||x||_2=\langle x, x\rangle^{1/2}$.

$$\langle x, y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$证明X_1到X_2的恒等映射$x\mapsto x$是连续的（但不是同胚，X_2不完备.）

15. (零算子)设$T: X\to X$是有界线性算子，X为复内积空间.

若对所有$x\in X$，有$\langle Tx, x\rangle=0$成立，则$T=0$.证明在实内积空间中，上述论断不成立.（提示：考虑Euclidean平面上的旋转）

§3.2 直交与直交分解

在度量空间中，从元素x到一非空子集$M\subset X$的距离δ定义为

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M} d(x,\tilde{y})$$

在赋范空间中，δ定义为

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\| \qquad (1)$$

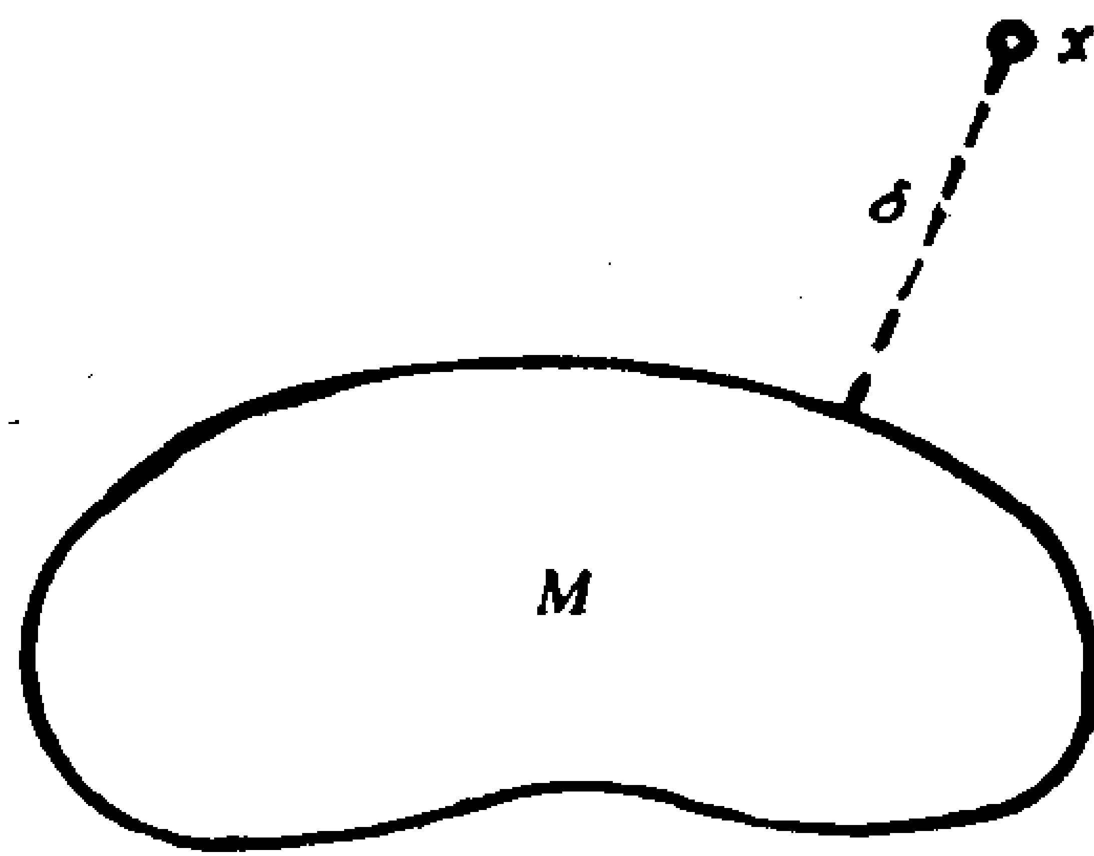


图15　x到M的距离

现在我们讨论M中能否唯一存在元素y，使得，

$$\delta=\|x-y\|. \qquad (2)$$

这无论在理论上和实用上都是十分重要的. 例如其与函数逼近理论有密切联系.

图16表明即使在很简单情况下，如Euclidean平面R^2

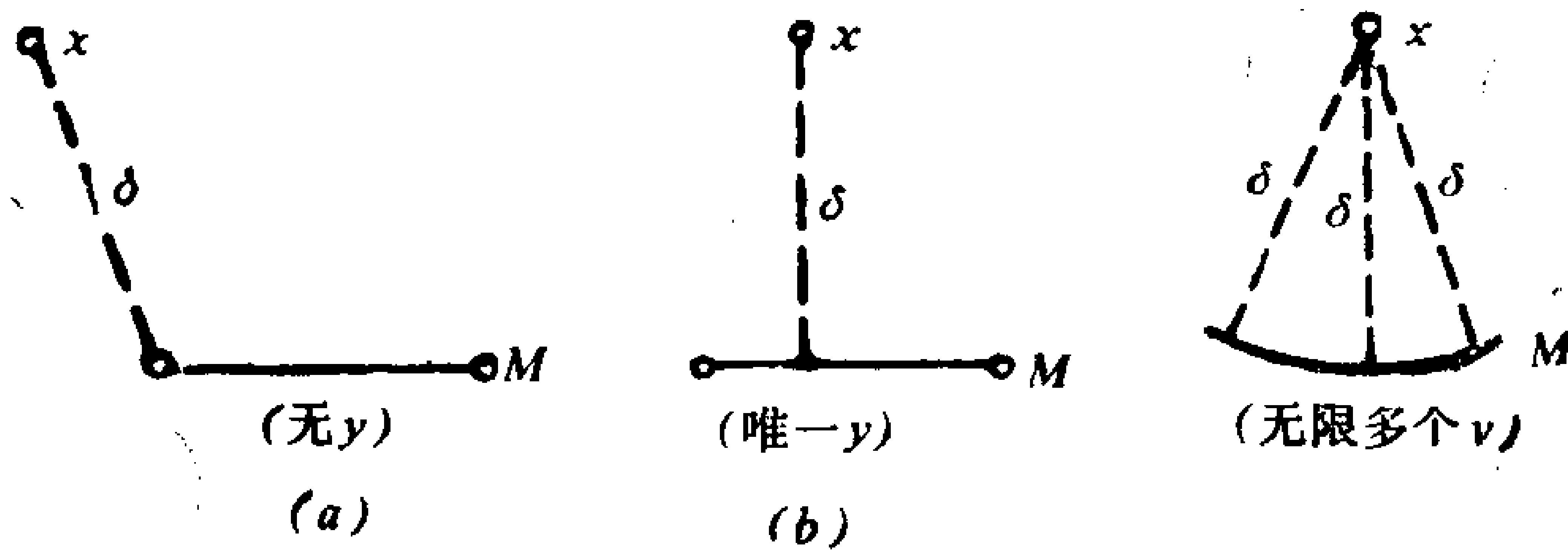


图16　在$M\subset R^2$的情况下，满足(2)的y点存在性与唯一性，其中(a)与(b)各为一开线段，(c)为一圆弧，

上，满足（2）的y可能不存在、或恰好有一个、或有无穷多个.

关于y的存在性和唯一性问题，在一般的赋范空间情况更复杂. 但在Hilbert空间中，相对的较为简单. 这个事实使人感到惊异，并由此引出很多理论和实际结果.

为考察Hilbert空间这种点的存在性和唯一性问题，需要引进下列两个有关概念.

设x、y是向量空间X中给定的二向量，称集

$$\{z \mid z \in X, \ z = \alpha x + (1-\alpha) y, \ \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

为连接x，y的线段.

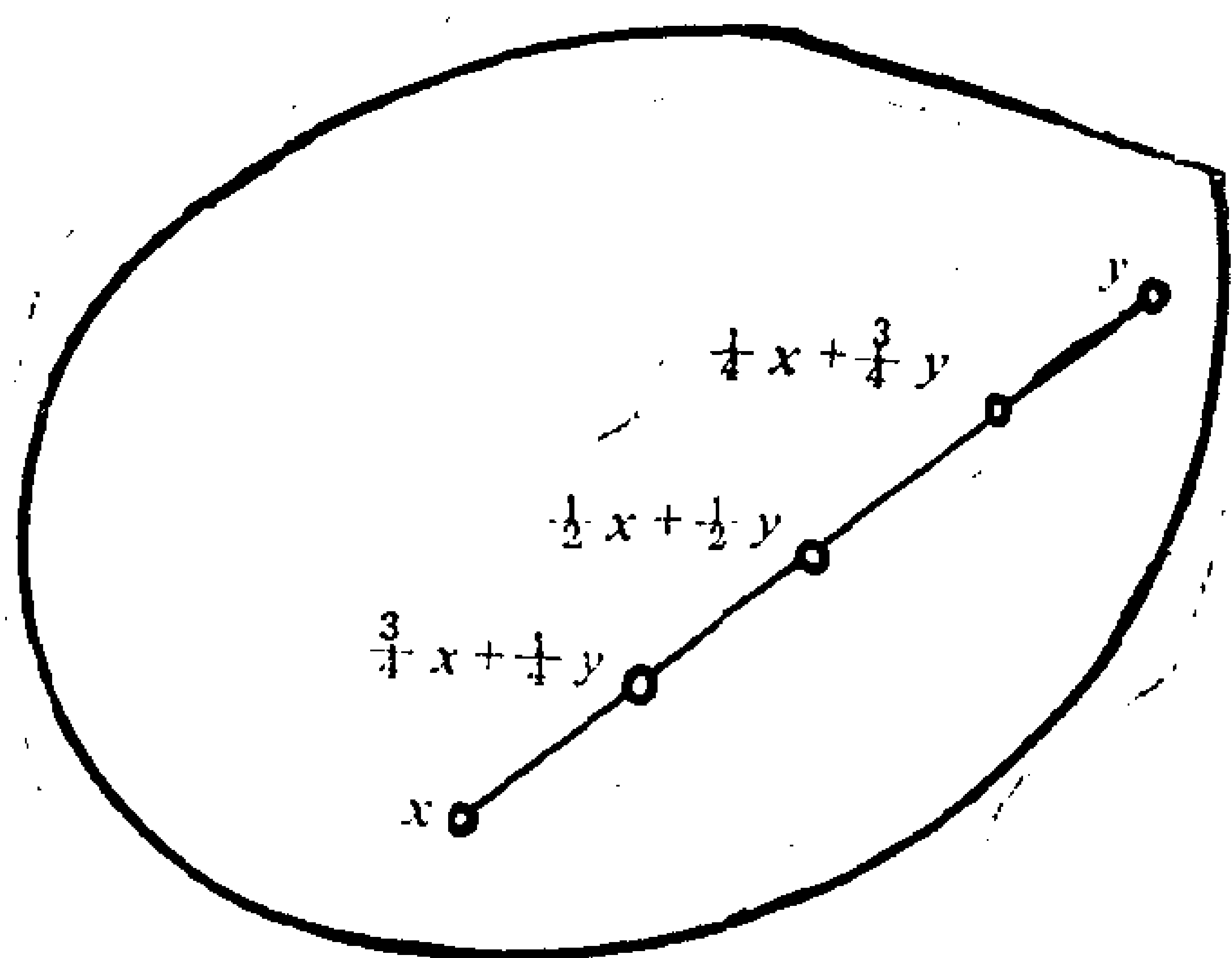


图17　连接x与y的线段的图示

设M是X的子集，如果对于任意x，$y \in M$，连接x与y的线段均包含在M中，则称M是凸集.

例如，向量空间X的任一子空间是凸的. 凸集的交集仍为凸集.

3.2-1 **定理(极小化向量)**. 设X是内积空间, $M\neq\varnothing$为X的完备凸子集. 则对于每一个给定的$x\in X$, 存在唯一的$y\in M$, 使得.

$$\delta=\inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\|=\|x-y\| \tag{3}$$

证明 (a)存在性. 由下确界的定义, 对于每个n, 存在$y_n\in M$, 使得, $\delta\leqslant\|x-y_n\|\leqslant\delta+\frac{1}{n}$因此, $\delta=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|$.

利用平行四边形等式, 由M是凸集. 有

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2\\&=2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)\\&\quad-\|2x-(y_n+y_m)\|^2\\&=2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)\\&\quad-4\left\|x-\frac{1}{2}(y_n+y_m)\right\|^2\\&\leqslant2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)-4\delta^2\to0\\&\qquad(n、m\to\infty)\end{aligned}$$

即(y_n)是Cauchy序列. 因为M是完备的, 存在$y\in M$, 使得$y_n\to y$. 由于范数的连续性.

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\|x-y\|$$

(b)唯一性. 若还有$y_0\in M$, 使$\delta=\|x-y_0\|$, 则由平行四边形等式,

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2&=\|(x-y_0)-(x-y)\|^2\\&=2(\|x-y_0\|^2+\|x-y\|^2)\\&\quad-\|2x-(y_0+y)\|^2\end{aligned}$$

$$= 2(\delta^2+\delta^2) - 4\left\| x - \frac{1}{2}(y_0+y)\right\|^2$$

$$\leqslant 4\delta^2 - 4\delta^2$$

$$= 0.$$

于是，$y = y_0$.

3.2-2 **定义**(**直交**). 设x，y是内积空间X中的两个向量，如果，

$$\langle x, y\rangle = 0$$

则称x与y直交．记作$x\perp y$．对于子集A，$B\subset X$，若x与所有$a\in A$直交，称x与A直交．记作$x\perp A$．如果对任意$a\in A$和任意$b\in B$，均有$a\perp b$，那么，称A与B直交，记作$A\perp B$．称集

$A^{\perp} = \{x | x\in X, x\perp A\}$为$A$的直交补．

3.2-3 **引理**(**直交性**). 设Y是内积空间X的子空间，对于给定的$x\in X$，如果存在$y\in Y$，使得．

$\|x-y\| = \delta = \inf\limits_{\tilde{y}\in Y}\|x-\tilde{y}\|$，则，$x-y\perp Y$.

证明 因为，$\delta = \inf\limits_{\tilde{y}\in Y}\|x-\tilde{y}\| = \|x-y\|$．那么，

对于任意$\tilde{y}\in Y$，$\tilde{y}\neq\theta$．和任何数λ．有，

$$\delta^2 \leqslant \|x-(y+\lambda\tilde{y})\|^2 = \|(x-y)-\lambda\tilde{y}\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 - 2Re\langle\bar{\lambda}(x-y), \tilde{y}\rangle$$

$$+ |\lambda|^2\|\tilde{y}\|^2$$

取$\lambda = \frac{\langle (x-y), \tilde{y} \rangle}{\|\tilde{y}\|^2}$代入上式，得

$$\delta^2 \leqslant \delta^2 - 2\frac{|\langle (x-y), \tilde{y} \rangle|^2}{\|\tilde{y}\|^2} + \frac{|\langle x-y), \tilde{y} \rangle|^2}{\|\tilde{y}\|^2}$$

即，
$$0 \leqslant \frac{|\langle (x-y), \tilde{y} \rangle|^2}{\|\tilde{y}\|^2} \leqslant 0$$

于是，$\langle (x-y), \tilde{y} \rangle = 0$.

3.2-4 定义（**直和**）．设X是向量空间，Y、Z是X的两个子空间．若对于每个$x \in X$可唯一地表示成，

$$x = y + z \qquad y \in Y, \ z \in Z.$$

则X称为Y与Z的直和．记作$X = Y \oplus Z$．如果$Y \perp Z$，则$X = Y \oplus Z$称做Y与Z的直交和．

3.2-5 定理（**直交和**）．设Y是Hilbert空间H的闭子空间，则

$$X = Y \oplus Y^{\perp} \tag{4}$$

证明　因为H完备，Y是闭的．由定理1.4-8，Y是完备的．由于子空间Y是凸集，利用定理3.2-1和引理3.2-4，对于任意$x \in H$，存在唯一的$y \in Y$，使得$z = x - y \perp Y$，即x可唯一地表示成，

$$x = y + z, \ y \in Y, \ z \in Y^{\perp} \tag{5}$$

于是，(4)式得证．

(5)式中的y称做x在子空间Y上的直交投影（简称投影），因此，定理3.2-5亦称做投影定理．

利用(5) 式可以定义一映射，

$$p: H \to Y \qquad (6)$$
$$x \mapsto y = px.$$

p称做H到Y的投影算子.

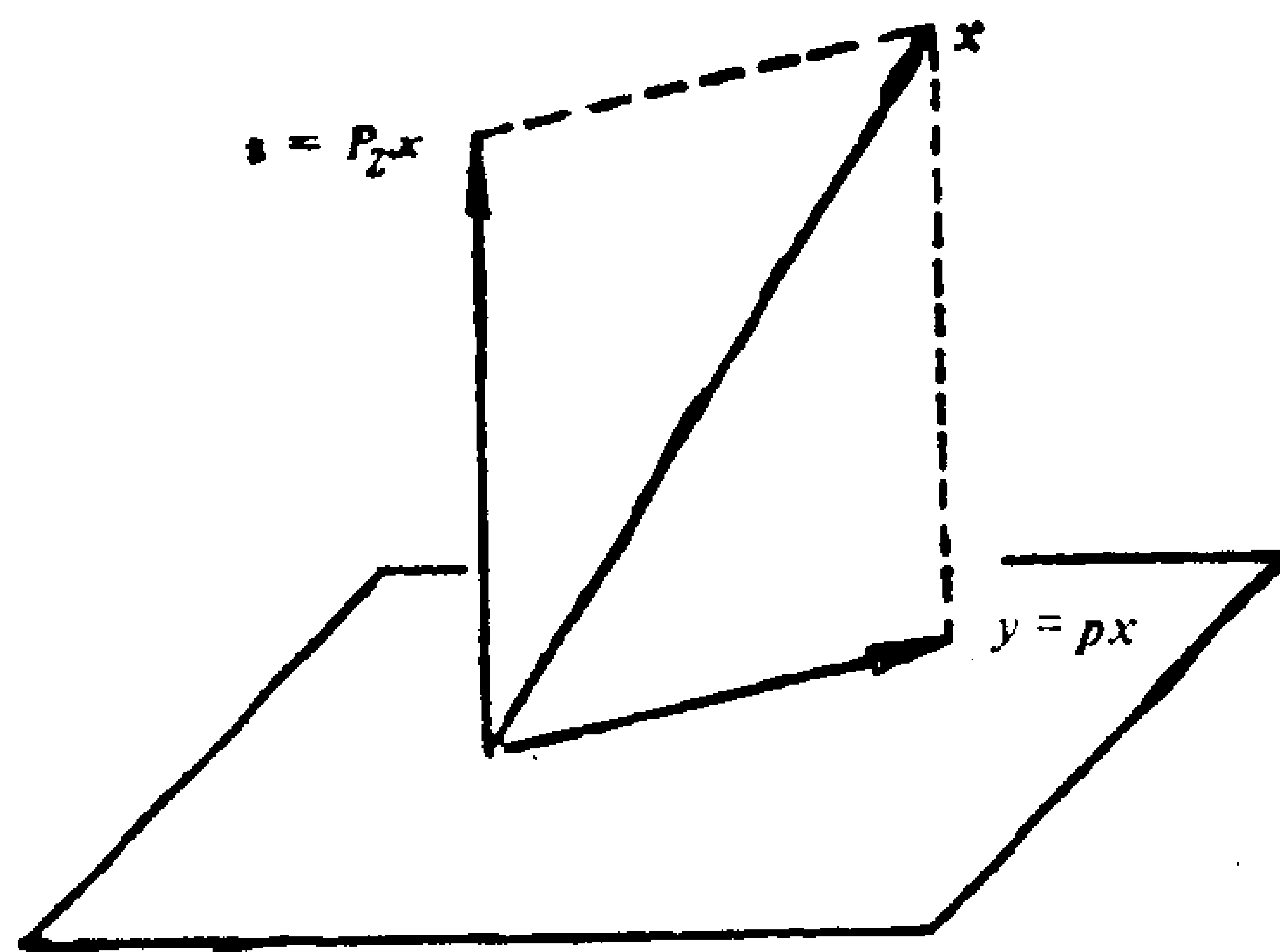


图18　定理3.2-5及公式(6)的图示

希尔伯特空间H到其闭子空间Y的投影算子p具有下列诸性质.

(a) p的范数或是0、或是1.

证明　当$Y=\{\theta\}$时，对一切$x\in H$，$px\in Y$. 因此，$px=\theta$，即p是零算子. $\|p\|=0$. 当$Y\neq\{\theta\}$时，对于任意$x\in H$可唯一分解为3.2-5中$x=px+z$, $px\in Y$. $z\in Y^{\perp}$. 所以，$\|x\|^2=\|px\|^2+\|z\|^2$. $\|px\|\leqslant\|x\|$，于是，$\|p\|\leqslant 1$. 另一方面，$x\in Y$，有$x=px$，$\|p\|\geqslant\dfrac{\|px\|}{\|x\|}=1$ $(x\neq\theta)$，从而，$\|p\|=1$.

(*b*) p必是有界线性算子.

证明 对任意x_1, $x_2\in H$, 有分解式$x_1=px_1+z_1$, $x_2=px_2+z_2$. z_1, $z_2\in Y^{\perp}$, 对于任意数α、β,

$$\alpha x_1+\beta x_2=(\alpha px_1+\beta px_2)+(\alpha z_1+\beta z_2)$$

这里, $\alpha px_1+\beta px_2\in Y$, $\alpha z_1+\beta z_2\in Y^{\perp}$, 由定理3.2-5直交分解的唯一性, 那么,

$$p(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha px_1+\beta px_2.$$

即p是线性算子. 由性质(*a*)知p有界.

(*c*) p是幂等的: $p^2=p$.

证明 对于任意$x\in H$, $p^2x=p(px)=px$.

(*d*) p的零空间等于Y的直交补: $N(p)=Y^{\perp}$.

对于Hilbert空间H的子空间Y, 有$Y\subset(Y^{\perp})^{\perp}=Y^{\perp\perp}$. 还可以证明$Y^{\perp}$是$H$的闭子空间（参看本节习题12）. 由此可知, Y不一定是$Y^{\perp}$的直交补（因为Y不一定是闭的）.

3.2-6 引理(闭子空间). 设Y是Hilbert空间H的闭子空间, 则, $Y=Y^{\perp\perp}$.

证明 对于任意$x\in Y$, $x\perp Y^{\perp}$, 那么, $x\in Y^{\perp\perp}$, 故证得$Y\subset Y^{\perp\perp}$. 设$x\in Y^{\perp\perp}\subset H$, 则由定理3.2-5, x有唯一分解式$x=y+z$, $y\in Y\subset Y^{\perp\perp}$, $z\in Y^{\perp}$, 因而, $x-y=z\in Y^{\perp}$. 另一方面, 由x、$y\in Y^{\perp\perp}$, $Y^{\perp\perp}$是向量空间. 于是, $x-y\in Y^{\perp\perp}$. $x-y\perp Y^{\perp}$, 从而, 有$\|x-y\|^2=\langle x-y, x-y\rangle=0$. 故$x=y\in Y$. 因此, $Y^{\perp\perp}\subset Y$.

3.2-7 引理(稠密集). 设$M\neq\varnothing$是Hilbert空间H的子集, 那么, $\overline{\mathrm{Span}M}=H$的充要条件是$M^{\perp}=\{\theta\}$.

证明 (*a*) 必要性. 若$\overline{\mathrm{Span}M}=H$. 设$x\in M^{\perp}$, 那

么，$x\in H=\overline{\mathrm{Span}M}$，由定理1.4-7，存在$x_n\in\mathrm{Span}M$使$x_n\to x$. 因为$M^\perp\perp\mathrm{Span}M$，于是$\langle x_n, x\rangle=0$利用引理3.1-10（内积的连续性），$\|x\|^2=\langle x, x\rangle=0$因此，$x=\theta$，$M^\perp=\{\theta\}$.

（b）充分性. 假设$M^\perp=\{\theta\}$. 对于任意$x\in\overline{\mathrm{Span}M}^\perp$则，$x\perp M$. 即，$x\in M^\perp=\{\theta\}$，所以，$x=\theta$，

$\overline{\mathrm{Span}M}^\perp=\{\theta\}$.取定理3.2-5的$Y=\overline{\mathrm{Span}M}$，于是，$H=Y\oplus Y^\perp=Y\oplus\{\theta\}=Y$. 故$\overline{\mathrm{Span}M}=H$.

习 题 3.2

1.（Pythagorean定理）. 在内积空间X中，若$x\perp y$，证明$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. 此公式可推广到$m$个互相直交向量的情形. 若$X$为实空间，上述公式蕴涵$x\perp y$，举例说明若$X$为复空间时，$x\perp y$不一定成立.

2. 设$x\neq\theta$，$y\neq\theta$，是内积空间X的两个元素，

（a）若$x\perp y$，则$\{x, y\}$是线性无关的.

（b）若$x_i\neq\theta$，$x_i\perp x_j$ $(i\neq j)$，$i, j=1,2,\cdots,n$，则集$\{x_1,\cdots,x_n\}$是线性无关的.

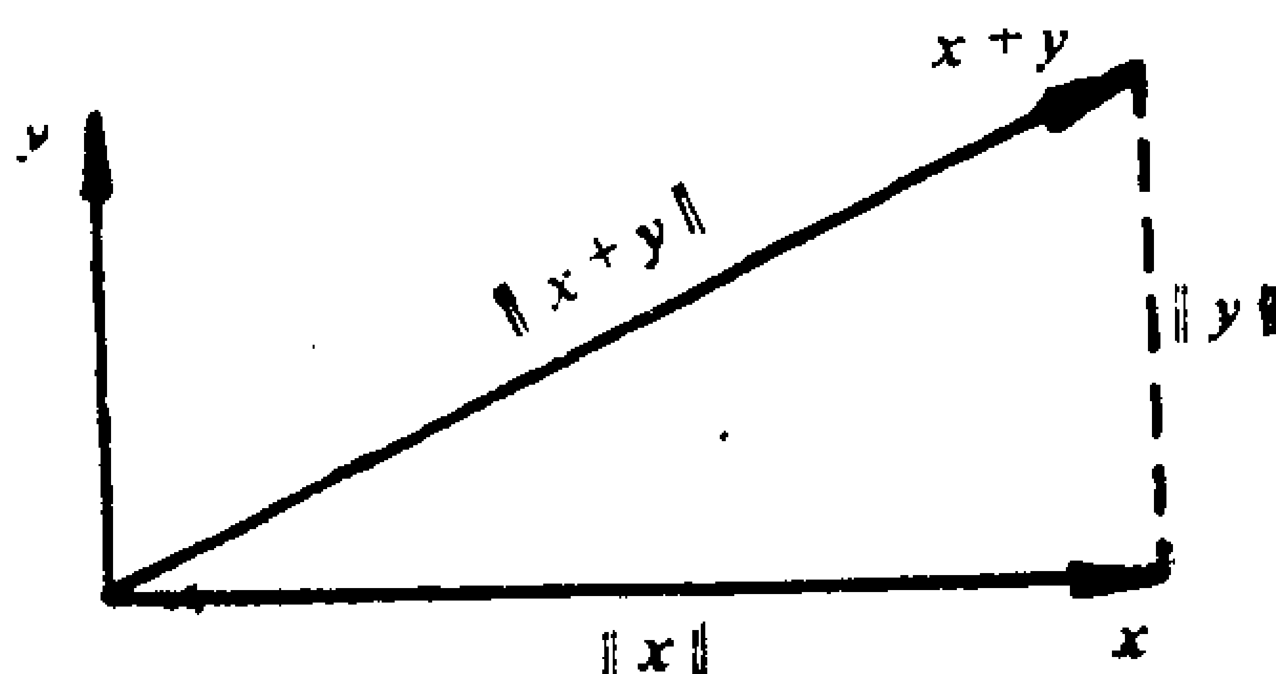


图19 pythagorean定理的说明

3. 证明在内积空间中，$x\perp y$的充要条件是对于所有数a，$\|x+ay\|=\|x-ay\|$.

4. 证明在内积空间中，$x\perp y$的充要条件是对于所有a，$\|x+ay\|\geq\|x\|$

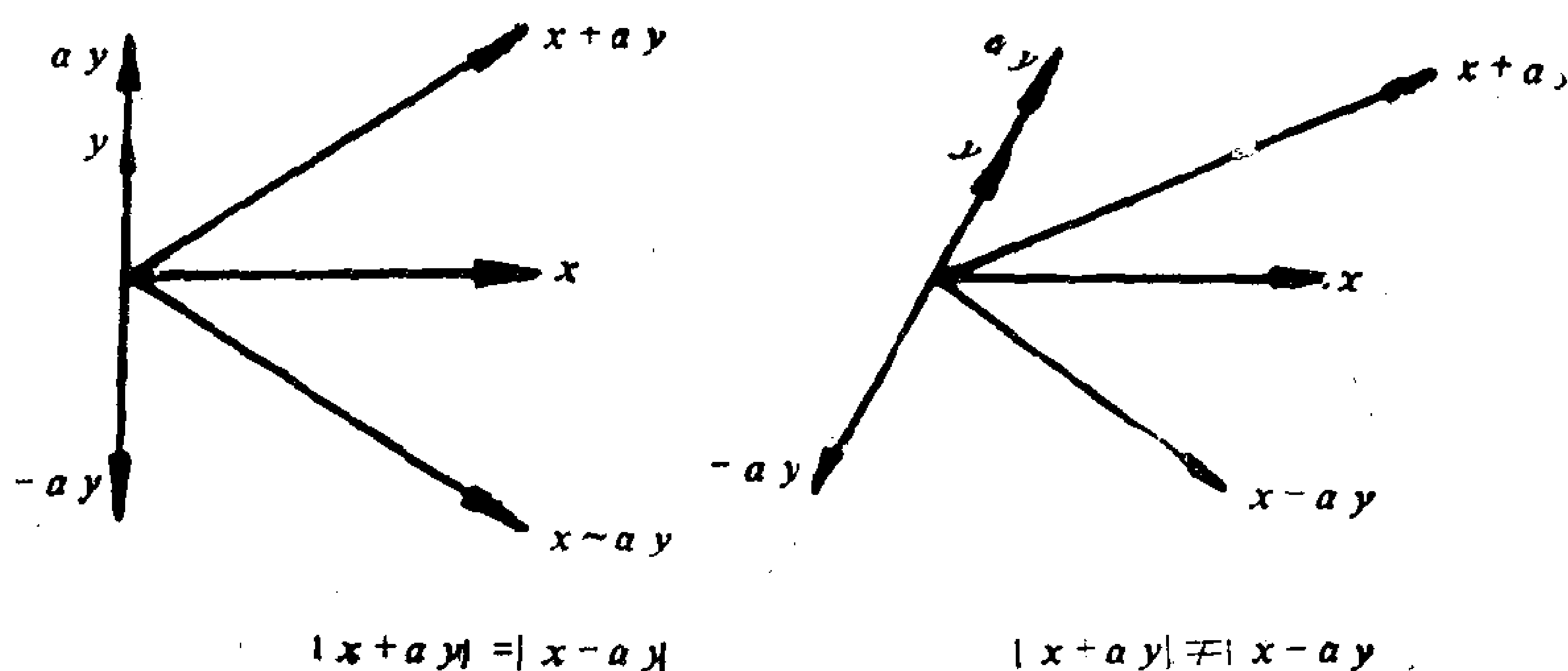


图20 欧儿里得平面R^2中的习题3的图示

5.设H是Hilbert空间，$M\subset H$为一凸子集，$\{x_n\}\subset M$，$||x_n||\to d=\inf||x||$，证明（x_n）在H中收敛，试在R^2或R^3中给出具体例子$x\in M$.

6.证明C^n的子集$M=\{y|y=(\eta_1,\cdots,\eta_n),\sum_{j=1}^{n}\eta_j=1\}$是完备的、凸的。在$M$中找出最小范数的向量.

7.证明$[-1,1]$上所有实值连续函数所构成的向量空间X可以表示成$[-1,1,]$上奇连续函数全体所成之集与偶函数全体所成之集的直和.

8.(a)证明在X为Hilber空间，M为X的闭子空间时，定理3.2-1仍成立.

(b).能用Appolonius恒等式（习题3.1中的第3题）证明定理3.2-1吗？

9.在R^2中，若(a)$M=\{x|x=(\xi_1,\xi_2)\neq\theta\}$，(b)$M$为$R^2$中线性无关集$\{x_1,x_2\}$，分别求出$M^\perp$.

10.证明$Y=\{x|x=(\xi_j)\in l^2,\ \xi_{2n}=0,\ n=1,2,\cdots\}$为$l^2$的

一闭子空间，并求$Y^{\perp}$.若$Y=\mathrm{Span}\ \{e_1,\cdots,e_n\}$ ，$e_j=(\delta_{jn})\in l^2$，则$Y^{\perp}$等于什么？

11.设A与B为内积空间X的非空子集，且$A\subset B$、证明：(a) $B^{\perp}\subset A^{\perp}$、(b) $A^{\perp\perp\perp}=A^{\perp}$.

12.证明在内积空间X中，其子集$M\neq\phi$的直交补$M^{\perp}$是X的一个闭子空间.

13.证明Hilbert空间H的子空间Y在H中为闭的充要条件是$Y=Y^{\perp\perp}$.

14.设$M\neq\varnothing$是Hilbert空间H的任一子集，证明$M^{\perp\perp}$为H中包含M的最小闭子空间.

§3.3 直交集和直交序列

我们回忆R^3中的基向量$e_1=(1,0,0)$，$e_2(0,1,0)$，$e_3=$

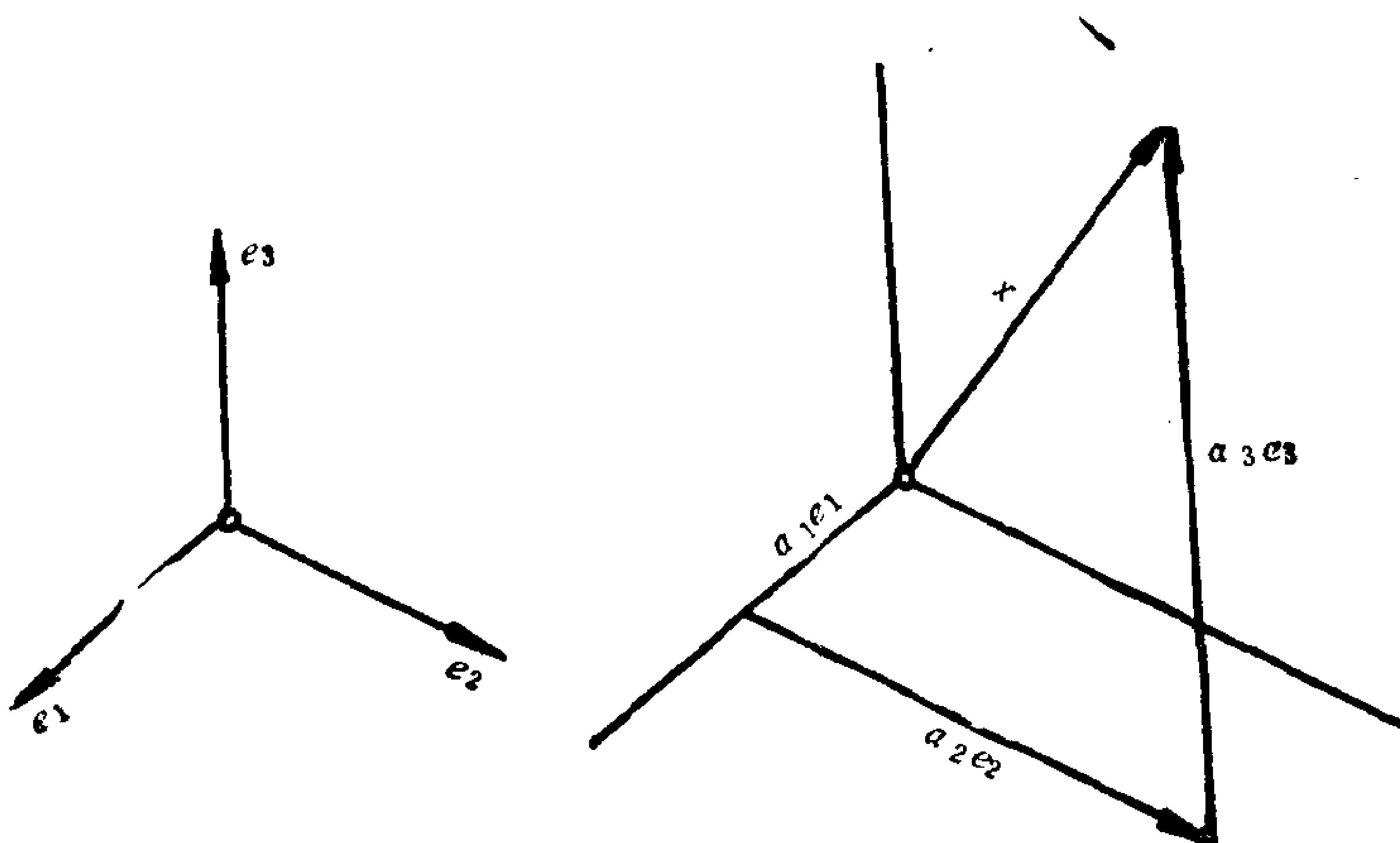


图21　R^3中的直交集 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 、及表示式

$x=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$

(0,0,1)，它们中的任何两个均直交，对每一个$x\in R^3$，有唯一的表达式.

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$$

利用直交性，易求出其系数α_j，

$$\langle x,e_j\rangle=\sum_{K=1}^{3}\alpha_K\langle e_K,e_j\rangle=\alpha_j,\quad j=1,2,3$$

由此可见，直交性带来了很大的方便，我们要将R^3中直交系的概念推广到一般内积空间上，还会得到其他结果．事实上，直交集和直交序列的应用构成了内积空间和Hilbert空间的本质部分．首先让我们介绍直交集与直交序列的概念.

3.3-1 **定义（直交集与直交序列）**．设M是内积空间X的子集.如果M中每一对不同元素均直交，则称M为直交集．若对于所有x、$y\in M$有

$$\langle x,\ y\rangle=\begin{cases}0 & x\neq y\\ 1 & x=y\end{cases}\tag{1}$$

那么称M为标准直交集．如果X中序列(x_n)的每一对元素均直交，即，

$$\langle x_i,\ x_j\rangle=0\qquad i\neq j.$$

则称(x_n)是直交序列．如果(x_n)满足，

$$\langle x_i,\ x_j\rangle=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

则称(x_n)是标准直交序列．更一般地，如果族(x_α)，$\alpha\in I$，对所有$\alpha,\beta\in I$，$\alpha\neq\beta$，有，$x_\alpha\perp x_\beta$，则称此族直交．如果对所有$\alpha,\beta\in I$，有，

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} \tag{2}$$

那么，称此族是标准直交的.

例题.

3.3-2 Euclidean空间R^3. R^3中直角坐标系的三个坐标轴的正向单位向量$e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$，$e_3=(0,0,1)$构成一标准直交集$\{e_1,e_2,e_3\}$.

3.3-3 **空间l^2.** 取$e_n=(\delta_{nj})$，那么，(e_n)是l^2中的标准直交序列.

3.3-4 **连续函数空间.** 设X是$[0,2\pi]$上连续实值函数全体，其内积定义成.

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$$

那么，序列$(\cos nt)$, $n=0,1,2\cdots$、和序列$(\sin nt)$均是X中的直交序列. 序列

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad n=1,2,\cdots,$$

和序列$\left(\dfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right)$均是$X$中的标准直交序列.

下面我们讨论直交集和直交序列的一些简单性质.

设X是内积空间，$x, y\in X$，$x\perp y$，那么，

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

更一般地，若$\{x_1,\cdots,x_n\}$为一直交集，则

$$\|x_1+\cdots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2 \tag{3}$$

事实上，由于$\langle x_j, x_k\rangle = 0$，$j\neq k$，因而，

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$$

3.3-5 引理(线性无关). 标准直交集是线性无关的

证明 设$\{e_1,\cdots,e_n\}$为标准直交，考察方程

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \theta$$

有，$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle e_j, e_k\rangle = \alpha_k \langle e_k, e_k\rangle = \alpha_k = 0$. 因此，证明了任意有限标准直交集线性无关. 若给定的标准直交集是无限的，由§2.1线性无关定义同样可证明其线性无关.

设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是内积空间X的标准直交集，$x\in X$，如果$x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$，那么，$\alpha_j=\langle x,e_j\rangle$. $j=1,2,\cdots,n$. 反之，对于$x\in X$，和标准直交集$\{e_1,\cdots,e_n\}$，总能作一向量y，

$$y=\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j$$

一般说来，$y\neq x$，然而却有$(x-y)\perp e_k$，$k=1,2,\cdots n$. 因此，有下列引理.

3.3-6 引理(投影). 设$\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$是内积空间X的一标准直交集，$Y=\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_n\}$，其中$n$固定，则对于任意$x\in X$，$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$是$x$在$Y$上的投影. 且有

$$\|y\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2 \qquad (4)$$

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|\langle x,e_k\rangle\right|^2 \tag{5}$$

证明　对于任意$x\in X$．　$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$，由于$e_1\cdots$，$e_n$两两直交，那么，对于$m=1,2,\cdots,n$．

$$\langle y,e_m\rangle=\langle\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,\ e_m\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_m\rangle=\langle x,e_m\rangle.$$

因此，$\langle x-y,e_m\rangle=0$ 于是，

$(x-y)\perp Y$．

故y是x在Y上的投影．

由于$\{e_1,e_2\cdots e_n\}$是X的标准直交集．因此

$$\|y\|^2=\langle y,y\rangle=\langle\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j,\ \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\langle x,e_k\rangle\right|^2$$

令，$z=x-y$则$y\perp z$，从而，

$$\|x\|^2=\|y+z\|^2=\langle y+z,\ y+z\rangle=$$

$$\|y\|^2+\|z\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\langle x,\ e_k\rangle|^2+\|x-y\|^2$$

即(5) 得证．

利用(5) 立即得出

$$\sum_{k=1}^{n}|\langle x,\ e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{6}$$

3.3-7　**定理**．设$\{e_1,e_2\cdots e_n\}$是内积空间X中的标准直交集，$x\in X$，那么，对任何n个数α_1，…，α_n有，

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|\geqslant\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,\ e_k\rangle e_k\| \tag{7}$$

证明　令$y_1=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$，$y=\sum_{k=1}^{n}\langle x,\ e_k\rangle e_k$，$z=x-y$，由引理3.3-6，$y\perp z$，$y_1\perp z$，于是$y-y_1\perp z$，从而，利用(3)得，

$$\|x-y_1\|^2=\|(y+z)-y_1\|^2=\|(y-y_1)+z\|^2=\|y-y_1\|^2+\|z\|^2\geqslant\|z\|^2.$$

故(7)成立.

由(6)可得到下面定理.

3.3-8　**贝塞尔(Bessel)不等式**设(e_k)为内积空间X中一标准直交序列，则对每一个$x\in X$，有，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,\ e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2 \qquad \text{(Bessel不等式)} \tag{8}$$

一个与Bessel不等式有关的问题是Fourier级数.

3.3-9　**定义(Fourier级数)**　设(e_λ)，$\lambda\in I$，是内积空间X中一标准直交族.$x\in X$，级数$\sum_\lambda\langle x,\ e_\lambda\rangle e_\lambda$称做$x$关于族$(e_\lambda)$，$\lambda\in I$的Fourier级数．当，$x=\sum_\lambda\langle x,\ e_\lambda\rangle e_\lambda$时，称$x$可以展成关于$(e_\lambda)$，$\lambda\in I$的Fourier级数．$\langle x,\ e_\lambda\rangle$，$\lambda\in I$，称做$x$的Fourier系数.

3.3-10　**定理(收敛)**.设(e_k)是Hilbert空间H的一标准直交序列，则，(a)级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k \tag{9}$$

收敛（依H上范数）的充要条件是级数.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 \tag{10}$$

收敛．(b)若(9)收敛到$x\in H$，那么，$\alpha_k=\langle x, e_k\rangle$ 这时，(9)可写成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k=x. \tag{11}$$

(c)对于任意$x\in H$．级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$均收敛(依$H$上的范数收敛)．

证明 (a)令$S_n=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n, \sigma_n=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2$ 根据(e_k)的标准直交性，对任意正整数m，$m<n$，

$$\|S_n-S_m\|^2=|\alpha_{m+1}|^2+\cdots+|\alpha_n|^2=\sigma_n-\sigma_m$$

因而，(S_n)为H中的Cauchy序列的充要条件是(σ_n)为R中Cauchy序列．于是(a)得证，

(b)因为(e_n)是标准直交的，所以，

$$\langle S_n, e_j\rangle=\alpha_j, \quad j=1, 2, \cdots n.$$

假设$S_n\to x$，利用内积的连续性，有：

$$\alpha_j=\langle S_n, e_j\rangle\to\langle x, e_j\rangle$$

即，$\alpha_j=\langle x, e_j\rangle$．$j=1, 2\cdots$，

(c)根据定理3.3-8中的Bessel不等式，级数

$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2$收敛．由(a)知级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$收敛．

3.3-11 **引理**(Fourier系数)．设(e_λ)，$\lambda\in I$，是内积空间X中一标准直交族．则对每一个$x\in X$，至多有可数个非零Fourier系数$\langle x, e_\lambda\rangle$．且满足Bessel不等式，

$$\sum_{\lambda\in I}|\langle x, e_\lambda\rangle|^2\leq\|x\|^2$$

证明 对于每一个固定的$m=1, 2, \cdots$，根据(6)，使得

$|\langle x, e_\lambda\rangle| > \frac{1}{m}$成立的Fourier系数的个数必有限．令

$E_m = \{e_\lambda |\ |\langle x, e_\lambda\rangle| > \frac{1}{m}\}$，$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$则集$E$是可数的．

并且，$e_\lambda \in \{e_\lambda, \lambda \in I\} - E$时，$\langle x, e_\lambda\rangle = 0$．根据Bessel不等式(8)，有，

$$\sum_{\lambda \in I} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 = \sum_{\lambda \in E} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$$

标准直交序列使用时非常方便，下面我们介绍将线性无关序列化成标准直交序列的方法．

3.3-12 **引理**（克莱姆—施密特(Gram-Schmidt)**构造法**）．设(x_n)是内积空间X中的线性无关序列．则(x_n)可化成标准直交序列(e_j)．并且对于每一个n，有，

$$\mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_n\} = \mathrm{Span}\{x_1 \cdots x_n\}.$$

证明　Gram-Schmidt构造过程如下：

第一步，令$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$［因为$(x_n)$线性无关，于是，$x_1 \neq \theta$］．

第二步，令，$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$．由于，$\{x_1, x_2\}$线性无关，所以，$v_2 \neq \theta$．由$\langle v_2, e_1\rangle = 0$，故$v_2 \perp e_1$．取，

$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$．

第三步，向量$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2$，不为零向量，且，$v_3 \perp e_1$，$v_3 \perp e_2$，取$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$依此类推．

第n步．向量，

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n,\ e_k \rangle e_k \tag{12}$$

为非零向量，且与e_1，…，e_{n-1}直交．由此可得

$$e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n . \tag{13}$$

此即Gram-Schmidt过程的一般公式．

由(12)和(13)知，对每一个自然数k（$1 \leqslant k \leqslant n$），$x_k$是$e_1$，…$e_n$的线性组合．反之，$e_k$也是$x_1$，…，$x_n$的线性组合．因此，对于每一个$n$，

$$\mathrm{Span}\{e_1,\ \cdots,\ e_n\} = \mathrm{Span}\{x_1, \cdots,\ x_n\}.$$

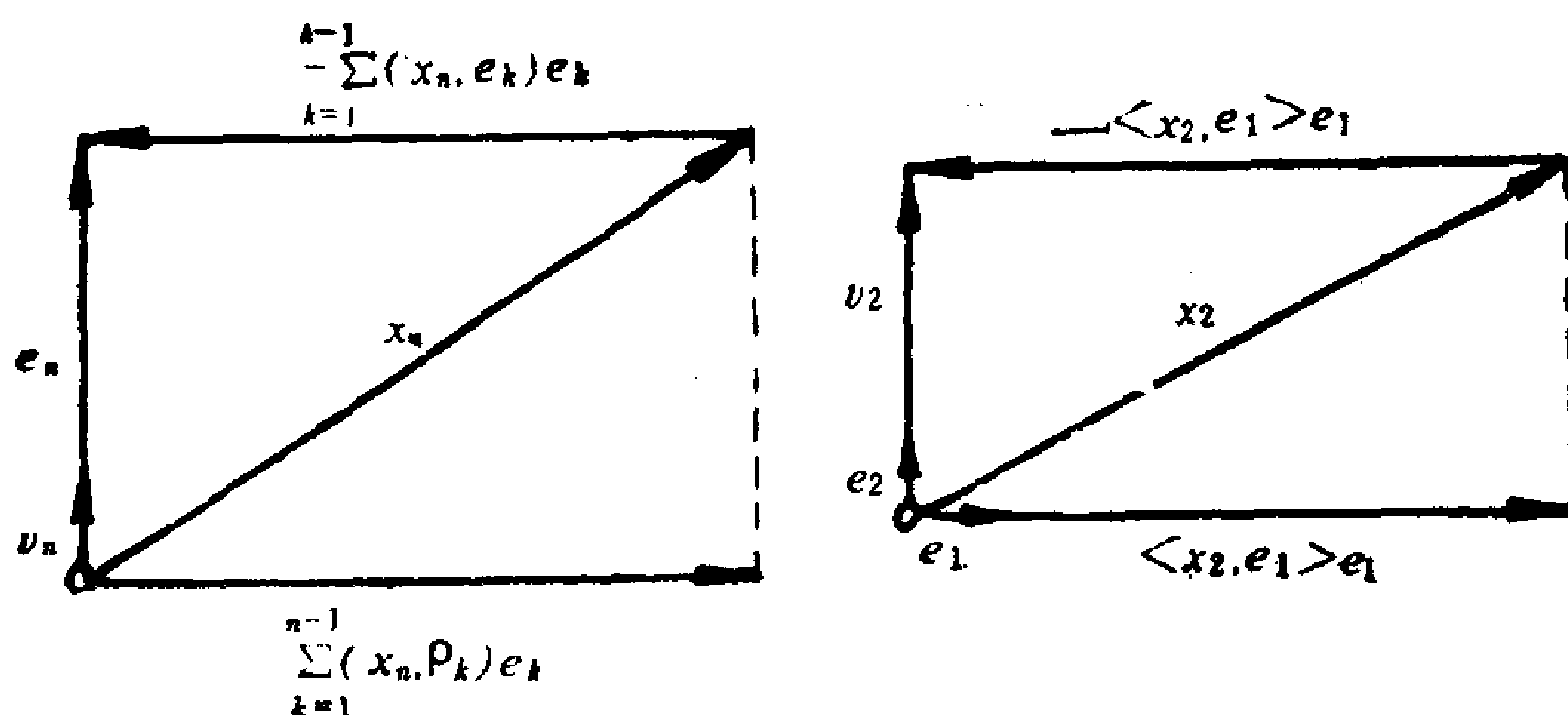


图22　Gram-Schmidt方法的说明

习　题　3.3

1．证明n维内积空间有一标准直交基．

$\{b_1, \cdots, b_n\}$.

2. 给出l^2中一个元素x，使得(8)中严格不等式成立.

3. 设(e_k)为内积空间X中一标准直交序列，证明对于任意x，$y \in X$，有，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leqslant ||x||\,||y||.$$

4. 设$x_j(t) = t^j$ $(j = 0, 1, 2\cdots)$定义在$[-1, 1]$上，按内积$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, y(t)\, dt$将序列$(x_0, x_1, \cdots)$的前三项标准直交化.

5. 设$x_1(t) = t^2$，$x_2(t) = t$，$x_3(t) = 1$均定义在$[-1, 1]$上，按习题4的内积，依x_1，x_2，x_3，的顺序将其标准直交化，并与习题4的结果作比较.

6. 若级数(9)收敛于x，证明(10)的和为$||x||^2$.

7. 举例说明收敛的级数$\sum_{k=j}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$不一定有和$x$.

8. 设(x_j)是内积空间X中的序列，$s_n = x_1 + \cdots + x_n$，证明若$||x_1|| + ||x_2|| + \cdots$收敛，则$(s_n)$为Cauchy序列.

9. 证明在Hilbert空间中，$\sum_{j=1}^{\infty} ||x_j||$收敛蕴涵$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$收敛.

10. 设(e_j)为Hilbert空间H的标准直交序列，若$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$，$y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$，证明，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\beta_j}$绝对收敛. 且，$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\beta_j}$

11. 设(e_k)为Hilbert空间H中一标准直交序列，证明对于每一

个$x\in H$，向量$y=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$是$H$中一个元素，且，$(x-y)\perp e_k$，$k=1,2\cdots$.

12．设(e_k)为Hilbert空间H中一标准直交序列．$y=\text{Span}\{e_k\}$，证明$x\in\overline{Y}$的充要条件是x可表示成$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e^k$.

13．设(e_n)与$(\tilde{e}_n)$为Hilbert空间H中二标准直交序列．令$Y_1=\text{span}\{e_n\}$，$Y_2=\text{span}\{\tilde{e}_n\}$利用习题12证明$Y_1=Y_2$的充要条件是，

(a) $e_n=\sum_{m=1}^{\infty}\langle e_n,\tilde{e}_m\rangle\tilde{e}_m$,　(b) $\tilde{e}_n=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\tilde{e}_n,e_k\rangle e_k$.

§3.4　完全标准直交集和序列

我们知道，在空间l^2中，$e_1=(1,0,0,\cdots)$，$e_2=(0,1,0,\cdots)$ $e_n=(\underbrace{0,0,0,}_{n-1个}\cdots0,1,0\cdots)$，组成$l^2$中一标准直交集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，但由于$\overline{\text{Span}\{e_1,\cdots,e_n\}}\neq l^2$．我们就说集$\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$所含元素不够完全．下面，在内积空间和Hilbert空间中引进非常有用的完全标准直交集的概念．

3.4-1　**定义（完全的标准直交集）**设M是内积空间X中的标准直交集（或序列），如果，

$$\overline{\text{Span}M}=X$$

则称M是X中完全的标准直交集（或序列）

3.4-2　空间$\mathbb{R}^3$中由$e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$，$e_3=(0,0,1)$组成的标准直交集$\{e_1,e_2,e_3,\}$是完全的．

3.4-3　空间l^2中，序列(e_n)，$[e_n=(\delta_{nj})]$，是一完全标准直交序列.

3.4-4　(Legendre**多项式**)．$[-1,\ 1]$上的连续实值函数全体．按内积．

$$\langle x,\ y\rangle=\int_{-1}^{1}x(t)\,y(t)\,dt$$

构成一内积空间X，其X的完备化内积空间为$L^2[-1,\ 1]$．令$x_n(t)=t^n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，$t\in[-1,1]$，(x_n)是一线性无关函数序列．利用Gram-Schmidt方法得一标准直交序列(e_n)，$e_n(t)$是n次多项式．下面证明(e_n)是$L^2[-1,\ 1]$中的完全标准直交序列．

事实上，对于任意$x(t)\in L^2[-1,\ 1]$，及每个$\varepsilon>0$，由于$L^2[-1,\ 1]$是X的完备化空间，于是X在$L^2[-1,\ 1]$中稠密，必存在$[-1,\ 1]$上连续的函数$y(t)$，使得，

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于连续函数$y(t)$，存在多项式$p(t)$，使得对于任意$t\in[-1,\ 1]$，有，

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

(根据4.11节中Weierstrass逼近定理)．
从而推出，

$$\|y-p\|^2=\int_{-1}^{1}|y(t)-p(t)|^2dt<2\cdot\frac{\varepsilon^2}{8}=\frac{\varepsilon^2}{4}$$

合起来，有

$$\|x-p\|\leqslant\|x-y\|+\|y-p\|<\varepsilon.$$

由Gram-Schmidt过程知，对充分大的m，

$p(t)\in \mathrm{Span}\{e_0, e_1, \cdots e_m\}$，因此，证得$(e_n)$是$L^2[-1, 1]$中完全标准直交序列．

在实际问题中，需要求出$e_n(t)$的确切表达式．可以证明．

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}p_n(t) \qquad (n=0, 1, 2, \cdots,)$$

其中，
$$p_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$$

$p_n(t)$称为n阶Legendre多项式，$[p_n(t)]$是$L^2[-1,1]$中的直交序列．（参看图23）其前6项如下：

$$p_0(t)=1 \qquad p_1(t)=t$$

$$p_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1) \qquad p_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)$$

$$p_4(t)=\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3)$$

$$p_6(t)=\frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t)$$

3.4-5 **定理(完全性)**．设$M=\{e_i\}$为内积空间X的标准直交集．则，

(a)．若M在X中是完全的，那么不存在非零的$x\in X$与其M的每个元素直交．即，

$$x\perp M 蕴涵 x=\theta. \tag{1}$$

(b)．若X为完备的内积空间，即Hilbert空间，条件(1)

也是M为完全的充分条件.

证明 (*a*) 设H是X的完备化内积空间，X可视为H的稠密子空间。因为M在X中是完全的，根据定义3.4-1，Span$M$在X中稠密，于是Span$M$也在H中稠密.利用引理3.2-7，得到$M^{\perp}=\{\theta\}$. 即(1) 成立.

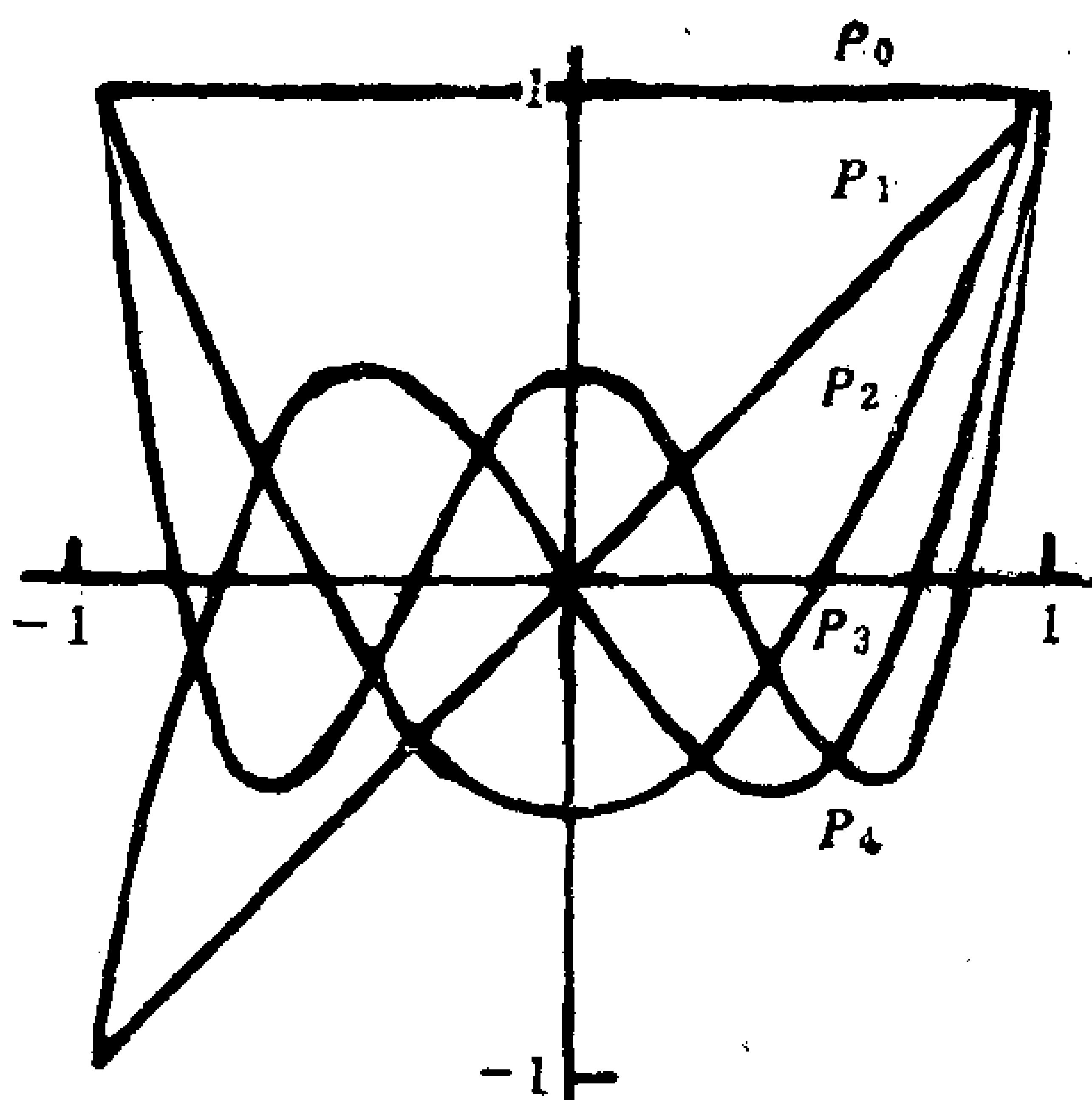


图23 Legendre多项式

(*b*)若X为希耳伯特空间. M为X中一标准直交集且满足条件(1)：$M^{\perp}=\{\theta\}$，于是根据引理3.2-7，$\overline{\text{span}M}=X$，故证得$M$是完全的.

由定理3.4-5知，完全标准直交集不能由添加新元素扩充为更大的标准直交集，也就是说它本身是最大的标准直交集.

判定完全性的一个重要标准是从Bessel不等式得出的. 为此，我们考虑Hilber空间H中任意给定的标准直交集M. 从引理3.3-11可知每个固定的$x\in M$，至多有可数个非零傅里叶系数.将这些系数排成一序列：$\langle x,e_1\rangle,\langle x,e_2\rangle,\cdots$得到Bessel不等式，

$$\sum_k|\langle x,\ e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{2}$$

其中左边为一无穷级数或有限和.等号成立时得著名的parseval关系式，

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 \tag{3}$$

3.4-6 **定理(完全性)**. 在Hilbert空间H中，标准直交集M在H中为完全的当且仅当对所有的$x\in H$，parseval关系式(3) 成立(其和取遍x关于M的所有非零Fourier系数)

证明 (a) 若M不是完全的，由定理3.4-5知，H中存在一非零元x，$x\perp M$，因此在(3)中对所有的k，有$\langle x, e_k\rangle=0$. 即(3) 中左边为0，这与$\|x\|^2\neq 0$矛盾. 从而证明了若对所有$x\in H$ (3) 式成立，则M在H中必是完全的.

(b)若M在H中是完全的. 考虑任一$x\in H$，其非零Fourier系数可排成一序列$\langle x, e_1\rangle$，$\langle x, e_2\rangle$，…，我们由下式定义y

$$y=\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k \tag{4}$$

其收敛性由定理3.3-10得出. 现证明$x-y\perp M$，对(4)中出现的每个e_i，利用标准直交性，及内积连续性，

$$\langle x-y, e_i\rangle=\langle x, e_i\rangle-\sum_k \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_i\rangle$$

$$=\langle x, e_i\rangle-\langle x, e_i\rangle=0$$

对于不在(4) 中的每一个$v\in M$，有，$\langle x, v\rangle=0$. 于是，$\langle x-y, v\rangle=\langle x, v\rangle-\sum_k \langle x, e_k\rangle\langle e_k, v\rangle=0-0=0$.

即，$x-y\perp M$. 因为M在H中是完全的，根据定理3.4-5，$M^{\perp}=\{\theta\}$. ，故$x-y=\theta$，$x=y$，. 由(4) 及再次利用标准直交性，及内积连续性，得，

$$\|x\|^2=\langle \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m\rangle\ _m\rangle$$

$$= \sum_k \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}$$

即证得(3)式成立.

现在我们转而考虑Hilbert 空间的可分性与标准直交集的关系.

3.4-7 定理（可分Hilbert空间）. 设H为一Hilbert空间. 则,

(a)若H为可分,那么H中任一标准直交集均可数.

(b)若H中包含一个完全标准直交序列(e_i), 那么H为可分.

证明 (a) 设H为可分, 则H中必存在一可数稠密子集B. 令M为H中任一标准直交集,对于任意x, $y \in M$, $x \neq y$, 有,

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2$$

因此, x的半径为$\frac{2}{3}$的球形邻域N_x与y的半径为$\frac{2}{3}$的球形邻域N_y不相交. 由B在H中稠密, 必存在$b \in B$及$\tilde{b} \in B$, 使得$b \in N_x$, $\tilde{b} \in N_y$. 因为, $N_x \cap N_y = \varnothing$. 所以, $b \neq \tilde{b}$. 因而,若M为非可数,则存在不可数个两两不相交的球形邻域. 所以B亦不可数,这与B可数矛盾。由此得出M必可数.

(b) 由题设(e_k)为H中一完全标准直交序列, 令A是下列线性组合

$$r_1^{(n)} e_1 + \cdots + r_n^{(n)} e_n \qquad n = 1, 2 \cdots$$

的全体所成之集. 其中, $r_k^{(n)} = a_k^{(n)} + i b_k^{(n)}$, 且$a_k^{(n)}$与$b_k^{(n)}$为有理数. 显然$A$为可数集. 下面证$A$在$H$中稠密. 对于任意$x \in H$和每个$\varepsilon > 0$, 因为序列($e_k$)在$H$中为完全的. 于是

$x \in H = \overline{\text{Span}\{e_k\}}$，必存在一线性组合 $\sum_{k=1} \alpha_k e_k$，使得，

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理3.3-7中的(7)式有，

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \quad e_k \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为有理数在R上稠密，对于每一个$\langle x, e_k \rangle$，存在一$r_k^{(n)}$(具有有理的实部与虚部)，使得，

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} [\langle x, e_k \rangle - r_k^{(n)}] e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此，$v = \sum_{k=1}^{n} r_k^{(n)} e_k \in A$，且满足，

$$\begin{aligned} \| x - v \| &\leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k - v \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了A在H中稠密，从而H为可分.

在任一Hilbert空间$H \neq \{\theta\}$中，均存在一完全标准直交集. 对有限维 Hilbert空间这是显然的. 对无限维可分Hilbert空间可由 Gram-Schmidt过程产生. 对非可分的Hilbert空间一个非构造性的证明可从Zorn引理推出（我们将在4.1节中介绍Zorn引理）.

在一给定的Hilbert空间$H \neq \{\theta\}$中，所有完全标准直交集均有相同的势. 称其为Hilbert维数或称为H的直交维数（若$H = \{\theta\}$，维数定义为0），对一有穷维空间上述论述

是显而易见的，因为Hilbert维数也就是代数意义下的维数。对一无穷维且可分的Hilbert空间上述结论可从定理3.4-7中推出．对一般的Hilbert空间其证明要用到集合论某些较深的知识作为工具（这里证明略去）

为了研究Hilbert空间及其上的线性算子，首先我们回顾§3.1中内积空间同构的概念，它完全适合Hilbert空间．设H和$\widetilde{H}$是同一数域上的两个Hilbert空间，如果存在双射线性算子 $T:H\to\widetilde{H}$，使得对于所有的$x,y\in H$有，

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle \tag{5}$$

则称H与$\widetilde{H}$是同构的Hilbert空间，称T是H到$\widetilde{H}$的同构映射．因为T是线性的，其保持了向量空间结构，且(5)式表明T是等距的，又由T是双映射，从而得出H与$\widetilde{H}$不仅在代数上而且在度量上可以不加区别．在同一数域上的两个抽象的Hilbert空间其区别仅在于它们的维数，这就是下述定理的意义所在．

3.4-8 **定理（同构和Hilbert维数）**．设H和$\widetilde{H}$是同一数域K上的两个Hilbert空间，其为同构的充分必要条件是它们有相同的Hilbert维数．

证明 (a)若H与$\widetilde{H}$同构，则存在双射线性算子$T:H\to\widetilde{H}$且满足(5)式．即保持内积不变，于是T将H中每一完全标准直交集映射到$\widetilde{H}$中为一完全标准直交集．因此H与$\widetilde{H}$有相同的Hilbert维数．

(b) 反之，假设H与$\widetilde{H}$有相同的Hilbert维数，当$H=$

$\{\theta\}$ 及$\widetilde{H}=\{\theta\}$时，显然 H与$\widetilde{H}$同构．设$H\neq\{\theta\}$，则$\widetilde{H}\neq\{\theta\}$．对$H$中任一完全标准直交集 M和$\widetilde{H}$中任一完全标准直交集$\widetilde{M}$有相同的基数，所以可用相同的指标集$\{k\}$加以标号，记$M=\{e_k\}$和$\widetilde{M}=\{\widetilde{e}_k\}$.

为了证明H和$\widetilde{H}$是同构的，我们构造一个H到$\widetilde{H}$上的映射，对于每一个$x\in H$，由于M是完全的标准直交集，根据定理3.4-6得出，

$$x=\sum_k\langle x,e_k\rangle e_k \tag{6}$$

由贝塞尔不等式有$\sum_k|\langle x,e_k\rangle|^2<\infty$，定义，

$$\widetilde{x}=Tx=\sum_k\langle x,e_k\rangle\widetilde{e}_k \tag{7}$$

从定理3.3-10知其收敛，所以，$\widetilde{x}\in\widetilde{H}$．因为内积对第一个因子是线性的，易证$T$为线性算子．由(7)及(6)得，

$$\|\widetilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k|\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2$$

由此知T是等距的．利用§3.1中的公式(10)和(11)可证出T保持内积不变．等距蕴涵着单射，事实上，若$Tx=Ty$，则

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0.$$

从而，$x=y$．由定理2.6-10知T为单射的．

最后我们证明T为满射．对于$\widetilde{H}$中任意给定的

$$\widetilde{x}=\sum_k\langle\widetilde{x},\widetilde{e}_k\rangle\widetilde{e}_k.$$

由Bessel不等式$\sum_k|\langle\widetilde{x},\widetilde{e}_k\rangle|^2<\infty$，知级数

$$\sum\langle\tilde{x},\tilde{e}_k\rangle e_k$$

在H中收敛，令其收敛于x（参阅定理3.3-10）且$\langle\tilde{x},\tilde{e}_k\rangle=\langle x,e_k\rangle$，因此由(7)得到$\tilde{x}=Tx$．即证明了$T$为满射．从而$H$与$\tilde{H}$为同构的．

习 题 3.4

1．若F为一内积空间X中的标准直交基，我们能否将每个$x\in X$表示为F中元素的线性组合？

2．证明若Hilbert空间H的直交维数为有限，则它等于H作为一向量空间的维数．反之，若后者有限其维数亦为前者．

3．由parseval等式(3)证明下列公式

$$\langle x,y\rangle=\sum_k\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e^k\rangle}.$$

4．证明在Hilbert空间中标准直交族(e_k)，$k\in I$，为完全的当且仅当习题3的关系式对此空间中的每对x与y均成立．

5．设H为可分的Hilbert空间，且M是H的可数稠密子集．证明对M用Gram-Schmit过程可得H的一完全标准直交序列．

6．证明在可分的Hilbert空间H中任一标准直交序列F，存在一包含F的完全标准直交序列$\tilde{F}$．

7．设M为内积空间X中一完全集．若对所有的$x\in M$有，$\langle v,x\rangle=\langle w,x\rangle$，证明$v=w$．

8．设M是Hilbert空间H一子集，假设对所有的v，$w\in H$，及每个$x\in M$，由$\langle v,x\rangle=\langle w,x\rangle$，可得$v=w$．证明$M$在$H$中为完全的．

§3.5 Hilbert空间上泛函的表示

实际问题要求了解各种空间上有界线性泛函的一般形

式，其重要性已在§2.10中阐明．对一般的Banach空间这样的公式及其推导过程有时是复杂的．然而在Hilbert空间的情况下却出人意外的简单．

3.5-1 Riesz定理(Hilbert空间上的泛函) Hilbert空间H上任一有界线性泛函可由内积表示，即

$$f(x)=\langle x,z\rangle \tag{1}$$

其中z依赖于f，且由f唯一确定，并有范数

$$\|z\|=\|f\| \tag{2}$$

证明 我们要证：

(a) f有表示式(1)；

(b) (1)中之z是唯一的；

(c) 公式(2)成立．

详细证明如下：

(a) 若$f=0$，则取$z=\theta$，于是(1)与(2)成立．设$f\neq 0$，若(1)存在，那么首先$z\neq\theta$，其次对于所有使$f(x)=0$的x有$\langle x, z\rangle=0$，即，$z\perp N(f)$．由定理2.6-9，$N(f)$是一向量空间，从定理2.7-11知其为闭的．$f\neq 0$可知$N(f)\neq H$，由投影定理3.2-5知$N(f)^{\perp}\neq\{\theta\}$，因此存在一个$z_0\in N(f)^{\perp}$，$z_0\neq\theta$，设，

$$v=f(x)z_0-f(z_0)x.$$

其中$x\in H$为任意．于是得，

$$f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0.$$

即$v\in N(f)$．则有

$$0=\langle v, z_0\rangle=f(x)\langle z_0,z_0\rangle-f(z_0)\langle x,z_0\rangle$$

因为$z_0\neq 0$，于是$\langle z_0, z_0\rangle=\|z_0\|^2\neq 0$，

$$f(x)=\frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}\langle x, z_0\rangle$$

取$z=\frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2}z_0$，(1)式得证.

(*b*) 证(1)式中的z是唯一的. 假设还有一个z_1，对所有的$x\in H$有，

$$f(x)=\langle x, z\rangle=\langle x, z_1\rangle$$

则，$\langle x, z-z_1\rangle=0$. 选特殊的$x=z-z_1$，得.

$\|z-z_1\|^2=0$，从而$z_1=z$，即z的唯一性得证.

(*c*) 证(2)式成立. 若$f=0$，则$z=\theta$，于是(2)式成立. 设$f\neq0$，则$z\neq\theta$. 在(1)中当$x=z$时，得，

$$\|z\|^2=\langle z,\ z\rangle=f(z)\leqslant\|f\|\,\|z\|$$

从而，$\|z\|\leqslant\|f\|$. 由(1)式及引理3.1-2中的Schwarz不等式得出.

$$|f(x)|=|\langle x, z\rangle|\leqslant\|x\|\,\|z\|.$$

因此，$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle x, z\rangle|\leqslant\|z\|$. 故(2)式成立.

3.5-2 引理(相等性). 若对内积空间X中所有w，均有$\langle v_1,\ w\rangle=\langle v_2,\ w\rangle$，则$v_1=v_2$. 特别，若对所有$w\in X$均有$\langle v,\ w\rangle=0$，则$v=\theta$.

证明 由假设，对所有w，

$$\langle v_1-v_2, w\rangle=\langle v_1, w\rangle-\langle v_2, w\rangle=0.$$

对$w=v_1-v_2$. 得$\|v_1-v_2\|^2=0$. 因此$v_1-v_2=\theta$，即$v_1=v_2$. 特别$\langle v,\ w\rangle=0$. 当$w=v$时，则$\|v\|^2=0$所以$v=\theta$.

Hilbert空间上有界线性泛函的广泛应用在很大程度上是由于Riesz表示式(1)的简单性，不仅如此，(1)式在Hi-

ibert空间的算子理论上也是十分重要的.

3.5-3 定义(复双线性泛函). 设X与Y是同一数域K上的向量空间. 如果映射 $h: X\times Y\to K$满足下列性质, 对所有x, x_1, $x_2\in X$及所有y, y_1, $y_2\in Y$, 任意数α, $\beta\in K$有,

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & h(x_1+x_2, y)=h(x_1, y)+h(x_2, y).\\ (b) & h(x, y_1+y_2)=h(x, y_1)+h(x, y_2)\\ (c) & h(\alpha x, y)=\alpha h(x, y)\\ (d) & h(x, \beta y)=\overline{\beta}\, h(x, y)\end{array}\right\} \quad (3)$$

则称h是$X\times Y$上的复双线性泛函. 若$K=R$, 即X、Y都是实向量空间时, h称为双线性泛函.

若X、Y是赋范空间, 且存在一实数c, 使对所有$x\in X$及所有$y\in Y$, 有

$$|h(x, y)|\leqslant c\|x\|\,\|y\| \quad (4)$$

则称h是有界的. 且范数定义为

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\in X-\{\theta\}\\ y\in Y-\{\theta\}}}\frac{|h(x, y)|}{\|x\|\,\|y\|}=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|h(x, y)| \quad (5)$$

由(4)和(5)可得有界双线性泛函满足

$$|h(x, y)|\leqslant\|h\|\,\|x\|\,\|y\|. \quad (6)$$

例如, 内积空间的内积是有界双线性泛函.

从定理3.5-1可得Hilbert空间上双线性泛函的一般表示.

3.5-4 定理(Riesz表示). 设H_1, H_2为Hilbert空间, 且$h: H_1\times H_2\to K$为一有界复双线性泛函, 则h有表示式

$$h(x, y)=\langle Sx, y\rangle \quad (7)$$

其中: S: $H_1\to H_2$为一有界线性算子, 且由h唯一确定, 并

有范数

$$\|S\| = \|h\|. \tag{8}$$

证明　对于固定的x，$h(x, y)$关于y是有界线性泛函，由定理3.5-1，存在唯一的$z \in H_2$，使得，

$$h(x, y) = \langle z, y\rangle \tag{9}$$

这里z依赖于x．利用(9)式定义算子$S: H_1 \to H_2$，由$z = Sx$给定．

S是线性的．事实上，其定义域是向量空间H_1．由(7)及复双线性泛函的性质，对所有$y \in H_2$，有

$$\begin{aligned}\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y)\\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)\\ &= \alpha\langle Sx_1, y\rangle + \beta\langle Sx_2, y\rangle\\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y\rangle\end{aligned}$$

根据引理3.5-2得，

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

S是有界的．实际上，除去$S = 0$之外，从(5)和(7)有，

$$\begin{aligned}\|h\| &= \sup_{\substack{x \neq \theta\\ y \neq \theta}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \geqslant \sup_{\substack{x \neq \theta\\ Sx \neq \theta}} \frac{|\langle Sx, Sx\rangle|}{\|x\|\,\|Sx\|}\\ &= \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|\end{aligned}$$

从而证明了S的有界性，且$\|S\| \leqslant \|h\|$．

现证(8)式．利用Schwarz不等式

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq \theta\\ y \neq \theta}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Sx\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|} = \|S\|.$$

因此，$\|h\| \leqslant \|S\|$，(8)式成立．

S是唯一的．事实上，假设存在一有界线性算子$T:H_1\to H_2$．使得对所有$x\in H_1$和每个$y\in H_2$有，

$$h(x,y)=\langle Sx,y\rangle=\langle Tx,y\rangle$$

由引理3.5-2得出，对所有$x\in H_1$，$Sx=Tx$，
所以$S=T$．

习 题 3.5

1．证明R^3上任一线性泛函可由点积表示。

$$f(x)=x\cdot z=\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+\xi_3\zeta_3$$

2．证明l^2上任一有界线性泛函f可表示为下述形式，

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\overline{\zeta_j}\qquad [z=(\zeta_j)\in l^2]$$

3．若z为内积空间X中任一固定元素，证明$f(x)=\langle x,z\rangle$定义X上一有界线性泛函f，其范数为$\|z\|$．

4．考虑习题3，若映射$X\to X^*$由$z\mapsto f$给定且为满射，证明X必为-Hilbert空间．

5．证明实空间l^2的对偶空间为l^2（利用定理3.5-1）．

6．证明定理3.5-1定义了一个等距双射$T:H\to H^*$，$z\mapsto f_z=\langle\cdot,z\rangle$．其不为线性但为共轭线性的，即，

$$\alpha z+\beta v\mapsto\overline{\alpha}f_z+\overline{\beta}f_v．$$

7．证明Hilbert空间H的对偶空间H^*是Hilbert空间，具有内积．

$$\langle f_z,f_v\rangle=\overline{\langle z,v\rangle}=\langle v,z\rangle$$

式中$f_z(x)=\langle x,z\rangle$．

8．证明任何Hilbert空间H与其二次对偶空间$H^{**}=(H^*)^*$同构（该性质称为H的自反性）

9．证明内积空间X上的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$是有界复双线性泛函$h$．在

这种情况下$||h||$是什么？

10．若X为向量空间且h是$X\times X$上的复双线性泛函．证明对于固定的y_0，$f(x)=h(x,y_0)$定义X上一线性泛函f．

11．设X和Y是赋范空间，证明$X\times Y$上的有界复双线性泛函h是二元连续的．

12．（Hermite泛函）设X是数域K上的向量空间，Hermite复双线性泛函或简称$X\times X$上的Hermite泛函h是一映射h：$X\times X\to K$，使得对所有x，y，$z\in X$，$a\in K$有，

$$h(x+y,z)=h(x,z)+h(y,z)$$

$$h(ax,y)=ah(x,y)$$

$$h(x,y)=\overline{h(y,x)}$$

若$K=R$，最后一个条件是什么？h成为X上的内积必须附加什么条件？

13．设X为向量空间且h为$X\times X$上的Hermite泛函，若对所有$x\in X$，$h(x,x)\geqslant 0$，则称h为半正定泛函．证明半正定的h满足Schwarz不等式．

$$|h(x,y)|^2\leq h(x,x)h(y,y).$$

14．（拟范数）．若h满足习题13中的条件，证明

$$P(x)=\sqrt{h(x,x)}$$

定义X上一个拟范数。（参看§2．3习题10）

§3.6　Hilbert伴随算子

利用上节所得结果我们引进Hilbert空间上有界线性算子的Hilbert伴随算子．

3.6-1　**定义**（**Hilbert伴随算子**T^*）．设H_1与H_2是Hilbert空间，$T:H_1\to H_2$是有界线性算子，如果存在算子$T^*:H_2\to H_1$，使得对于所有$x\in H_1$和$y\in H_2$，有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{*}y\rangle \tag{1}$$

则称T^*为T的Hilbert伴随算子.

3.6-2 **定理(存在性)** 定义3.6-1中T的Hilbert伴随算子T^*是唯一存在的，而且是有界线性算子其范数为

$$\|T^*\| = \|T\| \tag{2}$$

证明. 公式

$$h(y,x) = \langle y, Tx\rangle \tag{3}$$

定义$H_2 \times H_1$上一复双线性泛函.这是因其内积为复双线性泛函以及T是线性算子.

h为有界的. 事实上，由Schwarz不等式

$$\begin{aligned} |h(y,x)| &= |\langle y, Tx\rangle| \leqslant \|y\|\|Tx\| \\ &\leqslant \|T\|\|x\|\|y\| \end{aligned}$$

这也得出$\|h\| \leqslant \|T\|$. 且,

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ y\neq\theta}} \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{\|y\|\|x\|} \geqslant \sup_{\substack{x\neq\theta \\ T\neq\theta}} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|Tx\|\|x\|} = \|T\|$$

因此证得

$$\|h\| = \|T\|. \tag{4}$$

由定理3.5-4，h的Riesz表示式，存在唯一的有界线性算子S: $H_2 \to H_1$，使得

$$h(y,x) = \langle Sy, x\rangle. \tag{5}$$

且，$\|S\| = \|h\|$. 令$T^* = S$. 于是，由(3)和(5)得,

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle.$$

两边同时取其共轭就证得(1)，并有$\|T^*\| = \|T\|$.即(2)式也成立.

为了便于研究Hilbert伴随算子的性质，兹介绍下述引

理.

3.6-3 引理(零算子). 设X和Y是内积空间,而$Q:X\to Y$是有界线性算子. 则,

(a) $Q=0$的充要条件是对所有的$x\in X$, $y\in Y$

$\langle Qx,y\rangle=0$成立.

(b) X为复内积空间时, 若 $Q:X\to X$对 所有$x\in X$, $\langle Qx,x\rangle=0$, 则$Q=0$.

证明. (a)若$Q=0$, 显然$\langle Qx,y\rangle=0$. 反之若对于所有$x\in X$与$y\in Y$有$\langle Qx,y\rangle=0$,由引理3.5-2知, $Qx=\theta$, 即$Q=0$.

(b)由假设, 对于每一个$v=\alpha x+y\in X$,

$$\langle Qv,\ v\rangle=0.$$

即,

$$\begin{aligned}0&=\langle Q(\alpha x+y),\alpha x+y\rangle\\&=|\alpha|^2\langle Qx,x\rangle+\langle Qy,y\rangle\\&\quad+\alpha\langle Qx,y\rangle+\overline{\alpha}\langle Qy,x\rangle\end{aligned}$$

由假设前两项等于零,$\alpha=1$时有,

$$\langle Qx,y\rangle+\langle Qy,x\rangle=0.$$

$\alpha=i$时有,

$$\langle Qx,y\rangle-\langle Qy,x\rangle=0$$

两式相加得$\langle Qx,y\rangle=0$,利用(a)得$Q=0$.

值得注意的是在引理的(b)部分,条件X为复的是必要的. 若X为实的结论可能不成立. 一个反例是平面R^2旋转一直角的变换Q,Q为线性且对于所有$x\in R^2$,$Qx\perp x$,即$\langle Qx,x\rangle=0$但$Q\neq 0$.

我们现在给出一些Hilbert伴随算子的一般性质.

3.6-4 定理 (**Hilbert伴随算子的性质**)设H_1、H_2是

Hilbert空间．$S:H_1\to H_2$和$T:H_1\to H_2$是有界线性算子，α是任意数．则有，

(a) $\langle T^*y,x\rangle=\langle y,Tx\rangle$. ($x\in H_1, y_2\in H_2$)

(b) $(S+T)^*=S^*+T^*$.

(c) $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$

(d) $(T^*)^*=T$. $\qquad$ (6)

(e) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$

(f) $T^*T=0$的充要条件是$T=0$.

(g) $(ST)^*=T^*S^*$ $\qquad$ (假设$H_1=H_2$).

证明 (a) 由(1)得(6a)：

$$\langle T^*y,x\rangle=\overline{\langle x,T^*y\rangle}=\overline{\langle Tx,y\rangle}=\langle y,Tx\rangle$$

(b) 由(1)，对所有$x\in H_1$和$y\in H_2$,

$$\begin{aligned}\langle x,\ (S+T)^*y\rangle&=\langle (S+T)x,y\rangle\\&=\langle Sx,y\rangle+\langle Tx,y\rangle\\&=\langle x,S^*y\rangle+\langle x,T^*y\rangle\\&=\langle x,(S^*+T^*)y\rangle\end{aligned}$$

根据引理3.5-2，对所有的$y\in H_2$, $(S+T)^*y=(S^*+T^*)y$. 依定义，$(S+T)^*=S^*+T^*$.

(c) 对于任意$x\in H_1$, $y\in H_2$.

$$\begin{aligned}\langle(\alpha T)^*y,x\rangle&=\langle y,(\alpha T)x\rangle=\langle y,\alpha(Tx)\rangle\\&=\overline{\alpha}\langle T^*y,x\rangle=\langle\overline{\alpha}T^*y,x\rangle\end{aligned}$$

即$\langle[(\alpha T)^*-\overline{\alpha}T^*]y,x\rangle=0$. 由引理3.6-3(a)得(6c)

$$(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*.$$

(b) 对所有$x\in H_1$和$y\in H$

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$
$$= \langle Tx, y\rangle$$

据引理3.6-3(a)证得 $(T^*)^* = T$.

(e) 由Schwarz不等式，

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$$
$$\leqslant \|T^*Tx\|\,\|x\| \leqslant \|T^*T\|\,\|x\|^2$$

因此，$\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$

由此得出，$\|T^*T\| = \|T\|^2$. 因为由(d)知 $T^{**} = T$，$\|TT^*\| = \|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. 于是，

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2.$$

(f) 从(6e)立即得到(6f).

(g) 利用(1)得，

$$\langle x, (ST)^* y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle$$
$$= \langle Tx, s^* y\rangle = \langle x, T^*S^* y\rangle$$

由引理3.6-3(a)，$(ST)^* y = T^*S^* y$. 从而依算子相等的定义有 $(ST)^* = T^*S^*$.

习题 3.6

1. 证明 $O^* = O$，$I^* = I$.

2. 设 H 是Hilbert空间，$T: H \to H$ 是有界线性双射算子其逆为有界. 证明 $(T^*)^{-1}$ 存在且

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

3. 设 (T_n) 是Hilbert空间上有界线性算子序列且 $T_n \to T$，证明 $T_n^* \to T^*$.

4. 设 H_1 与 H_2 为Hilbert空间，$T: H_1 \to H_2$ 为有界线性算子，若 $M_1 \subset H_1$ 且 $M_2 \subset H_2$ 使得 $T(M_1) \subset M_2$. 证明：$M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp})$.

5. 设习题4中的 M_1 与 M_2 为闭子空间，证明 $T(M_1) \subset M_2$ 当且仅

当$M_1^{\perp}\supset T^*(M_2^{\perp})$。

6．若在习题4中$M_1=N(T)=\{x|Tx=\theta\}$，证明，(a)$T^*(H_2)\subset M_1^{\perp}$

(b)$[T(H_1)]^{\perp}\subset N(T^*)$.

(c)$M_1=[T^*(H_2)]^{\perp}$

7．设T_1与T_2为复Hilbert空间上映射到自身的有界线性算子，若对所有的$x\in H$，

$\langle T_1x,x\rangle=\langle T_2x,x\rangle$

成立，证明$T_1=T_2$.

8．设$S=I+T^*T$:H$\to H$.这里H为Hilbert空间，T为有界线性算子，证明$S^{-1}:S(H)\to H$存在.

9．证明在希耳伯特空间H上一有界线性算子$T:H\to H$共值域为有穷维的充分必要条件是T能表成下述形式

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\langle x,v_j\rangle w_j\qquad (v_j,w_j\in H)。$$

10.(**右移算子**) 设(e_n)为Hilbert空间H中一完全标准直交序列.定义右移算子为这样线性算子$T:H\to H$，对$n=1,2,\cdots$，有$Te_n=e_{n+1}$，试解释名称并求值域、零空间及T的Hilbert伴随算子的范数。

§3.7 自伴算子、酉算子、正规算子

本节介绍利用Hilbert伴随算子定义的在实际中非常重要的三类有界线性算子.

3.7-1 定义(**自伴、酉、正规算子**).设H是希耳伯特空间，$T:H\to H$是有界线性算子. T^*是T的Hilbert伴随算子，若$T^*=T$，则称T是**自伴算子**或称为**Hermite算子**.

若T是双射且$T^*=T^{-1}$，则称T是**酉算子**，

若$TT^*=T^*T$，则称T是**正规算子**，

由定义3.6-1，T与其Hilbert伴随算子T^*有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

若T为自伴算子，上述公式成为.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \tag{1}$$

显然，T为自伴算子的充分必要条件是(1)式成立.

若T为自伴算子或酉算子，则T必为正规算子. 事实上，$T = T^*$蕴涵$T^*T = TT^* = T^2$. $T^* = T^{-1}$蕴涵$T^*T = TT^* = I$.

然而正规算子不一定是自伴算子或酉算子，例如，若$I: H \to H$为恒等算子，则$T = 2iI$为正规算子. 因为$T^* = -2iI$，$TT^* = T^*T = 4I$. 但$T^* \neq T$，$T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{2}iI$.

定义3.7-1的术语是矩阵中相应术语的推广，这从下述例子中可看出.

3.7-2 例子(矩阵). $\mathbf{C}^n$中内积定义如下：

$$\langle x, y\rangle = x^T\overline{y} \tag{2}$$

其中x和y写成列向量，x^T是x的转置. 即，$x^T = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$.

设$T: C^n \to C^n$为一线性算子（由定理2.7-8知其为有界）对C^n给定的一个基，用两个n行方阵A和B分别表示T与它的Hilbert伴随算子T^*.

利用(2)与熟知的乘积转置规则：$(Bx)^T = x^TB^T$得到，

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^T\overline{y} = x^TA^T\overline{y}$$

与 $$\langle x, T^*y\rangle = x^T\overline{B}\,\overline{y}$$

根据§3.6(1)，对所有$x, y \in C^n$. 上述二等式左端相等，从而.

$$B=\overline{A}^{T}$$

因此：

若T为自伴算子（亦称Hermite算子），则表示矩阵A为Hermite矩阵（$\overline{A}^{T}=A$）.

若T为酉算子，则A为酉矩阵($\overline{A}^{T}=A^{-1}$)

若T为正规算子，则A为正规矩阵($\overline{A}^{T}A=A\overline{A}^{T}$)

类似地，对线性算子$T:R^{n}\to R^{n}$，令其表示矩阵为A.

若T是自伴算子，则A是实对称矩阵（$A=A^{T}$）

若T是酉算子，则A是正交矩阵($A^{T}=A^{-1}$)

下面我们给出一个判断算子自伴性的简单而重要的方法.

3.7-3　定理(自伴性)设$T:H\to H$是复Hilbert空间H到其自身的一有界线性算子.则T为自伴的充分必要条件是对所有$x\in H$，$\langle Tx,x\rangle$是实数.

证明．若T为自伴算子，则对所有$x\in H$.

$$\langle Tx,x\rangle=\langle x,Tx\rangle=\overline{\langle Tx,x\rangle}$$

因此，$\langle Tx,x\rangle$是实数.

反过来，若对所有$x\in H$，$\langle Tx,x\rangle$是实数，则，

$$\langle Tx,x\rangle=\overline{\langle Tx,x\rangle}=\overline{\langle x,T^{*}x\rangle}=\langle T^{*}x,x\rangle$$

由引理3.6-3(b)知，$T^{*}=T$.

自伴算子的乘积在应用中经常出现，下面给出其自伴性的一个判别准则.

3.7-4定理（乘积的自伴性）设S、T是Hilbert空间H

上二有界自伴线性算子，则它们的乘积ST为自伴的充分必要条件是算子可交换：

$$ST = TS.$$

证明．由§3.6的(6g)和假设，

$$(ST)^* = T^*S^* = TS$$

因此，$(ST)^* = ST$的充分必要条件是$ST = TS$.

3.7-5**定理（自伴算子序列）**．设(T_n)是Hilbert空间H上的有界自伴线性算子序列，如果$T_n \to T$，则极限算子T亦为H上的自伴算子．

证明．必须证明$T^* = T$．这从$\|T - T^*\| = 0$可得．事实上，由定理3.6-4的(6b)及定理3.6-2，

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n^* - T\|$$

利用$B(H, H)$内的三角不等式

$$\begin{aligned}\|T - T^*\| &\leqslant \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| \\ &= \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| \\ &= 2\|T_n - T\| \to 0\end{aligned}$$

因此，$\|T - T^*\| = 0$

现在我们研究酉算子的一些基本性质．

3.7-6　**定理（酉算子）**．设H是Hilbert空间，$U: H \to H$，$V: H \to H$是H上的二酉算子．则，

(a)　U是等矩的．即对所有$x \in H$，$\|Ux\| = \|x\|$.

(b)　$H \neq \{\theta\}$时，$\|U\| = 1$.

(c)　$U^{-1}(=U^*)$是酉算子．

(d)　UV是酉算子．

(e)　复Hilbert空间H上有界线性算子T为酉算子的充分必要条件是T为等矩且满射的．

证明. (a) 因为$U^*=U^{-1}$蕴涵

$$\|Ux\|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\langle x,U^*Ux\rangle$$
$$=\langle x,x\rangle=\|x\|^2.$$

所以, $\|Ux\|=\|x\|$.

(b) 由(a)立即得出$\|U\|=1$.

(c) 因为U是双射,所以U^{-1}亦为双射且由定理3.6-4,

$$(U^{-1})^*=U^{**}=U=(U^{-1})^{-1}.$$

即U^{-1}是酉算子.

(d) UV为双射, 由定理3.6-4及定理2.6-11,

$$(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}$$

(e) 假设T为等距与满映. 等距蕴涵单射, 所以T为双射, 我们证明$T^*=T^{-1}$. 由T的等距性,

$$\langle T^*Tx,x\rangle=\langle Tx,Tx\rangle=\langle x,x\rangle=\langle Ix,x\rangle$$

因此,

$$\langle (T^*T-I)x,x\rangle=0.$$

利用引理3.6-3(b), $T^*T-I=0$. 从而, $T^*T=I$,

$$TT^*=TT^*(TT^{-1})=T(T^*T)T^{-1}=TIT^{-1}=I.$$

合起来, $T^*T=TT^*=I$, 因此$T^*=T^{-1}$. 这就证明了T为酉算子.

逆命题成立是显然的, 因为由(a)得出T是等距的, 并且由定义T为满射.

注意等距算子不一定是酉算子, 因为它可能不是满射. 例如, 由$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots,) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$给出的右移算子$T: l^2 \to l^2$. 显然$T$是等距的但$T$不是满射. 因此$T$不是酉算子.

习 题 3.7

1．若S与T是Hilbert空间H上有界自伴线性算子，且α与β是实数．证明$\widetilde{T}=\alpha S+\beta T$是自伴算子．

2．证明若$T: H\to H$是有界自伴性线算子，则T^n亦是．其中n是正整数．

3．对Hilbert空间H上任一有界线性算子T，证明算子

$$T_1=\frac{1}{2}(T+T^*) \quad 与 \quad T_2=\frac{1}{2i}(T-T^*)$$

是自伴的．且证明

$T=T_1+iT_2$　与　$T^*=T_1-iT_2$成立，再证其唯一性．即，$T_1+iT_2=S_1+iS_2$蕴涵$S_1=T_1$与$S_2=T_2$．这里S_1与S_2由假设为自伴算子．

4．设算子$T:C^2\to C^2$是由$Tx=(\xi_1+i\xi_2,\ \xi_1-i\xi_2)$定义的，其中$x=(\xi_1,\ \xi_2)$．试求$T^*$并证明

$T^*T=TT^*=2I$．并求习题4中定义的T_1与T_2．

5．若$T: H\to H$是有界自伴线性算子且$T\neq 0$．证明(a)对$n=2$、4、8、16，…，$T^n\neq 0$成立．

(b)对每一个$n\in N$，$T^n\neq 0$亦成立．

6．证明酉矩阵的列向量关于C^n上的内积构成一标准直交集．

7．证明等距线性算子$T: H\to H$满足$T^*T=I$．这里I是H上的恒等算子．

8．证明等距线性算子$T:H\to H$若不为酉算子则将Hilbert空间H映射到H中一适当的闭子空间．

9．设X为一内积空间，$T:X\to X$为等距线性算子，若X的维数$<\infty$，证明T为酉算子．

10．(酉等价)，设S与T为Hilbert空间H上的线性算子．若在H上存在酉算子U，使得，

$$S=UTU^{-1}=UTU^{*}$$

则称算子S与T为酉等价．若T为自伴的，证明S亦是自伴的．

11．证明T为正规的充分必要条件是习题4中的T_1与T_2可交换．

12．若T_n：$H\to H$（$n=1, 2,\cdots$）为正规线性算子，且$T_n\to T$．证明T是正规算子．

13．若S与T为正规线性算子，且满足
$ST^{*}=T^{*}S$和$TS^{*}=S^{*}T$．证明其和$S+T$与其积ST均为正规算子．

14．证明在复希耳伯特空间H上的有界线性算子T：$H\to H$为正规的充分必要条件是：对所有的$x\in H$，$\|T^{*}x\|=\|Tx\|$．利用这个结论证明：对正规线性算子T，有

$$\|T^{2}\|=\|T\|^{2}.$$

第四章　赋范和Banach空间的基本定理

本章内容包括赋范和Banach空间中四个重要定理．它们是Hahn-Banach定理、一致有界性定理、开映象定理以及闭图象定理．且均为Banach空间理论的基础（第一个定理对于任何赋范空间都成立．）

重要概念、主要内容的概述

1．Hahn-Banach定理4.2-2及4.3-1、4.3-2是向量空间上线性泛函的一个延拓定理．它保证赋范空间有足够多的线性泛函，并使伴随算子与对偶空间的理论得到满意的结果．

2．由Banach和Steinhaus给出的一致有界性定理4.6-3指出了($\|T_n\|$)有界的充分条件，这里T_n是从巴拿赫空间到赋范空间的有界线性算子．这个定理在分析中有各种应用，例如，关于Fourier级数(参看4.6-5)，弱收敛(4.8，4.7节)，序列的可和性（§4.9），数值积分(§4.10)等等．

3．开映象定理4.11-2指出从Banach空间到Banach空间上的有界线性算子T是一个开映射，即将开集映射为开集．因此，当T是双射时，T^{-1}是连续的（“有界逆定理”）

4．闭图象定理4.12-2给出闭线性算子（参看4.12-1)为有界的条件．闭线性算子在物理与其他方面均有重要的应

用.

§4.1 Zorn 引 理

在Hahn-Banach定理的证明中需用到Zorn引理. Zorn引理还有各种应用，在本节后面给出其中的两个. 在证明Zorn引理时用到下列半序集的概念.

4.1-1 **定义(半序集，链)** 半序集M是指在其上定义了一个偏序$\leqslant$的集合. 即，$\leqslant$是一个二元关系且满足条件.

($P01$). 对每个$a\in M$，均有$a\leqslant a$（自反性)

($P02$). 若$a\leqslant b$，且$b\leqslant a$，则$a=b$（反对称性)

($P03$). 若$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$（传递性)

“半”字强调M可能有这样两个元素a和b，对于它们，$a\leqslant b$及$b\leqslant a$均不成立. 这样的a和b称做是不可比元素. 若上述元素满足：$a\leqslant b$或$b\leqslant a$（或两者都满足），则称a和b是可比元素. 任何两个元素均可比的半序集称为全序集或链. 换句话说，一个链是没有不可比元素的半序集.

半序集M的子集W的上界是指一元素$u\in M$，使得对于每个$x\in W$，均有

$$x\leqslant u.$$

(u依赖于M及W，这样的u可能存在，也可能不存在)，M的极大元是指一元素$m\in M$，使得任意$x\in M$，

$$m\leqslant x \quad 蕴涵 \quad m=x$$

(同样地，M可能有也可能没有极大元. 另外要注意，极大元不一定是上界).

4.1-2 **实数**. 设M为所有实数的集合. 且，令$x\leqslant y$表示通常意义下的大小关系，则M是全序集.M无极

大元.

4.1-3　**幂集.** 设$P(X)$是已知集X的幂集（X所有子集的集合），并设$A \leqq B$表示$A \subset B$. 即A是B的子集. 则$P(X)$是一个半序集，且$P(X)$的唯一极大元为X.

4.1-4　**n元数组.** 设M是所有n个实数有序组：$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$，…，的集合，且令$x \leqq y$表示对每个$i=1, 2, \cdots, n$均有$\xi_i \leqslant \eta_i$. 这里$\xi_i \leqslant \eta_i$是通常意义的大小关系. 因而在$M$上定义了一个偏序. M是半序集.

4.1-5　**正整数.** 设$M=N$是所有正整数的集合，令$m \leqq n$表示m能整除n. 这就在N上定义了一个偏序.

利用定义4.1-1中的概念，我们现在可以阐明Zorn引理. 此引理可当成公理①.

4.1-6　**Zorn引理.** 设$M \neq \varnothing$是一半序集. 假定每个链$C \subset M$均有上界. 则M至少有一个极大元.

应用：

4.1-7　**Hamel基.**　每个向量空间$X \neq \{\theta\}$都有一个Hamel基.

证明. 设M是所有X中线性无关子集的集合. 由于$X \neq \{\theta\}$. 于是存在$x \in X$，$x \neq \theta$. 且，$\{x\} \in M$. 所以$M \neq \varnothing$. 利用包含关系定义M上一个偏序.（参看4.1-3），每个链$C \subset M$都有一个上界，此上界即为X中C的所有子集的并. 由Zorn引理，M有一极大元B，现在我们证明B是X的一个Hamel基。设$Y=\operatorname{span} B$，则Y是X的一子空间. 且$Y=X$. 因为否

---

① Zorn引理可从选择公理（对于任意给定集E，存在一个从幂集$P(E)$到E的映射C（选择函数），使得若$B \subset E$，$B \neq \phi$，则$C(B) \in B$）推出. 反之，这个选择公理也可从Zorn引理得到.

则存在$z\in X$，$z\notin Y$，那么，$B\cup\{z\}$是一个包含B的线性无关集，B成其为真子集.这与B是M的极大元矛盾.

4.1-8 **完全标准直交集.** 在每个Hilbert空间$H\neq\{\theta\}$中均存在一个完全标准直交集(参看§3.4)

证明.设M是H的所有标准直交子集的集合，由于$H\neq\{\theta\}$，必存在元素$x\neq\theta$，且有标准直交子集$\{y\}$，这里$y=\|x\|^{-1}x$.因此，$M\neq\varnothing$.集的包含关系定义M上一个偏序，每个链$C\subset M$都有一个上界，即为X中集C的所有子集的并.由Zorn引理，M有一个极大元F.我们证明F在H中是完全的.假若这不成立.则由定理3.4-5，存在非零元$z\in H$，使得$z\perp F$.因此，$F_1=F\cup\{e\}$是标准直交集，这里$e=\|z\|^{-1}z$.且F是F_1的真子集，这与F是极大元矛盾.

习 题 4.1

1. 验证例题4.1-3中的论述.

2. 设X是区间[0, 1]上所有实值函数x的集合.且令$x\leqslant y$表示对于每个$t\in[0,1]$，均有$x(t)\leqslant y(t)$.证明这定义了一个偏序.X是全序集吗？X有极大元吗？

3. 证明：所有复数$z=x+iy$，$w=u+iv$，…，的集合，若定义$z\leqslant w$为$x\leqslant u$且$y\leqslant v$，其中对于实数，$\leqslant$表示通常意义的大小关系.则此集合为半序集.

4. 关于例题4.1-5中的偏序，求出M的所有极大元.这里M为(a).{2、3、4、8}；(b)所有素数的集合.

5. 证明有限半序集A至少有一个极大元.

6. (最小元、最大元) 证明一个半序集M至多有一个元素a，使得对于所有$x\in M$均有$a\leqslant x$.且至多有一个元素b，使得对于所有$x\in M$有$x\leqslant b$.〔若这样的a或b存在，则分别称做M的最小元或最大元.〕

7. (下界)设$A\neq\phi$是半序集M的子集.如果存在一元素$x\in M$,使得对于所有$y\in A$均有$x\leqslant y$.则称x是A的一个下界.求例题4.1-5中子集$A=\{4,6\}$的上界和下界.

8. 设$A\neq\phi$是半序集M的一子集.若x是A的一个下界,使得对于A的所有下界l,有$l\leqslant x$.则称x是A的最大下界.记作
$x=g.l.b.A=\inf A$.类似地,若y是A的一个上界.使得对于A的所有上界u,均有$y\leqslant u$.则称y是A的最小上界.记作.
$y=l.u.b.A=\operatorname{snp}A$.(a)若$A$有一个$g.l.b$,证明它是唯一的.(b)例题4.1-3中;$g.l.b.\{A.B\}$和$l.u.b.\{A.B\}$是什么?

9. (格)设M是一半序集.若M中的任意两个元素x,y均有一个$g.l.b$(记作$x\wedge y$)和一个$l.u.b.$(记作$x\vee y$).证明例题4.1-3中的半序集是一个格.这里,$A\wedge B=A\cap B, A\vee B=A\cup B$.

10. 设M是一半序集,如果存在一个元素$x\in M$,使得$y\leqslant x$蕴涵$y=x$.,则称x为M的极小元.求习题4(a)中的所有极小元.

§4.2 哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理

Hahn-Banach定理是线性泛函的延拓定理,它保证赋范空间上具有充分多的有界线性泛函及线性泛函的取值范围可事先指定.并且为对偶空间提供所需的理论.因此,Hahn-Bonach定理是有界线性算子最重要的定理之一.定理首先由H.Hahn(1927)提出,S.Banach(1929)给出更为一般的形式(定理4.2-1),H.F.Bahnenblust与\.Sobczyk(1938)将其推广到复向量空间上(定理4.3-1)

延拓问题就是研究定义在给定集X的一子集Z上的数学对象(例如:映射)能否扩充到整个集X上,并且保持某些基本性质的问题.

在Hahn-Banach定理中,延拓的对象是一线性泛函f,

保持以称做次线性泛函P所控制的有界性.特别f为一有界线性泛函时，延拓后保持范数不变.下面我们给出次线性泛函定义.

4.2-1 定义(次线性泛函) 设P是向量空间X上一实值泛函，并满足下列条件.

(1) 对于任意x，$y\in X$，均有

$P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$. (次可加性)

(2) 对于R中的所有$\alpha\geqslant 0$和任意$x\in X$有，

$P\alpha(x)=\alpha P(x)$ (正齐性)

则称P是X上的次线性泛函.

(注：赋范空间上的范数是次线性泛函)

4.2-2 Hahn—Banach定理(线性泛函的延拓) 设X是实向量空间，P是X上一个次线性泛函，f是定义在X的子空间Z上的一实线性泛函，并满足.

(3) 对于所有$x\in Z$，$f(x)\leqslant P(x)$.

则存在定义在X上的线性泛函(实的)$\tilde{f}$满足.

(3*) 对于所有$x\in X$，$\tilde{f}(x)\leqslant P(x)$

且对于每个$x\in Z$，$\tilde{f}(x)=f(x)$.

(称$\tilde{f}$为f从Z到X的一线性延拓)

证明. 分三步证明.

(a) 满足$g(x)\leqslant P(x)$ ($x\in D(g)$)的f的所有延拓g组成的集E可成为半序集，并根据Zorn引理，E有极大元$\tilde{f}$.

(b) $\tilde{f}$是定义在整个X上的线性泛函.

(c) 证明在(b)中用到的一个辅助关系. 详细证明如

下.

(a) 设E是满足条件

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \text{对于所有} x \in D(g)$$

的f的所有线性延拓g的集合. 显然, $E \neq \phi$. 因为$f \in E$. 在E上我们用下面关系定义一偏序: $g \leqslant h$表示h是g的一个延拓. 即$D(h) \supset D(g)$, 并且对于每个$x \in D(g)$, 有, $h(x) = g(x)$.

对于任意链$C \subset E$, 我们现在定义$\hat{g}$为,

$$\hat{g}(x) = g(x) \qquad x \in D(g). \ (g \in C)$$

$\hat{g}$是线性泛函, 其定义域为

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g).$$

因为C是一个链, 所以$D(\hat{g})$是一向量空间.

$\hat{g}$有确定意义. 事实上, 对于g_1, $g_2 \in C$. 和$x \in D(g_1) \cap D(g_2)$, 我们有$g_1(x) = g_2(x)$, 这是因为C是一个链, 从而$g_1 \mathrm{D} g_2$或$g_2 \mathrm{D} g_1$. 显然, 对于所有的$g \in C$, $g \mathrm{D} \hat{g}$. 因此$\hat{g}$是C的一个上界. 由于C是任意的. 于是根据Zorn引理, E有一极大元$\tilde{f}$. 由E的定义, $\tilde{f}$是f的一个线性延拓. 并满足,

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \qquad x \in D(\tilde{f}) \tag{4}$$

(b) 我们现在证明$D(\tilde{f}) = X$. 假若不成立, 那么可选$y_1 \in X - D(\tilde{f})$, 并考虑由$D(\tilde{f})$和y_1张成的X的子空间Y_1. 注意$y_1 \neq \theta$, 因为$\theta \in D(\tilde{f})$ 对任意$x \in Y_1$, 可唯一地表

示成，

$$x = y + \alpha y_1 \qquad y \in D(\widetilde{f}).$$

事实上，$y + \alpha y_1 = \widetilde{y} + \beta y_1$，$\widetilde{y} \in D(\widetilde{f})$

蕴涵 $y - \widetilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$．这里$y - \widetilde{y} \in D(\widetilde{f})$，

但$y_1 \notin D(\widetilde{f})$ 因此，得，$y - \widetilde{y} = \theta$，$\alpha - \beta = 0$．唯一性得证．）

在Y_1上定义泛函g_1为，

$$g_1(y + \alpha y_1) = \widetilde{f}(y) + \alpha c. \tag{5}$$

这里c是任意实常数．不难看出g_1是线性的．对于$\alpha = 0$，我们有$g_1(y) = \widetilde{f}(y)$．因此，$g_1$是$\widetilde{f}$的一个真延拓．即$g_1$是使得$D(\widetilde{f})$是$D(g_1)$的真子集的那种延拓．因此，如果我们能证明$g_1 \in E$，即对于所有$x \in D(g_1)$．均有

$$g_1(x) \leqslant p(x) \tag{6}$$

成立．那么就会导致与$\widetilde{f}$是极大元矛盾．所以，$D(\widetilde{f}) = X$．

(c) 最后我们必须证明，对于一个适当的c，(5) 式中的g_1应满足(6)式．

我们考虑$D(\widetilde{f})$中的任意y和z，由(4)和(1)得到，

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(y - z) &\leqslant p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leqslant p(y + y_1) + p(-y_1 - z)\end{aligned}$$

于是有

$$-p(-y_1 - z) - \widetilde{f}(z) \leqslant p(y + y_1) - \widetilde{f}(y). \tag{7}$$

这里y_1是固定的，因y在左边未出现，z在右边未出现，所以我们在左边关于z取上确界（记为m_0），在右边关于y取下确界（记为m_1），不等式仍然成立．即$m_0 \leqslant m_1$．对于满足$m_0 \leqslant c \leqslant m_1$的一个$c$，从(7)有

$$-p(-y_1-z)-\tilde{f}(z) \leqslant c. \quad \text{对于所有} z \in D(\tilde{f}) \tag{8a}$$

$$c \leqslant p(y+y_1)-\tilde{f}(y). \quad \text{对于所有} y \in D(\tilde{f}). \tag{8b}$$

分别就(5)中的α为负和正数的情况证明(6)式．

对于$\alpha<0$，我们用$\alpha^{-1}y$代替(8a)中的z，即

$$-p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)-\tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leqslant c$$

用$-\alpha>0$乘不等式两边得

$$\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)+\tilde{f}(y) \leqslant -\alpha c.$$

由此及(5)，利用$x=y+\alpha y_1$，得

$$g_1(x)=\tilde{f}(y)+\alpha c \leqslant -\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)$$

$$=p(\alpha y_1+y)=p(x)$$

对于$\alpha=0$，$x \in D(\tilde{f})$，无须证明．对于$\alpha>0$用$\alpha^{-1}y$代替(8b)中的y得到，

$$c \leqslant p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)$$

用$\alpha>0$乘不等式两边得

$$\alpha c \leqslant \alpha p\left(\frac{1}{\alpha} y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y)$$

由此及(5)

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leqslant p(x).$$

不用Zorn引理能行吗？这是一个令人感兴趣的问题。特别是这个引理没有给出构造性的方法．如果在(5)中，用f代替$\tilde{f}$．则对于每个实数c，我们得到f到子空间Z_1上的一线性延拓g_1，这里Z_1是由$D(f)\cup\{y_1\}$张成的子空间．并且能选择c使得对于所有$x\in Z_1$有$g_1(x)\leqslant p(x)$．如果$X=Z_1$．这就证完了．若$X\neq Z_1$，可取一个$y_2\in X-Z_1$，并将f延拓到Z^1和y_2张成的子空间Z_2上．反复延拓下去．就得到一子空间Z_j的序列，其每一个都包含前一个．并使f从一个子空间线性延拓到下一个子空间．且每个延拓g_j满足：对于所有$x\in Z_j$，有$g_j(x)\leqslant p(x)$．若

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} Z_j$$

我们经n步之后就可证完．若

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$$

我们用通常的归纳法可以证明．然而，若X没有上述那样的表示．其证明就需要Zorn引理．

对于某些特殊的空间，情况可能变得简单些，其中希耳伯特空间由于有了*Riesz*表示式就是这种类型，这将在下节中讨论．

习 题 4.2

1．证明线性泛函的绝对值具有性质(1)和(2)．

2．证明向量空间X上的范数是X上的一个次线性泛函．

3．设$x=(\xi_n)\in l^\infty$，ξ_n是实数．证明

$P(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n$在$l^\infty$上定义一个次线性泛函．

4．证明次线性泛函P满足$P(\theta)=0$和$P(-x)\geqslant -P(x)$．

5．(凸集)如果P是向量空间X上的一个次线性泛函．证明$M=\{x|P(x)\leqslant r,\ r>0固定\}$是一个凸集（参看§3.2）

6．如果赋范空间X上的一个次可加泛函P在θ点连续且$P(\theta)=0$．证明P对于所有$x\in X$是连续的．

7．如果P_1和P_2均是向量空间X上的次线性泛函，且c_1和c_2是正常数．证明$P=c_1P_1+c_2P_2$是X上的一个次线性泛函．

8．如果定义在赋范空间X上的一个次可加泛函在一个球面$\{x|\ \|x\|=r\}$外是非负的．证明对于所有$x\in X$，它是非负的．

9．设P是实向量空间X上的一个次线性泛函，$Z=\{x\in X|x=ax_0,\ a\in R\}$，$x_0\in X$是一固定元素．在$Z$上定义泛函$f$为$f(x)=aP(x_0)$．证明$f$是$Z$上的线性泛函且满足$f(x)\leqslant P(x)$．

10．如果P是实向量空间X上的一个次线性泛函．证明X上存在一线性泛函$\tilde{f}$，使得$-P(-x)\leqslant\tilde{f}(x)\leqslant P(x)$．

§4.3 复向量空间和赋范空间的 Hahn-Banach定理

定理4.2-2是实向量空间上的线性泛函延拓定理．由H．Bohnenblust和A．Sobczyk(1938年）将此定理推广到复向量空间上．

4.3-1 Hahn-Banach定理(复空间的)．设X是实的或

复的向量空间，Z是X的子空间．且p是X上的实值泛函并满足．

对所有x，$y\in X$，$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$（次可加性）

$$(1)$$

对于每个数α，$p(\alpha x)=|\alpha|\,p(x)$　　（绝对齐性）(2)

f是Z上一线性泛函并满足，

对所有$x\in Z$，$|f(x)|\leqslant p(x)$．　　(3)

则f有一个从Z到X的延拓$\tilde{f}$且满足

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)\text{．对所有}x\in X \qquad (3^*)$$

证明　(a) 若X是实向量空间．则(3)蕴涵对所有$x\in Z$，$f(x)\leqslant p(x)$，因此，根据Hahn-Banach定理4.2-2，存在一个从Z到X的线性延拓$\tilde{f}$，使得对所有$x\in X$，有

$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x). \qquad (4)$$

由此及(2)得，

$$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leqslant p(-x)=|-1|\,p(x)=p(x).$$

即，　$\tilde{f}(x)\geqslant -p(x)$，此不等式与(4)合起来证得(3*)．

(b) 设X是复向量空间．并假设Z是复向量子空间．于是f是复值的，可写成，

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x).$$

其中f_1和f_2均是实值的．我们暂时将X和Z视为实向量空间，并用X_r和Z_r分别表示它们．这仅仅限制用实数作数乘(代替复数)．由于f在Z上是线性的，且f_1和f_2是实值的．所以f_1和f_2在Z_r上是线性的．因为复数的实部不可能超过它的模，于是$f_1(x)\leqslant|f(x)|$，根据(3)得，对于所有$x\in Z$，有

$$f_1(x) \leqslant p(x).$$

由Hahn-Banach定理4.2-2，必存在一个从Z_r到X_r的f_1的线性延拓$\widetilde{f}_1$，使得对于所有$x \in X$，均有

$$\widetilde{f}_1(x) \leqslant p(x). \tag{5}$$

这就解决了f_1的问题．现在我们转向f_2．回到Z上，利用$f = f_1 + if_2$，对于每个$x \in Z$，有

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$$

两边的实部必相等：

$$f_2(x) = -f_1(ix). \qquad x \in Z. \tag{6}$$

因此，对于所有$x \in Z$，若令

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix) \tag{7}$$

由(6)我们看到，在Z上有$\widetilde{f}(x) = f(x)$．这证明了$\widetilde{f}$是f从Z到X的一个延拓．剩下的工作是证明：

(i) $\widetilde{f}$是复向量空间X上的一线性泛函．

(ii) $\widetilde{f}$在X上满足(3*)．

由于$\widetilde{f}_1$是实向量空间X_r上的线性泛函．利用(7)式，对于任意复数$a+ib$，其中a和b是实数，均有，

$$\begin{aligned}\widetilde{f}[(a+ib)x] &= \widetilde{f}_1(ax+ibx) - i\widetilde{f}_1(iax-bx)\\ &= a\widetilde{f}_1(x) + b\widetilde{f}_1(ix)\\ &\quad - i[a\widetilde{f}_1(ix) - b\widetilde{f}_1(x)]\\ &= (a+ib)[\widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix)]\\ &= (a+ib)\widetilde{f}(x)\end{aligned}$$

$\tilde{f}$满足可加性是显然的．因此(i)成立．

我们来证明(ii)．对于使$\tilde{f}(x)=0$的任意x，因为(1)和(2)蕴涵$p(x)\geqslant 0$．所以(ii)成立．设x使$\tilde{f}(x)\neq 0$．于是有．

$$\tilde{f}(x)=|\tilde{f}(x)|e^{i\theta}，因而，|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}(x)e^{-i\theta}$$

由于$|\tilde{f}(x)|$是实的，故$\tilde{f}(x)e^{-i\theta}$也是实的且等于它的实部．因此，根据(2)得．

$$|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)$$
$$=|e^{-i\theta}|\,p(x)=p(x)$$

尽管Hahn-Banach定理没有直接说到连续性．但是这个定理的主要应用是关于有界线性泛函．因此，我们要在赋范空间上考虑这个定理．事实上，定理4.3-1蕴涵下述定理．

4.3-2 Hahn-Banach**定理**（**赋范空间**）．设f是赋范空间X的子空间Z上的一有界线性泛函，则X上存在一有界线性泛涵$\tilde{f}$，$\tilde{f}$是f在X上的一个延拓．并且其范数为

$$\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z. \tag{8}$$

这里，$\|\tilde{f}\|_X=\sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|\tilde{f}(x)|$，　$\|f\|_Z=\sup\limits_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}}|f(x)|$

证明　若$Z=\{\theta\}$，则$f=0$且在X上的延拓为$\tilde{f}=0$．若$Z\neq\{\theta\}$，我们希望利用定理4.3-1，因此，首先必须找到一个适当的p，由于对于所有$x\in Z$，有

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_Z\|x\|$$

我们将此不等式作为(3)的形式．那么，取

$$p(x)=\|f\|_Z\|x\| \tag{9}$$

$p(x)$定义在X上．而且，

$$p(x+y)=\|f\|_Z\|x+y\|\leqslant\|f\|_Z(\|x\|+\|y\|)$$
$$=p(x)+p(y).$$
$$p(\alpha x)=\|f\|_Z\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|f\|_Z\|x\|=|\alpha|\ p(x).$$

即p在X上满足(1)和(2)．

根据定理4.3-1，X上存在一线性泛函$\tilde{f}$，是f的一个延拓．且满足．

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)=\|f\|_Z\|x\|.\qquad x\in X.$$

因此有，

$$\|\tilde{f}\|_X=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|\tilde{f}(x)|\leqslant\|f\|_Z$$

又由在延拓的情况下，其范数不可能减少，所以，$\|\tilde{f}\|_X\geqslant\|f\|_Z$．于是(8)式成立且定理得证．

在特殊的情况下，此定理可能变得很简单，Hilbert空间就是这类空间．如果Z是Hilbert空间H的闭子空间，则f有定理3.5-1中的Riesz表示，

$$f(x)=\langle x,\ z\rangle,\qquad z\in Z.$$

这里，$\|f\|=\|z\|$．因为内积是定义在整个H上的，这就立即给出了f从Z到X的一线性延拓$\tilde{f}$，且由定理3.5-1，$\tilde{f}$与f有相同的范数，$\|\tilde{f}\|=\|z\|=\|f\|$．

从定理4.3-2，我们现在将导出另一个有用的结果，就是赋范空间的对偶空间是由足够多的有界线性泛函组成的．这个结果对于伴随算子(§4.4)和弱收敛(§4.7)理论是重要

的.

4.3-3 **定理(有界线性泛函的存在性).** 设X是赋范空间，$x_0 \neq \theta$是X的任一元素. 则X上存在一有界线性泛函$\tilde{f}$，使得,

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

证明 我们考虑由所有元素αx_0所组成的X的子空间Z（这里α是数量）. 在Z上我们定义线性泛函f为

$$f(x) = \alpha \|x_0\| \qquad x = \alpha x_0 \tag{10}$$

由于,

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$$

因此f有界且$\|f\| = 1$.

定理4.3-2蕴涵f有一个从Z到X的线性延拓$\tilde{f}$，其范数满足$\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$. 从(10)我们看到$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$.

4.3-4 **推论(范数，零向量).** 对于赋范空间X中的每个x，我们有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \tag{11}$$

因此如果x_0使对于所有$f \in X^*$，$f(x_0) = 0$，则，$x_0 = \theta$.

证明 由定理4.3-3，并将其中x_0写成x

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

又从$|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|$，得.

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant \|x\|,$$

习 题 4.3

1．（拟范数）证明(1)和(2)蕴涵$P(\theta)=0$及$P(x)\geq 0$因此，P是一个拟范数（参看§2.3的习题10）

2．证明(1)和(2)蕴涵$|P(x)-P(y)|\leqslant P(x-y)$.

3．证明由(7)式定义的$\tilde{f}$是复向量空间X上的一线性泛函．[提示：只须证明$\tilde{f}(ix)=i\tilde{f}(x)$]

4．设P是定义在向量空间X上，并满足(1)和(2)，证明对于任意给定的$x_0\in X$，X上存在一线性泛函$\tilde{f}$，使得$\tilde{f}(x_0)=P(x_0)$，且对于所有$x\in X$，$|\tilde{f}(x)|\leqslant P(x)$.

5．如果定理4.3-1中的X是赋范空间，并且对于某个$k>0$，$P(x)\leqslant k\|x\|$，证明$\|\tilde{f}\|\leqslant k$.

6．在Euclidean平面R^2上定义泛函f为

$$f(x)=\alpha_1\zeta_1+\alpha_2\zeta_2,\qquad x=(\zeta_1,\ \zeta_2).$$

求f到R^3的所有线性延拓$\tilde{f}$及其范数$\|\tilde{f}\|$.

7．在Hilbert空间的情况下，给出定理4.3-3另一个证明．

8．设X是赋范空间，X^*是其对偶空间，若$X\neq\{\theta\}$，证明X^*也不可能为$\{\theta\}$.

9．证明对于可分的赋范空间X，不用Zorn引理可直接证明定理4.3-2（在定理4.2-2的证明中间接用到了Zorn引理）

10．直接从定理4.3-3得出定理4.3-4的第二个论述．

11．如果对于赋范空间X上的每个有界线性泛函f，$f(x)=f(y)$，证明$x=y$.

12．设X为Euclidean平面R^2，试求出定理4.3-3中的泛函$\tilde{f}$.

13．证明在定理4.3-3的假设下，X上存在一有界线性泛函$\hat{f}$，使得$\|\hat{f}\|=\|x_0\|^{-1}$且$\hat{f}(x_0)=1$，

14．（超平面）证明对于赋范空间X中的任意球面$S(\theta,r)$，和任意点$x_0\in S(\theta,r)$，存在一超平面$H_0\ni x_0$，使得球$\widetilde{B}(\theta,r)$完全置于由H_0所确定的两个半空间之一当中（参看§2.8中习题8）（请看图24）

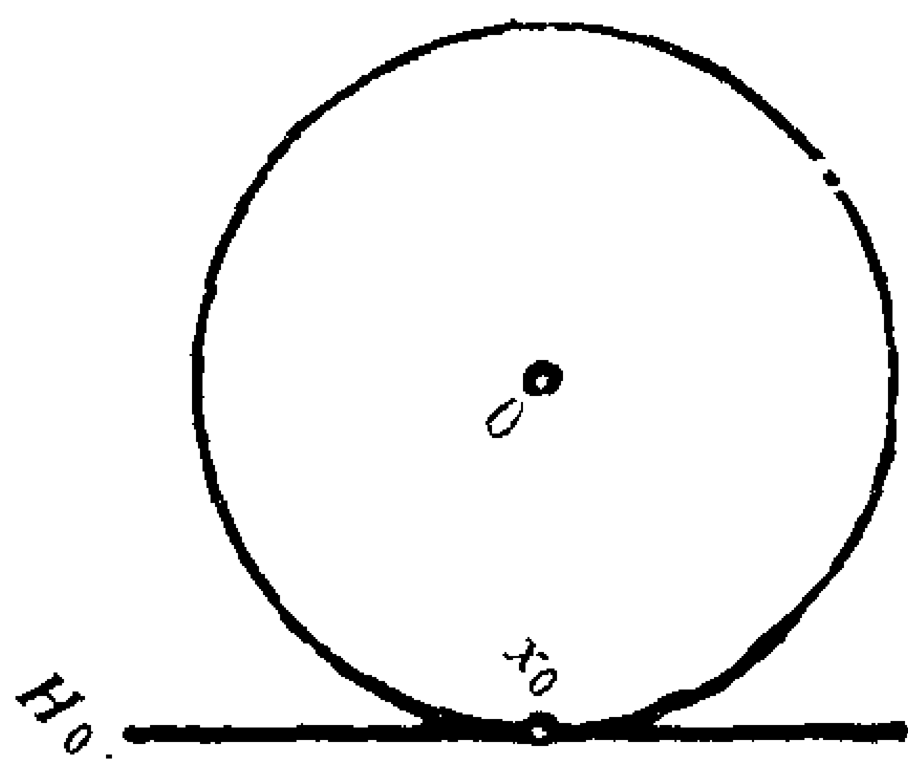


图24　习题14在Euclidean平面R^2情况下的图示

15．如果赋范空间X中的x_0，使得对于所有范数为1的$f\in X^*$，$|f(x_0)|\leqslant C$，证明$\|x_0\|\leqslant C$．

§4.4　伴随算子

对于赋范空间X上的有界线性算子$T: X\to Y$我们可以引进它的伴随算子$T^\times$. 在本节我们定义伴随算子$T^\times$并研究它的某些性质，以及它与Hilbert伴随算子T^*之间的关系（在Hilbert空间的情况下，$T^\times$与T^*是不同的）．特别要注意，我们现在的讨论是借助于定理4.3-3.

我们考虑有界线性算子$T: X\to Y$，这里X和Y是赋范空间. 为了定义T的伴随算子$T^\times$，任取Y上有界线性泛函g. g对于每个$y\in Y$是有定义的．设$y=Tx$，于是得到X上一泛函f：

$$f(x)=g(Tx)\qquad x\in X. \tag{1}$$

由于g与T是线性的，所以f是线性的．因为

$$|f(x)|=|g(Tx)|\leqslant\|g\|\,\|T\|\,\|x\|$$

则f是有界的，且有

$$\|f\| \leqslant \|g\| \|T\|. \tag{2}$$

这表明$f \in X^*$，这里X^*是X的对偶空间.

根据假设$g \in Y^*$，从而，对于可变的$g \in Y^*$，公式(1)定义了一个从Y^*到X^*的算子，称做T的伴随算子，记作$T^\times$.于是，有，

$$X \xrightarrow{T} Y$$
$$X^* \xleftarrow{T^\times} Y^* \tag{3}$$

注意，$T^\times$是定义在Y^*上的算子，而给定的算子T是定义在X上的．下面给出伴随算子的定义.

4.4-1 **定义（伴随算子）**．设X和Y是赋范空间，T: $X \to Y$是有界线性算子．则T的伴随算子$T^\times$：$Y^* \to X^*$定义成

$$(T^\times g)(x) = g(Tx) \qquad g \in Y^* \tag{4}$$

这里的X^*和Y^*分别是X和Y的对偶空间.

我们首先证明伴随算子具有与算子本身相同的范数．在证明过程中我们要用到由Hahn-Banach定理推得的定理4.3-3．由此可见，Hahn-Banach定理在建立伴随算子理论中起了令人满意的重要作用.

4.4-2 **定理（伴随算子的范数）**．定义4.4-1中的伴随算子$T^\times$是线性有界的．且，

$$\|T^\times\| = \|T\|. \tag{5}$$

证明　由于$T^\times$的定义域Y^*是向量空间，且

$$\begin{aligned}(T^\times(\alpha g_1 + \beta g_2))(x) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx)\\ &= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx)\\ &= \alpha(T^\times g_1)(x) + \beta(T^\times g_2)(x)\end{aligned}$$

因此，$T^\times$是线性的.

现在我们证明(5). 由(4)和(2)得，

$$\|T^\times g\| = \|f\| \leqslant \|g\|\,\|T\|$$

在范数为1的所有$g \in Y^*$上取上确界. 有

$$\|T^\times\| \leqslant \|T\|. \tag{6}$$

另一方面，定理4.3-3蕴涵下面事实，对于每个非零的$x_0 \in X$，存在一个$g_0 \in Y^*$，使得

$$\|g_0\| = 1 \quad 且 \quad g_0(Tx_0) = \|Tx_0\|$$

由伴随算子$T^\times$的定义，这里$g_0(Tx_0) = (T^\times g_0)(x_0)$. 记$f_0 = T^\times g_0$，于是，

$$\|Tx_0\| = g_0(Tx_0) = f_0(x_0) \leqslant \|f_0\|\,\|x_0\|$$
$$= \|T^\times g_0\|\,\|x_0\| \leqslant \|T^\times\|\,\|g_0\|\,\|x_0\|$$

但是，$\|g_0\| = 1$，所以，对于每个$x_0 \in X$，有.

$$\|Tx_0\| \leqslant \|T^\times\|\,\|x_0\|$$

从而，必有$\|T\| \leqslant \|T^\times\|$，由此及(6)立即证得(5).

4.4-3 例题（矩阵）. 在n维Euclidean空间R^n中，线性算子T: $R^n \to R^n$可用矩阵表示（参看2.6-8(ii)），这里矩阵$T_E = (\tau_{jk})$依赖于R^n中基$E = \{e_1, \cdots, e_n\}$的选取. 假定我们已选定基E，且E中元素的排列顺序保持固定. 将$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^T$视为列向量. 于是有，

$$y = T_E x, \qquad 即，\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk}\xi_k \tag{7}$$

$j = 1, 2, \cdots, n$. 设$F = \{f_1, \cdots, f_n\}$是E的对偶基(参看§2.8)，F是$(R^n)^* = R^n$（参看2.8-14）的一个基. 因此，对于每个$g \in (R^n)^*$，有

$$g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

由对偶基的定义，$f_j(y)=f_j(\Sigma\eta_k e_k)=\eta_j$

由(7)得

$$g(y)=g(T_E x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\eta_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\tau_{jk}\xi_k$$

交换和的次序，可写成下列形式，

$$g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k.\ 这里，\beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j \qquad (8)$$

我们在X上定义一泛函f：

$$f(x)=g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k.$$

回忆伴随算子的定义，

$$f=T_E^{\times}g.其分量为，\quad \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j$$

因此，我们有下述结论：

若T以矩阵T_E表示，则伴随算子$T^{\times}$以T_E的转置表示.

如果T是从C^n到C^n的线性算子，则上述结论仍然成立.

下列公式(9)至(12)所给出的伴随算子的一些性质，其在运用伴随算子时是很有用的. 相应的证明留给读者. 令S，$T\in B(X,Y)$（参看定理2.7-13），则有，

$$(S+T)^{\times}=S^{\times}+T^{\times} \qquad (9)$$

$$(\alpha T)^{\times}=\alpha T^{\times} \qquad (10)$$

设X，Y，Z是赋范空间，且$T\in B(X,Y)$，$S\in B(Y,Z)$，则对于乘积ST的伴随算子我们有

$$(ST)^{\times}=T^{\times}S^{\times} \quad （见图25） \qquad (11)$$

若$T\in B(X,Y)$，T^{-1}存在且$T^{-1}\in B(Y,X)$，则$(T^{\times})^{-1}$亦存在，$(T^{\times})^{-1}\in B(X^*,Y^*)$且有.

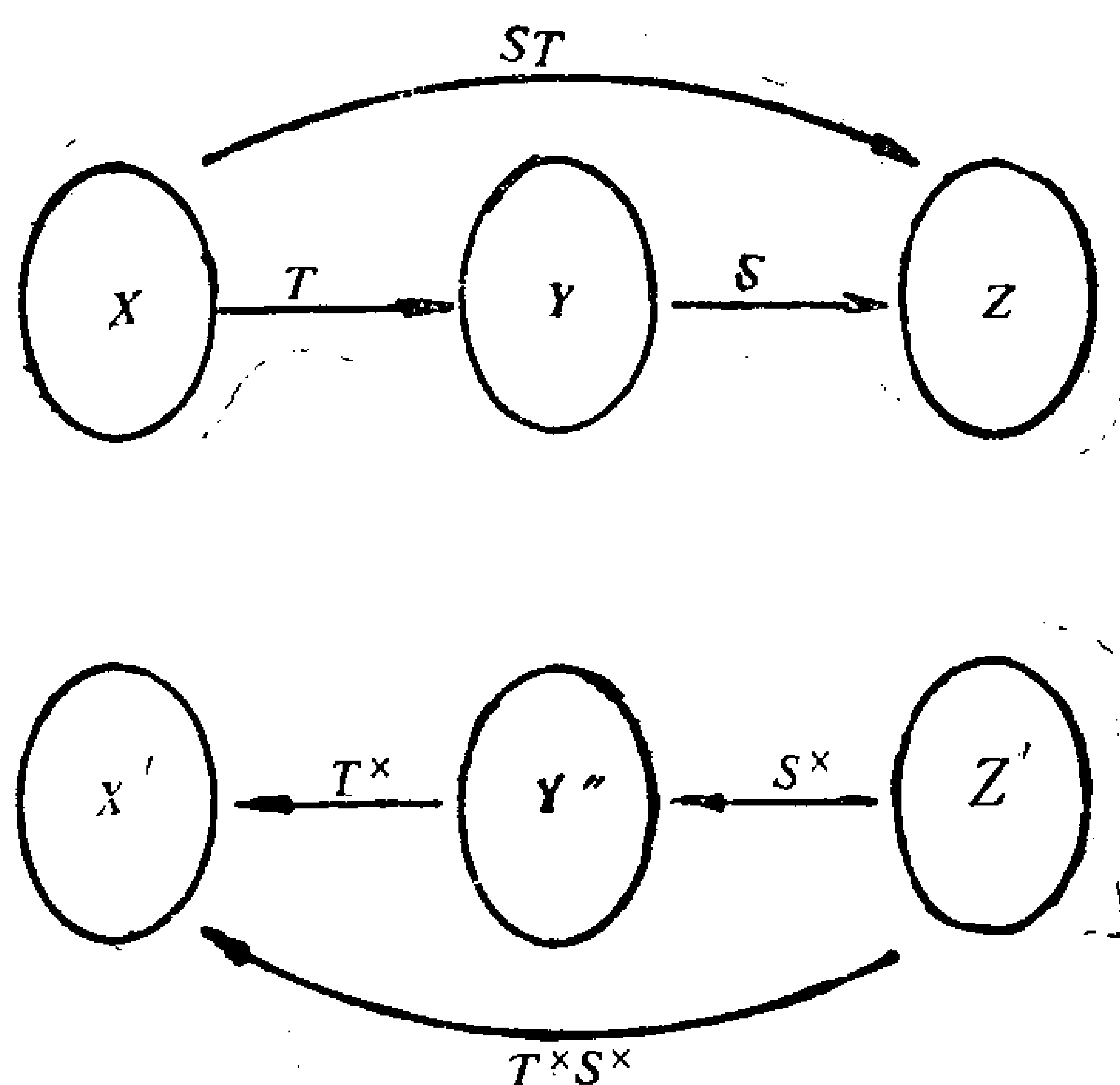


图25　公式(11)的说明

$$(T^{\times})^{-1}=(T^{-1})^{\times} \tag{12}$$

伴随算子$T^{\times}$与Hilbert伴随算子T^*之间的关系. 当X和Y是Hilbert空间, $X=H_1, Y=H_2$, 且T: $X\to Y$是有界线性算子的情况下, 首先有,

$$\begin{array}{c} H_1 \xrightarrow{T} H_2 \\ H_1^{\prime} \xleftarrow{T^{\times}} H_2^{\prime} \end{array} \tag{13}$$

与前面一样, T的伴随算子定义成,

$$\begin{aligned} &(a)\quad T^{\times}g=f \\ &(b)\quad g(Tx)=f(x) \end{aligned} \qquad (f\in H_1^{\prime}, g\in H_2^{\prime}) \tag{14}$$

因f和g是Hilbert空间上的泛函, 它们有Riesz表示（参看定理3.5-1）.

$$f(x)=\langle x,x_0\rangle \qquad (x_0\in H_1)$$
$$g(y)=\langle y,y_0\rangle \qquad (y_0\in H_2) \tag{15}$$

由定理3.5-1知，分别由f和g确定的x_0和y_0是唯一的．这就分别通过

$$A_1f=x_0$$
$$A_2g=y_0$$

定义了两个算子，

$$A_1:H_1^*\to H_1$$
$$A_2:H_2^*\to H_2$$

从定理3.5-1看到，A_1和A_2是双射且等距的．这是因为，$\|A_1f\|=\|x_0\|=\|f\|$．A_2也有类似情况．此外，A_1和A_2是共轭线性的．事实上，若

$f_1(x)=\langle x,x_1\rangle$，$f_2(x)=\langle x,x_2\rangle$，则对于所有$x\in H_1$，和任意数$\alpha,\beta$，有．

$$\begin{aligned}(\alpha f_1+\beta f_2)(x)&=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\\&=\alpha\langle x,x_1\rangle+\beta\langle x,x_2\rangle\\&=\langle x,\ \overline{\alpha}x_1+\overline{\beta}x_2\rangle\end{aligned} \tag{16}$$

根据A_1的定义．

$$A_1(\alpha f_1+\beta f_2)=\overline{\alpha}A_1f_1+\overline{\beta}A_1f_2$$

于是A_1的共轭线性得证．同理可证A_2亦是共轭线性的．

构造算子（参看图14）

$$T^*=A_1T^{\times}A_2^{-1}:H_2\to H_1 \tag{17}$$

是由$T^*y_0=x_0$定义的．由于T^*中包含两个共轭线性算子．$T^{\times}$又是线性的，因此T^*是线性的．而且，从(14)至(16)立即有，

$$\langle Tx, y_0\rangle = g(Tx) = f(x) = \langle x, x_0\rangle = \langle x, T^* y_0\rangle$$

这就证明了T^*的确是T的Hilbert伴随算子.

公式（17）给出了Hilbert空间上有界线性算子T的Hilbert伴随算子T^*用T的伴随算子$T^{\times}$的表示.

另外，从(5)和A_1, A_2的等距性立即可得，$\|T^*\| = \|T\|$.

下面我们指出，$T: X \to Y$的伴随算子$T^{\times}$和$T: H_1 \to H_2$的Hilbert伴随算子T^*的主要区别. 其中，X，Y是赋范空间. 而H_1，H_2是Hilbert空间.

$T^{\times}$是定义在含有T的值域的空间的对偶空间上的. 而T^*是直接定义在包含T的值域的空间上的.

关于$T^{\times}$，根据(10)有，

$$(\alpha T)^{\times} = \alpha T^{\times}$$

但关于T^*，由定理3.6-4有，

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*.$$

在有穷维的情况下，$T^{\times}$用T的表示矩阵的转置来表示. 而T^*则用那个矩阵的复共轭转置表示.

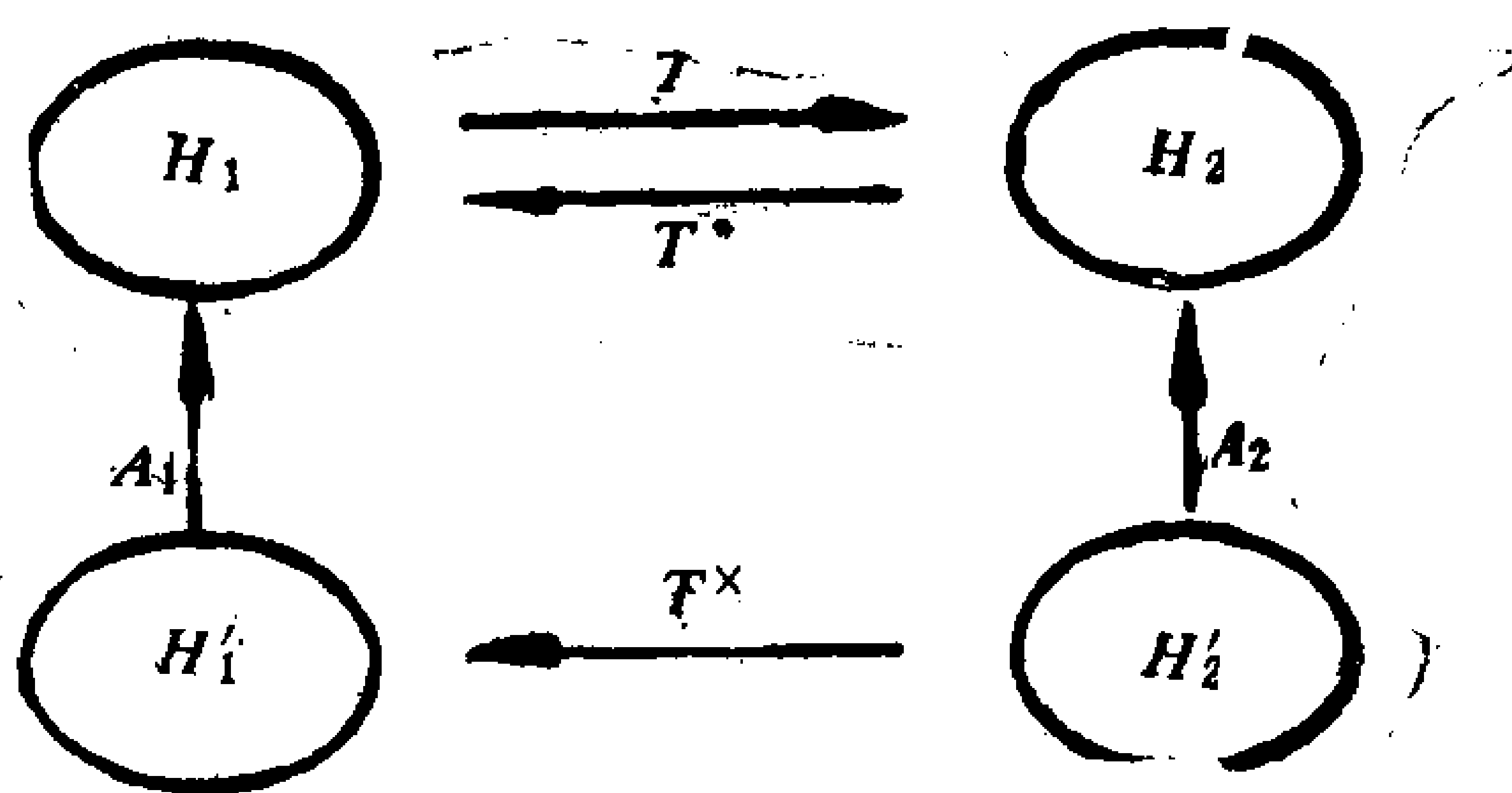


图26 公式（13）和（17）中的算子

习题 4.4

1. 证明通过(1)定义的泛函是线性的.

2. 零算子O和恒等算子I的伴随算子都是什么?

3. 证明(9)

4. 证明(10)

5. 证明(11)

6. 证明$(T^n)^\times=(T^\times)^n$

7. 将(11)和例题4.4-3联系起来，我们将得到什么样的矩阵公式?

8. 证明(12)

9. (零化子)设X，Y是赋范空间，$T:X\to Y$是一有界线性算子.$M=\overline{R(T)}$是T的值域的闭包。证明(参看§2.8习题19)

$$M^a=N(T^\times)$$

10. (零化子)设B是赋范空间X的对偶空间X^*的子集.B的零化子定义成

$$^aB=\{x\in X\,|\,f(x)=0,f\in B\}.$$

证明在习题9中,

$$R(T)\subset {}^aN(T^\times)$$

解方程$Tx=y$意味着什么呢?

§4.5 自反空间

向量空间的代数自反性已在§2.8讨论过.本节转向考虑赋范空间的自反性.

赋范空间X的对偶空间X^*在定义2.8-12中已给出.X^*的对偶空间$(X^*)^*$记作X^{**},并称做X的**第二对偶空间**.

取一固定的$x\in X$.我们在X^*上定义一泛函J_x为

$$J_x(f)=f(x) \qquad f\in X^* \tag{1}$$

由于f有界，于是J_x亦有界．并有下列引理．

4.5-1 引理(J_x的范数)．对于赋范空间X中的每个x，由(1)定义的泛函J_x是X^*上的一有界线性泛函．即$J_x\in X^{**}$．其范数满足

$$\|J_x\|=\|x\| \tag{2}$$

证明．J_x的线性性从§2.8可知，而(2)式由(1)与推论4.3-4得

$$\|J_x\|=\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|J_x(f)|}{\|f\|}=\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}=\|x\| \tag{3}$$

对于每个$x\in X$，均对应一个由(1)定义的唯一的有界线性泛函$J_x\in X^{**}$，这就定义了一个映射．

$$J:X\to X^{**}$$
$$x\mapsto J_x \tag{4}$$

J称做X到X^{**}的**标准映射**．我们证明J是线性的、单射且保范的．这可用§2.3中赋范空间同构的术语来表达．

4.5-2 引理(标准映射)．由(4)定义的标准映射J是赋范空间X到赋范空间$R(J)$上的一同构，这里$R(J)$是J的值域．

证明．J的线性性如§2.8中看到的一样，这是因为．

$$J_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$
$$=\alpha J_x(f)+\beta J_y(f)$$

特别是，$J_x-J_y=J_{x-y}$，因此由(2)得．

$$\|J_x-J_y\|=\|J_{x-y}\|=\|x-y\|$$

这表明J是等距的、保范的．等距蕴涵单射．所以，J作为到它的值域$R(J)$上的映射是双射．

对于赋范空间X和Z，如果X与Z的子空间是同构的(参看§2.3)．则称X嵌入在Z中．引理4.5-2表明X是嵌入在X^{**}中的．J也称做X到X^{**}中的标准嵌入．

一般说来，J不是满射．因此值域$R(J)$是X^{**}的真子空间．当J是满射时，即$R(J)=X^{**}$有如下概念．

4.5-3 定义(自反性)．赋范空间X若有

$$R(J)=X^{**}$$

则称X是**自反的**．这里$J:X\to X^{**}$是由(4)和(1)给出的标准映射．

这个概念是H.Hahn1927年提出的．由E.R.Lorch(1939)命名为“自反性”．*Hahn*在赋范空间内线性方程的研究中，以及对偶空间理论的早期探索，均认识到自反性的重要．

若X是自反的．由引理4.5-2，X与X^{**}是同构的．但其逆一般是不成立的，这已由*R.C.*James（1950，1951)所证明．

另外，完备性不蕴涵自反性，但是反过来有下面的定理．

4.5-4 定理(完备性)．如果赋范空间X是自反的，则它是完备的（因此是一*Banach*空间）

证明　因为X^{**}是X^*的对偶空间，由定理2.7-14知X^{**}是完备的．根据假设X是自反的，即$R(J)=X^{**}$．利用引理4.5-2以及X^{**}的完备性立即证得X是完备的．

对于赋范空间X，若$\dim X<\infty$，则X上每个线性泛函都是有界的（参看定理2.7-8），于是，$X'=X^*$．由X的代数自反性(2.8-11)可得如下定理．

4.5-5 定理（**有穷维数**）．每个有穷维赋范空间是自反的．

例如，R^n是自反的．在无穷维空间中，$l^p(1<p<\infty)$，$L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$是自反的．能够证明，$C[a,b]$，l^1、$L^1[a,b]$、l^∞以及l^∞的子空间c（所有收敛数列的空间） 和c_0（收敛到零的数列构成的空间）均是非自反空间．

4.5-6 定理（Hilbert**空间**）每个Hilbert空间是自反的．

证明 我们要证标准映射 $J:H\to H^{**}$是满射的．即对于每个$g\in H^{**}$，存在一个$x\in H$，使得$g=J_x$．为此首先作为准备工作，我们定义 $A:H^*\to H$为$Af=z$，这里的f和z是由3.5-1中Riesz表示$f(x)=\langle x,z\rangle$给定的．从定理3.5-1知，A是一个双射、等距的和共轭线性的．由定理2.8-13，H^*是完备的，并且是一个$Hilbert$空间．其内积定义为

$$\langle f_1,f_2\rangle_1=\langle Af_2,Af_1\rangle$$

易验证它满足§3.1中的$(Ip1)$至$(Ip4)$．特别地，从A的共轭线性立即得到$(Ip2)$，

$$\langle af_1,f_2\rangle_1=\langle Af_2,A(af_1)\rangle=\langle Af_2,\overline{a}\,Af_1\rangle$$
$$=a\langle f_1,f_2\rangle_1$$

对于任意$g\in H^{**}$，令其$Riesz$表示式为，

$$g(f)=\langle f,f_0\rangle_1=\langle Af_0,Af\rangle$$

我们记得，$f(x)=\langle x,z\rangle$，其中$z=Af$，记$Af_0=x$．于是有，

$$\langle Af_0,Af\rangle=\langle x,z\rangle=f(x)$$

合起来得，$g(f)=f(x)$，根据J的定义，即有，$g=J_x$．因为$g\in H^{**}$是任意的，从而证得J是满射，因此，H是自反的．

4.5-7 引理（一个泛函的存在性）．设Y是赋范空间X的真闭子空间．任取$x_0 \in X-Y$，令

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \tag{5}$$

表示x_0到Y的距离．则存在一$\tilde{f} \in X^*$，使得，$\|\tilde{f}\| = 1$ (6)

对于所有$y \in Y$有$\tilde{f}(y) = 0$，$\tilde{f}(x_0) = \delta$．

证明．这个证明的思路是简单的．我们考虑由Y和x_0张成的子空间$Z \subset X$．在Z上定义一有界线性泛函f为，

$$f(z) = f(y + \alpha x_0) = \alpha\delta \tag{7}$$

然后证明f满足(6)，再利用定理4.3-2将f延拓到X上．详证如下．

每个$z \in Z = \mathrm{Span}(Y \cup \{x_0\})$有唯一的表示式，

$$z = y + \alpha x_0$$

f为线性是显然的．因为Y是闭的，于是，$\delta > 0$，$f \neq 0$．当$\alpha = 0$时，对于所有$y \in Y$，$f(y) = 0$．对于$\alpha = 1$和$y = 0$有，$f(x_0) = \delta$．

我们证明f是有界的．$\alpha = 0$得$f(z) = 0$，令$\alpha \neq 0$，利用(5)并注意到$(-\frac{1}{\alpha})y \in Y$，得，

$$|f(z)| = |\alpha|\,\delta = |\alpha| \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\|$$

$$\leqslant |\alpha|\, \left\|-\frac{1}{\alpha}y - x_0\right\| = \|y + \alpha x_0\|$$

即，$|f(z)| \leqslant \|z\|$．因此f有界且$\|f\| \leqslant 1$

我们来证$\|f\| \geqslant 1$．根据下确界的定义，Y必包含一序列

(y_n)，使得$\|y_n - x_0\| \to \delta$. 令，$z_n = y_n - x_0$，则$f(z_n) = -\delta$，且

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geqslant \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|}$$

$$= \frac{\delta}{\|z_n\|} \to \frac{\delta}{\delta} = 1$$

（当$n \to \infty$时），因此$\|f\| \geqslant 1$，于是证得$\|f\| = 1$，根据关于赋范空间的Hahn-Banach定理4.3-2，我们可以不增大范数地将f延拓到X上.

利用这个引理，我们将得到所需要的定理.

4.5-8 定理（可分性）. 如果一赋范空间X的对偶空间X^*是可分的，则X自身是可分的.

证明 假设X^*是可分的，则单位球面$U^* = \{f \mid \|f\| = 1\} \subset X^*$也包含一可数稠密子集$\{f_n\}$，因为$f_n \in U^*$，有

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\| = 1} |f_n(x)| = 1$$

根据上确界的定义，我们可找到范数为1的点$x_n \in X$，使得

$$|f_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}$$

令$Y = \overline{\mathrm{Span}(x_n)}$，因为$Y$有一可数的稠密子集，即系数的实部和虚部均是有理数的x_n的所有线性组合的集合. 所以Y是可分的.

我们证明$Y = X$. 假定$Y \neq X$，由Y是闭的，根据引理4.5-7，存在一$\tilde{f} \in X^*$，$\|\tilde{f}\| = 1$，对于所有$y \in Y$，$\tilde{f}(y) = 0$. 因为$x_n \in Y$，于是$\tilde{f}(x_n) = 0$，并且对于所有的n有，

$$\frac{1}{2}\leqslant |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - \widetilde{f}(x_n)|$$

$$= |(f_n - \widetilde{f})(x_n)| \leqslant \|f_n - \widetilde{f}\| \|x_n\|$$

这里$\|x_n\|=1$,因此, $\|f_n - \widetilde{f}\| \geqslant \frac{1}{2}$,但是这与$(f_n)$在$U^*$中稠密矛盾（因为$\|\widetilde{f}\|=1$，故$\widetilde{f}\in U^*$)

定理4.5-8表明X^*的可分性蕴涵X的可分性（其逆一般不正确）．若赋范空间X是自反的，由引理4.5-2，X^{**}与X是同构的，从定理4.5-8知，X^*亦是可分的．由此可得如下结论，

一个可分的赋范空间X，若其对偶空间X^*不可分，则X不可能是自反的.

例如．l^1不是自反空间.

证明　由定义1.3-7的例3知l^1是可分的．但是，$(l^1)^*=l^\infty$是不可分的（请看2.8-15和1.3-7中的例4）从而证得l^1不是自反的.

习　题　4.5

1．如果$X=R^n$，那么(1) 式中的泛函f和J_x是什么？

2．对于X是Hilbert空间的情况，给出引理4.5-7一个简单的证明．

3．若赋范空间X是自反的，证明X^*是自反的．

4．证明Banach空间是自反的充要条件为它的对偶空间X^*是自反的．(提示：可以证明自反的$Banach$空间的闭子空间是自反的．可不

加证明的利用这一结果）．

5．证明，在引理4.5-7的假设下，X上存在一有界线性泛函h，使得，

$$\|h\|=\frac{1}{\delta}，\text{对于所有}y\in Y\text{有}h(y)=0,h(x_0)=1$$

6．证明，赋范空间X的不同的闭子空间Y_1和Y_2有不同的零化子（参看§2.8习题19）

7．设Y是赋范空间X的一闭子空间，若对于在Y上处处为零的每个$f\in X^*$，在整个X上也处处为零．试证明$Y=X$．

8．设M是赋范空间X的任意子集．证明．$x_0\in X$为$A=\overline{\text{Span}M}$的一个元素其充要条件是：对于使得$f|_M=0$的每个$f\in X^*$，$f(x_0)=0$．

9．（完全集）证明赋范空间X的一子集M在X中是完全的，其充要条件是：在M上处处为零的每个$f\in X^*$，在X上也处处为零，

10．证明，若赋范空间X有一包含n个元素的线性无关子集，则对偶空间X^*也有这样的集．

§4.6 范畴定理、一致有界性定理

由S. Banach和H. Steinhaus（1927年）给出的一致有界性定理是很重要的．事实上分析中很多结果依赖于此定理．一致有界性定理常被认为赋范空间中泛函分析的四基石之一．其他三个是：Hahn-Banach定理（§4.2、§4.3）、开映象定理（§4.11）、闭图象定理．在这四个定理中除去Hahn-Banach定理都要用到完备性，它们确实表征了Banach空间最重要的特性，这些在一般的赋范空间是不具备的．

值得注意的是，这三个定理均从共同出处——Baire范畴定理推得的．范畴定理在泛函分析中还有其他各种应

用，从而在很多证明中均得到引用.

关于Baire定理4.6-2所需要的概念在定义4.6-1中给出. 每个概念有两个名称，一个是新的，旧的在括号里给出. 这完全出于不同的数学用途.

4.6-1 定义（范畴）. 设M是度量空间X的子集.

(a) 若M的闭包$\overline{M}$没有内点（参看§1.3），则称M在X中是稀疏的（或无处稠密的）

(b) 若M是X中可数个稀疏集的并，则称M是X中的瘠集（或第一范畴集）.

(c) 若M不是X中的瘠集，则称M是X中的非瘠集（或第二范畴集）.

4.6-2 Baire范畴定理（完备的度量空间）. 如果度量空间$X\neq\varnothing$是完备的，则它在自身中是非瘠的.

因此，若$X\neq\varnothing$是完备的，且

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \qquad (A_k\text{是闭集}) \tag{1}$$

则至少有一个A_k，包含一个非空的开子集.

证明　证明的思路是简单的.假定完备的度量空间$X\neq\varnothing$在自身中是瘠集. 则有，

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k \tag{1*}$$

每个M_k在X中是稀疏的. 我们构造一Cauchy序列(P_k)，其极限P（根据完备性它存在）不在M_k里. 因此与表达式(1*)矛盾.

由假设，M_1在X中是稀疏的，根据定义，$\overline{M}_1$不包含非空开子集. 但X包含非空开子集（例如，X自身）. 这蕴涵

$\overline{M_1} \neq X$，因此$\overline{M_1}$的余集$\overline{M_1}^c = X - \overline{M_1}$是非空的开子集．于是我们可选$\overline{M_1}^c$中一点$P_1$和以$P_1$为中心的球

$$B_1 = B(P_1, \varepsilon_1) \subset \overline{M_1}^c \qquad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

根据假设，M_2在X中是稀疏的，$\overline{M_2}$不包含一非空开子集，因此不包含开球$B\left(P_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1\right)$，这蕴涵$\overline{M_2}^c \cap B\left(P_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1\right)$是非空开子集，于是在这个集中可选一开球

$$B_2 = B(P_2, \varepsilon_2) \subset \overline{M_2}^c \cap B\left(P_1, \frac{1}{2}\varepsilon_1\right) \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$$

由归纳法，我们可得一球列．

$$B_k = B(P_k, \varepsilon_k) \qquad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

使得，$B_k \cap M_k = \varnothing$．且，

$$B_{k+1} \subset B\left(P_k, \frac{1}{2}\varepsilon_k\right) \subset B_k \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

因为，$\varepsilon_k < 2^{-k}$，则球心的序列(P_k)是柯西序列，且收敛，即$P_k \to P \in X$．（由假设X是完备的）．又，对于每个m和$n > m$，有，

$B_n \subset B\left(P_m, \frac{1}{2}\varepsilon_m\right)$，因此，

$$d(P_m, P) \leqslant d(P_m, P_n) + d(P_n, P)$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(P_n, P) \to \frac{1}{2}\varepsilon_m \qquad (n \to \infty\text{时})$$

故对于每个m. $P\in B_m$. 因为$B_m\subset\overline{M}_m^c$，所以对于每个$m$，$P\notin M_m$，因而，$P\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k=X$，这与$P\in X$矛盾. 于是定理得证.

要注意Baire定理的逆一般是不正确的. N. Bourbaki（1955年）在他们书中曾举过一个在自身中是非瘠的非完备的赋范空间的例子.

从Baire定理直接可推得一致有界性定理，该定理指出，若X是一Banach空间，且算子序列$(T_n)\subset B(X,Y)$在每一点$x\in X$是有界的，则这个序列是一致有界的. 即逐点有界蕴涵一致有界性.

4.6-3 一致有界性定理. 设(T_n)是从Banach空间X到赋范空间Y中的有界线性算子T_n: $X\to Y$的序列. 并且对于每个$x\in X$，（$\|T_nx\|$）是有界的. 即，

$$\|T_nx\|\leqslant C_x \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2}$$

这里C_x是一实数. 则范数序列（$\|T_n\|$）是有界的. 即存在一个正数C，使得，

$$\|T_n\|\leqslant C \qquad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

证明 对于每个$k\in N$. 设$A_k\subset X$是使

$\|T_nx\|\leqslant k$ 对于所有n成立的所有x的集合. 现证A_k是闭的. 对于任意$x\in\overline{A}_k$. 在A_k中存在一序列(x_j)收敛于x，对于每个固定的n，有$\|T_nx_j\|\leqslant k$，由于T_n是连续的. 范数也连续（参看§2.2之(7)）. 因此得$\|T_nx\|\leqslant k$. 即$x\in A_k$. A_k是闭的.

由(2) 对于每个$x\in X$，一定属于某个A_k. 因此，

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

因为X是完备的，Baire定理蕴涵某个A_{k_0}必含一开球。即.

$$B_0=B(x_0;r)\subset A_{k_0} \tag{4}$$

设$x\in X$是任意的非零元素．令，

$$z=x_0+\alpha x. \qquad \alpha=\frac{r}{2\|x\|} \tag{5}$$

则，$\|z-x_0\|<r$，故$z\in B_0$．由(4) 和A_{k_0}的定义，$\|T_n z\|\leqslant k_0\ (n=1,2\cdots)$，因为$x_0\in B_0$，也有$\|T_n x_0\|\leqslant k_0\ (n=1,2\cdots)$。由(5) 得.

$$x=\frac{1}{\alpha}(z-x_0)$$

对于所有的n.

$$\|T_n x\|=\frac{1}{\alpha}\|T_n(z-x_0)\|\leqslant\frac{1}{\alpha}(\|T_n z\|+\|T_n x_0\|)$$

$$\leqslant\frac{4}{r}\|x\|k_0$$

因此，对于所有的n.

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_n x\|\leqslant\frac{4}{r}k_0$$

应用

4.6-4　多项式空间．多项式的全体构成的赋范空间X，其范数定义为

$$\|x\|=\max_i|\alpha_i| \tag{6}$$

($\alpha_0,\alpha_1,\cdots$,是x的系数)．则X是非完备的.

证明．在X上构造一个满足(2)但不满足(3)的有界线性算子序列．因此，X不可能是完备的．

我们可将次数为N_x的多项式$x\neq 0$表成

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j t^j \quad (\text{当} j=N_x \text{时，} \alpha_j\neq 0\text{；} j>N_x\text{时．} \alpha_j=0)$$

（对于$x=0$，一般讨论中次数是不确定的，但在这里不是实质问题）通过

$$T_n 0=f_n(0)=0, T_n x=f_n(x)=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1} \quad (7)$$

定义的泛函f_n的序列作为X上的算子T_n序列．显然，f_n是线性的．由(6)有$|\alpha_j|\leqslant\|x\|$，从而，$|f_n(x)|\leqslant n\|x\|$，即f_n是有界的．此外，对于每个固定的$x\in X$，因为次数为N_x的多项式x有N_x+1个系数，所以由(7)有，

$$|f_n(x)|\leqslant(N_x+1)\max_j|\alpha_j|=C_x$$

即序列$(|f_n(x)|)$满足(2)．

现在我们证明(f_n)不满足(3)．我们选

$$x(t)=1+t+\cdots+t^n$$

则 $\|x\|=1$，且

$$f_n(x)=1+1+\cdots+1=n=n\|x\|$$

因此，$\|f_n\|\geqslant\frac{|f_n(x)|}{\|x\|}=n$． 故$(\|f_n\|)$无界．

4.6-5 Fourier级数．周期为2π的周期函数x的Fourier级数为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mt+b_m\sin mt) \quad (8)$$

这里x的傅里叶系数由欧拉公式给出

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos mt\,dt,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin mt\,dt \tag{9}$$

级数(8) 甚至在x的不连续点也可能收敛（习题15给出一个简单的例子），这表明连续性关于收敛性并非是必要的．更令人感到意外的是连续性也不是充分的．利用一致有界性定理，我们可以证明下述结论．

存在实值连续函数，其Fourier级数在给定点t_0发散．

证明．设X是周期为2π的实值连续函数的全体构成的赋范空间，其范数定义为

$$\|x\| = \max|x(t)| \tag{10}$$

由1.5-5知X是Banach空间；令$f_n(x)$是x的Fourier级数前n项的部分和在$t=0$处的值．

即，

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mt\right]dt.$$

为求出积分号下和所确定的函数，我们计算，

$$2\sin\frac{1}{2}t\sum_{m=1}^{n}\cos mt$$

$$= \sum_{m=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}t\cos mt$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\left[-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)t + \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$= -\sin\frac{1}{2}t + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

由此得,

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

于是$f_n(x)$可写成如下形式.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)\,dt \tag{11}$$

$$q_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

我们证明线性泛函f_n是有界的. 事实上, 由 (10) 和 (11) 有,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max|x(t)|\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt$$

$$= \frac{\|x\|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt.$$

在范数为 1 的所有x上取上确界, 得,

$$\|f_n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt.$$

实际上, 等号成立. 我们将证明这点, 为此, 将$|q_n(t)|$表成如下形式

$$|q_n(t)| = y(t)q_n(t)$$

这里， $y(t)=\begin{cases}1 & q_n(t)\geqslant 0\\ -1 & q_n(t)<0\end{cases}$

$y(t)$是不连续的．但是，对于任意给定的$\varepsilon>0$，可变更范数为 1 的连续函数$x(t)$，使得对于这个x，有，

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}[x(t)-y(t)]q_n(t)dt\right|<\varepsilon$$

将此式写成两个积分并利用(11)得，

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}x(t)q_n(t)dt-\int_0^{2\pi}y(t)q_n(t)dt\right|$$

$$=\left|f_n(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt\right|<\varepsilon$$

因为$\varepsilon>0$是任意的，且$\|x\|=1$．于是证得．

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt. \tag{12}$$

最后，证明序列$(\|f_n\|)$是无界的．将(11)中的q_n代入(12)，

对于$t\in(0,\ 2\pi]$，$\left|\sin\frac{1}{2}t\right|<\frac{1}{2}t$.

令$\left(n+\frac{1}{2}\right)t=v$，得，

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt$$

$$>\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|\,dv$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\to\infty \quad (当n\to\infty时)$$

这是因为调和级数发散．因此，($\|f_n\|$)是无界的．故(3)不成立．由于X是完备的，这蕴涵(2)不是对所有x都成立，即必有一个$x\in X$，使得($|f_n(x)|$)无界．但由f_n的定义，这意味着x的Fourier级数在$t=0$处发散．

习 题 4.6

1．所有有理数的集合

(a) 在R中

(b) 在自身中

都属于什么范畴（采用通常的度量）

2．所有整数的集合．

(a) 在R中

(b) 在自身中（取R中的度量）

都属于哪个范畴？

3. 求出离散度量空间X中的所有稀疏集（参看1.1-2中的例5）

4. 求R^2中一个瘠稠密子集.

5. 证明度量空间X的一子集M在X中是稀疏的当且仅当$(\overline{M})^c$在X中是稠密的.

6. 证明完备度量空间X的瘠子集M的余集M^c是非瘠的.

7. （共鸣）设X是-Banach空间，Y是一赋范空间. $T_n\in B(X, Y)$，$n=1, 2\cdots$，且$\sup_n\|T_n\|=+\infty$ 证明存在一$x_0\in X$，使得$\sup_n\|T_nx_0\|=+\infty$（点x_0通常称为共鸣点）

8. 证明在定理4.6-3中，X的完备性是必不可少的.（考虑子空间$X\subset l^\infty$，X是由对于$j\geqslant J\in N$，$\xi_j=0$的$x=(\xi_j)$组成的，这里J依赖于x.并通过$T_nx=f_n(x)=n\xi_n$定义T_n）

9. 设$T_n=S^n$，其中算子$S:l^2\to l^2$定义为

$(\xi_1, \xi_2, \cdots,)\mapsto(\xi_3, \xi_4, \cdots)$ 求出$\|T_nx\|$的一个界，并求出$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx\|$，$\|T_n\|$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$.

10. （C_0空间）设$y=(\eta_j)$，$\eta_j\in C$，对于每个$x=(\xi_j)\in C_0$，级数$\Sigma\xi_j\eta_j$均收敛.这里$C_0\subset l^\infty$是所有收敛于0的复数列的子空间.证明$\Sigma|\eta_j|<\infty$（利用4.6-3）.

11. 设X是一Banach空间，Y是一赋范空间，且$T_n\in B(X,Y)$对于每个$x\in X$，(T_nx)均是Y中的Cauchy序列.证明（$\|T_n\|$）是有界的.

12. 如果习题11中的Y是完备的. 证明，$T_nx\to Tx$.这里$T\in B(X, Y)$.

13. 如果Banach空间X中的序列(x_n)，对于所有$f\in X^*$，$(f(x_n))$是有界的，证明$(\|x_n\|)$是有界的.

14. 如果X和Y是Banach空间，$T_n\in B(X,Y)$，$n=1, 2,\cdots$，证明以下命题是等价的.

(a) $(\|T_n\|)$是有界的.

(b) 对于每个$x\in X$，($\|T_n x\|$)是有界的.

(c) 对于所有$x\in X$和所有$g\in Y^*$，($|g(T_n x)|$)是有界的.

15. 为了验证一个函数$x(t)$的Fourier级数甚至在不连续点也可能收敛. 试求出

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{当}-\pi\leqslant t<0\\ 1 & \text{当}0\leqslant t<\pi\end{cases}\qquad \text{且}x(t+2\pi)=x(t)$$

的Fourier级数.（请看图27）

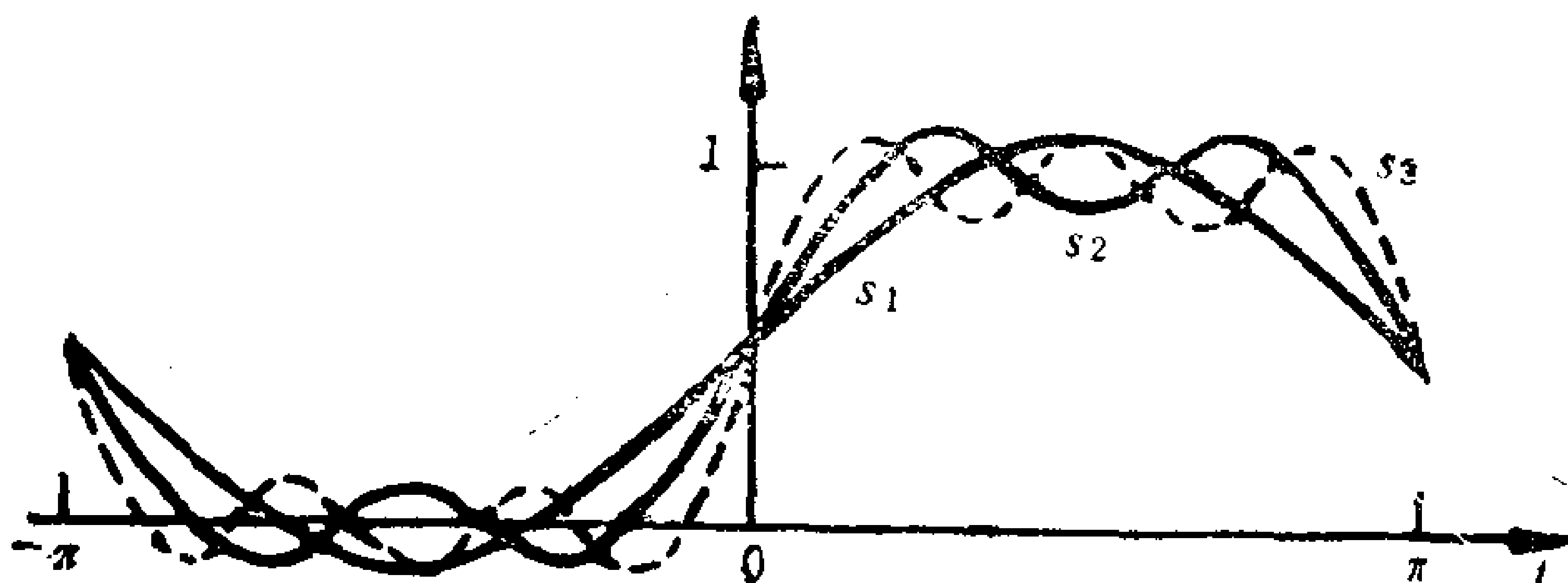


图27　习题15中的Fourier级数前三项S_1、S_2、S_3

§4.7　强收敛与弱收敛

我们知道在微积分中，定义了不同类型的收敛性（通常收敛、条件收敛、绝对收敛以及一致收敛）. 这使序列和级数的理论及应用具有较大的灵活性. 在泛函分析中情况与此类似，甚至内容更丰富. 本节主要讨论"弱收敛"，这是一个基本概念，是前节一致有界性定理重要应用之一.

在§2.2 定义的赋范空间中元素序列的收敛，现在称做强收敛. 以区别下面介绍的"弱收敛".

4.7-1　**定义(强收敛)**　赋范空间X中的序列(x_n). 称为强收敛的（或依范数收敛）. 如果存在一$x\in X$使得,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

记作，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 或$x_n \to x$.

x称做(x_n)的强极限，或称(x_n)强收敛于x.

4.7-2 **定义（弱收敛）**．赋范空间X中的序列(x_n)称为弱收敛的．如果存在一$x \in X$，使得对于每个$f \in X^*$，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

记作，$x_n \xrightarrow{W} x$或$x_n \longrightarrow x$

x称做(x_n)的弱极限．称(x_n)弱收敛于x.

从定义中知，弱收敛意味着对于每个$f \in X^*$，数列$a_n = f(x_n)$均收敛.

弱收敛在整个分析中有各种应用，为此我们必须了解其基本性质。

4.7-3 **引理（弱收敛）**．设(x_n)是赋范空间X中一弱收敛序列．即，$x_n \xrightarrow{W} x$，则，

(a) (x_n)的弱极限x是唯一的.

(b) (x_n)的每个子序列弱收敛于x.

(c) 序列$(\|x_n\|)$是有界的.

证明．(a)．设$x_n \xrightarrow{W} x$，同时，$x_n \xrightarrow{W} y$．则，$f(x_n) \longrightarrow f(x)$，且$f(x_n) \longrightarrow f(y)$．因为$(f(x_n))$是一数列．其极限是唯一的．因此$f(x) = f(y)$．即对于每个$f \in X^*$，有

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0\ .$$

根据推论4.3-4，这蕴涵$x - y = \theta$．从而证明了弱极限是唯一的.

(b) 由于 $(f(x_n))$是一收敛的数列，因此，$(f(x_n))$的每个子序列收敛且均收敛于$f(x)$.

(c) 因为 $(f(x_n))$是一收敛的数列，所以它是有界的．即对于所有的n，$|f(x_n)| \leqslant C_f$．这里C_f是依赖于f而不依赖于n的常数．利用标准映射J：$X \to X^{**}$(§ 4.5)，通过

$$g_n(f) = f(x_n) \qquad f \in X^*$$

定义$g_n \in X^{**}$．则对于所有的n，

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leqslant C_f$$

即对于每个$f \in X^*$，序列$(|g_n(f)|)$是有界的．因为X^*是完备的（根据定理2.8－13），利用一致有界性定理4.6-3．得$(\|g_n\|)$是有界的．由4.5-1、$\|g_n\| = \|x_n\|$．因此(c)得证．

读者也许感到奇怪，为什么弱收敛性在微积分中不起作用？理由很简单，因为在有穷维赋范空间中，强收敛和弱收敛之间的区别完全消失．让我们来证明这个事实并说明用“强”和“弱”术语的理由。

4.7-4 定理（强收敛和弱收敛）．设(x_n)是赋范空间X中一序列．则，

(a) 强收敛蕴涵具有同一极限的弱收敛．

(b) (a)的逆一般不真．

(c) 如果$\dim X < \infty$，则弱收敛蕴涵强收敛．

证明．(a)根据定义，$x_n \to x$，意即$\|x - x_n\| \to 0$这蕴涵

对于每个$f\in X^*$，

$$\left|f(x_n)-f(x)\right|=\left|f(x_n-x)\right|\leqslant\|f\|\,\|x_n-x\|\to 0$$

从而证得$x_n\xrightarrow{W}x$.

(b) 从Hilbert空间中标准直交序列(e_n)可证实这一点．事实上，每个$f\in H^*$有一个Riesz表示$f(x)=\langle x,\ z\rangle$．于是$f(e_n)=\langle e_n,z\rangle$，由Bessel不等式（参看§3.4公式(2)）有，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle e_n,z\rangle\right|^2\leqslant\|z\|^2$$

因此，左边的级数收敛，这蕴涵，当$n\to\infty$时

$$f(e_n)=\langle e_n,z\rangle\to 0$$

由$f\in H^*$是任意的，故，$e_n\xrightarrow{W}\theta$. 但是，

$$\|e_m-e_n\|^2=\langle e_m-e_n,\ e_m-e_n\rangle=2\quad(m\neq n)$$ 所以

(e_n)不是强收敛.

(c) 假设$x_n\xrightarrow{W}x$，且$\dim X=k$，令，$\{e_1,\cdots,e_K\}$是X的任意一个基，于是，

$$x_n=\alpha_1^{(n)}e_1+\cdots+\alpha_k^{(n)}e_k$$

$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ke_n$对于每个$f\in X^*$，根据假设，$f(x_n)\to f(x)$，特别取由

$$f_j(e_j)=1,\quad f_j(e_m)=0\qquad(m\neq j)$$

定义的$\{f_1,\cdots,f_j.\ \}$是$\{e_1,\cdots,e_j\}$的对偶基，参看§2.8)、于是，

$$f_j(x_n)=\alpha_j^{(n)},\quad f_j(x)=\alpha_j$$

$f_j(x_n)\to f_j(x)$即$\alpha_j^{(n)}\to\alpha_j$. 因此，

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \, \|e_j\| \to 0 \ (n \to \infty \text{ 时}).$$

故得(x_n)强收敛于x.

注意，也存在无穷维空间，强收敛和弱收敛是等价概念．例如，l^1就是这样的空间.这已由I. Schur(1921)证明.

最后，我们考察两个特别重要空间中的弱收敛性

4.7-5 **Hilbert空间**．在Hilbert空间中，$x_n \xrightarrow{W} x$当且仅当对于空间中的所有z，$\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle$.

证明．根据定理3.5-1，这是显然的.

4.7-6 **l^p空间**.在l^p空间中,这里$1<p<\infty$，$x_n \xrightarrow{W} x$当且仅当.

(*A*) 序列$(\|x_n\|)$是有界的.

(*B*) 对于每个固定的j，有$\xi_j^{(n)} \to \xi_j$ ($n\to\infty$时)，这里，$x_n = (\xi_j^{(n)})$，$x = (\xi_j)$.

证明．l^p的对偶空间是l^q．（参看2.8－16)，l^q的一个Schauder基是(e_n)，$e_n = (\delta_{nj})$，即e_n以第n项是1，其余各项全是零．Span(e_n)在l^q中稠密．所以从下面引理中此结论可立即得证.

4.7-7 **引理（弱收敛）**．在赋范空间X中，$x_n \xrightarrow{W} x$当且仅当，

(*A*) 序列$\left(\|x_n\|\right)$是有界的.

(*B*) 对于一个完全子集$M \subset X^*$的每个元素f，有$f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

证明．若$x_n \xrightarrow{W} x$，则显然(B)成立，(A)从引理4.7-3可得证．

反过来，假定(A)和(B)成立．让我们考虑任意$f\in X^*$，证明$f(x_n) \longrightarrow f(x)$．

由(A)知，必存在一个足够大的数C，使得对于所有的n，$\|x_n\|\leqslant c$，且，$\|x\|\leqslant c$．因为M是X^*中的完全集，对于每个$f\in X^*$，$\mathrm{Span}M$中存在一序列(f_n)，使得$f_n\to f$．因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，我们可找一个j，使，

$$\|f_j-f\|<\frac{\varepsilon}{3c}$$

由于$f_j\in \mathrm{Span}M$，从(B)知，存在一个N，当$n>N$时，

$$\left|f_j(x_n)-f_j(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

利用三角不等式及这两个不等式，对于$n>N$．

$$\begin{aligned}\left|f(x_n)-f(x)\right| &\leqslant \left|f(x_n)-f_j(x_n)\right|+\left|f_j(x_n)-f_j(x)\right|+\left|f_j(x)-f(x)\right| \\ &<\|f-f_j\|\,\|x_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_j-f\|\,\|x\| \\ &<\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c=\varepsilon.\end{aligned}$$

因为$f\in X^*$是任意的．从而证明了序列(x_n)弱收敛于x．

习 题 4.7

1．（逐点收敛）如果$x_n\in C[a,b]$，且$x_n \xrightarrow{W} x\in C[a,b]$，证明

(x_n)在$[a,b]$上是逐点收敛的．即对每个$t\in[a,b]$，$(x_n(t))$收敛．

2．设X和Y是赋范空间，$T\in B(X,Y)$，(x_n)是X中一序列．若$x_n\xrightarrow{W}x_0$，证明$Tx_n\xrightarrow{W}Tx_0$

3．如果(x_n)和(y_n)是一赋范空间X中的序列。证明$x_n\xrightarrow{W}x$，$y_n\xrightarrow{W}y$蕴涵$x_n+y_n\xrightarrow{W}x+y$和$\alpha x_n\xrightarrow{W}\alpha x$。这里$\alpha$是任意数．

4．在赋范空间X中，如果$x_n\xrightarrow{W}x_0$，证明$x_0\in\overline{Y}$，这里$Y=\text{Span}(x_n)$．（利用引理4.5-7）

5．如果(x_n)是赋范空间X中的弱收敛序列，即$x_n\xrightarrow{W}x_0$。证明存在一个由(x_n)的元素的线性组合构成的序列(y_m)强收敛于x_0。

6．证明，一个赋范空间X的任意闭子空间Y，包含由它的元素组成的所有弱收敛序列的极根．

7．（弱Cauchy序列）在实的或复的赋范空间X中的弱Cauchy序列，是指X中的序列(x_n)，对于每个$f\in X^*$，序列$(f(x_n))$是R中或C中的Cauchy序列．（注意，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在）证明弱Cauchy序列是有界的．

8．设A是赋范空间X中一子集，如果A的每个非空子集均包含一个弱柯西序列，证明A是有界的．

9．（弱完备性）如果赋范空间X中的每个弱Cauchy序列在X中是弱收敛的，则称X是弱完备的．证明若X是自反的，则X是弱完备的。

§4.8 算子序列和泛函序列的收敛

前节介绍的赋范空间中元素序列的强收敛和弱收敛概念

是很有用的．而算子序列$\{T_n\}\subset B(X,Y)$三种类型的收敛性无论在实际或理论上都是有价值的．

4.8-1 **定义(算子序列的收敛)**．设X和Y是赋范空间，算子$T_n\in B(X, Y)$的序列(T_n)称做，

(1) 一致收敛．如果(T_n)在$B(X,Y)$上依范数收敛

(2) 强收敛，如果对于每个$x\in X$，$(T_n x)$在Y中强收敛．

(3) 弱收敛．如果对于每个$x\in X$，$(T_n x)$在Y中弱收敛．

将上述表为公式形式，即：存在一个算子T：$X\to Y$，使得，

(1) $\|T_n-T\|\to 0$

(2) 对于所有$x\in X$，$\|T_n x-Tx\|\to 0$．

(3) 对于所有$x\in X$和所有$f\in Y^*$，

$$|f(T_n x)-f(Tx)|\to 0.$$

T分别称为(T_n)的一致(算子)收敛极限、强(算子)收敛极限．弱(算子)收敛极限．

不难证明．

$$(1)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(3).$$

(极限是相同的)．但其逆命题一般不真．这可从下面例题中看出．

4.8-2 (l^2**空间**) 在l^2空间中，考虑序列(T_n)，这里T_n：$l^2\to l^2$定义为

$$T_n x=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个零}},\xi_{n+1},\xi_{n+2},\xi_{n+3},\cdots)$$

$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,)\in l^2$.算子$T_n$是线性有界的.显然，$T_nx\to 0=0x$,即$T_n$强收敛于0,但$\|T_n-0\|=\|T_n\|=1$,所以,$(T_n)$不是一致收敛的.

4.8-3 (l^2空间) 在l^2空间上，考虑由

$$T_nx=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个零}},\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)$$

定义的算子T_n: $l^2\to l^2$的序列(T_n).这里，
$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,)\in l^2$.算子$T_n$是线性有界的. 我们来证$(T_n)$是弱收敛于0，但不是强收敛.

l^2上每个有界线性泛函f有一个3.5-1中的Riesz表示.即由3.1-5有，

$$f(x)=\langle x,z\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\overline{\zeta_j}$$

这里，$z=(\zeta_j)\in l^2$.利用T_n的定义得，

$$f(T_nx)=\langle T_nx,z\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\zeta_{n+k}}$$

根据1.2-2中的Cauchy-Schwarz不等式，

$$|f(T_nx)|^2=|\langle T_nx,z\rangle|^2$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\sum_{m=n+1}^{\infty}|\zeta_m|^2$$

当$n\to\infty$时,右边趋于0.于是$f(T_nx)\to 0=f(0x)$，因此,(T_n)是弱收敛于0.

但对于$x=(1,0,0,\cdots)$,有，

$$\|T_mx-T_nx\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\qquad(m\neq n)$$

即(T_n)不是强收敛的.

线性泛函是线性算子.因此(1)、(2)和(3)对线性有界泛

函也适用.但是现在的(2)和(3)是等价的.其理由是,$T_n x\in Y$变成$f_n(x)\in R$(或C),(2)和(3)的收敛均出现在有穷维(一维)空间R(或C)中,由定理4.7-4(c)得证(2)和(3)等价,余下的两个概念分别称做强收敛和弱*收敛(读作"弱星收敛")

4.8-4 定义(泛函序列的强收敛和弱*收敛) 设(f_n)是赋范空间X上的有界线性泛函序列.则,

(a) (f_n)强收敛,其为存在一$f\in X^*$,使得,$\|f_n-f\|\to 0$.记作

$$f_n\to f.$$

(b) (f_n)弱*收敛,其为存在一$f\in X^*$,使得对于所有$x\in X$,$f_n(x)\to f(x)$.记作

$$f_n\xrightarrow{w^*}f$$

(a)与(b)中的f分别称作(f_n)的强收敛极限和弱*收敛极限.

(f_n)的弱*收敛比其弱收敛要"弱".(f_n)弱收敛意即对于所有$g\in X^{**}$,$g(f_n)\longrightarrow g(f)$.由§4.5中定义的标准映射可知,弱收敛蕴涵弱*收敛(参看习题4).

让我们再回到算子$T_n\in B(X,Y)$上来.考察(1),(2)和(3)中极限算子T: $X\to Y$的性质.

若(T_n)一致收敛于T,则$T\in B(X,Y)$.如果(T_n)强收敛、或弱收敛于T,T保持线性.但是若X不是完备的,T可能是无界的.

例如,设X是l^2中只含有限多个非零项的序列$x=(\xi_i)$的全体.取l^2上的度量.则X是不完备的.在X上定义有界线性算子T_n为:

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).$$

序列(T_n)强收敛于无界线性算子T，T定义为$Tx=(\eta_j)$，$\eta_j = j\xi_j$

如果X是完备的．上述例子中所述情况就不会发生．因为有下列引理．

4.8-5 引理（强算子收敛） 设$T_n \in B(X,Y)$，这里X是一Banach空间．Y是一赋范空间，如果(T_n)是强（算子）收敛于极限算子T，则$T \in B(X,Y)$．

证明．由T_n为线性直接可得T亦为线性．下面证T是有界的．对于每个$x \in X$，$T_n x \to Tx$，故对于每个x，序列$(T_n x)$是有界的（参看引理1.4-2）．由X是完备的，根据一致有界性定理，$(\|T_n\|)$是有界的．即对于所有n．$\|T_n\| \leqslant C$．由此得，$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \|x\| \leqslant C\|x\|$．这蕴涵$\|Tx\| \leqslant C\|x\|$．

判别强（算子）收敛的一个有用准则是

4.8-6 定理（强算子收敛）． 设X和Y均是Banach空间，算子$T_n \in B(X,Y)$的序列(T_n)是强算子收敛的充要条件为：

(A)序列$(\|T_n\|)$是有界的．

(B)对于X的一完全子集M中的每个x，$(T_n x)$是Y里的Cauchy序列．

证明 若对于每个$x \in X$，$T_n x \to Tx$，则(A)由一致有界性定理可得出（因为X是完备的）．(B)显然成立．

反过来，假定(A)与(B)成立，于是对于所有的n，$\|T_n\| \leqslant C$．考虑任意$x \in X$，证明$(T_n x)$在Y中强收敛．给定$\varepsilon > 0$，因为$\mathrm{Span}M$在X中稠密，故存在一个$y \in \mathrm{Span}M$，使得，

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{3c}$$

由(B)知，$(T_n y)$是Cauchy序列，因此存在一个N，当m，$n>N$时，有

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

利用这两个不等式及三角不等式，对于$m, n>N$得，

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\| &\leqslant \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| \\ &\quad + \|T_m y - T_m x\| \\ &< \|T_n\|\,\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\|\,\|x-y\| \\ &< c\cdot\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\cdot\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$(T_n x)$在Y中是Cauchy序列.因为Y是完备的，$(T_n x)$在Y中收敛.由于$x\in X$是任意的，于是(T_n)强（算子）收敛性得证.

4.8-7 **推论**（泛函）．Banach空间X上的有界线性泛函序列(f_n)弱*收敛于X上一有界线性泛函当且仅当：

(A)序列$(\|f_n\|)$是有界的.

(B)对于X的一完全子集M中的每个x，$(f_n(x))$是Cauchy数列.

这个推论有重要的应用．后面我们将讨论其中的两个.

习 题 4.8

1．证明一致（算子）收敛$T_n\to T$，$T_n\in B(X,Y)$，蕴涵具有同一

极限T的强算子收敛.

2. 如果S_n, $T_n \in B(X,Y)$, 且(S_n)和(T_n)分别强算子收敛于S和T. 证明(S_n+T_n)强（算子）收敛于极限$S+T$.

3. 证明$B(X,Y)$中的强（算子）收敛蕴涵具有同一极限的弱（算子）收敛.

4. 证明弱收敛蕴涵弱* 收敛. 若X是自反的. 其逆亦成立.

5. 强（算子）收敛不蕴涵一致（算子）收敛. 通过下例验证之. 考虑$T_n = f_n : l^1 \to R$, 这里, $f_n(x) = \xi_n$, $x = (\xi_n)$.

6. 设$T_n \in B(X,Y)$, $n=1,2,\cdots$, 证明$T_n \to T$当且仅当, 对于每个$\varepsilon>0$, 总存在一个N（只依赖于ε）, 使得对于所有$n>N$和所有范数为1的$x \in X$, 有

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon.$$

7. 设$T_n \to T$, 这里$T_n \in B(X,Y)$, 证明对于每个$\varepsilon>0$和每个闭球$K \subset X$, 存在一个N, 使得对于所有$n>N$, 和所有$x \in K$, 有, $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$.

8. 设X是一可分的Banach空间, $M \subset X^*$是一有界集. 证明M的每个序列包含一个弱* 收敛于X^*的一元素的子序列.

§4.9 序列可和性的应用

弱*收敛在发散序列（与级数）的理论中, 有着重要的应用. 发散序列在通常意义下没有极限. 我们将借助于序列求和的方法给予某些发散序列在广义下的一个"极限".

例如, 给定一发散序列$x=(\xi_k)$, 我们可得出一算术平均值序列$y=(\eta_n)$,

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2), \quad \cdots, \quad \eta_n =$$

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n)$$

这是一个求和方法的例子．如果y收敛并有极限η（通常意义下），我们就称x按上述方法是可和的，并有广义极限η．

一个求和方法若能表示成

$$y=Ax.$$

这里$x=(\xi_k)$、$y=(\eta_n)$是无穷列向量，$A=(\alpha_{nk})$是一无穷矩阵．$(n,k=1,2,\cdots)$，则称该求和方法为矩阵法．在公式$y=Ax$中，利用矩阵乘法可得，

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k \qquad n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

由(1)给出的求和方法简称为A-方法．因为对应的矩阵是A．如果(1)中的级数都收敛，并且$y=(\eta_n)$在通常意义下收敛．其极限称做x的A-极限．x称为A-可和的．所有A-可和序列组成的集合称做A-方法域．

如果A-方法域包含所有收敛序列，而且每个这样序列的A-极限等于通常极限．即

$$\xi_k\to\xi \quad \text{蕴涵} \quad \eta_n\to\xi.$$

则称这个A-方法是正则的（或永久的）

4.9-1 Toeplitz极限定理（正则可和方法）．具有矩阵$A=(\alpha_{nk})$的A-可和方法是正则的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0 \qquad \text{对于}k=1,2,\cdots. \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}=1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqslant r \qquad \text{对于}n=1,2,\cdots. \tag{4}$$

这里r是不依赖于n的常数.

证明　我们分两步来证.

(a)　(2)至(4)是正则性的必要条件;

(b)　(2)至(4)是正则性的充分条件.

详细证明如下:

(a)假定A-方法是正则的. 设x_k是第k项为1而其余各项均为0的序列. 对于x_k, (1)中的$\eta_n = \alpha_{nk}$. 因为x_k收敛于0. 这就证明了(2)必成立.

另外, $x=(1,1,1,\cdots)$有极限1, 由(1)看出这时η_n等于(3)中的级数. 因此, (3)必成立.

我们来证(4)是正则性的必要条件. 设C是由所有收敛序列构成的Banach空间. 其范数定义为,

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|$$

(参看1.5-3)

在C上定义线性泛函f_{nm}为,

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk}\xi_k \qquad m, n = 1, 2\cdots \tag{5}$$

由于,

$$|f_{nm}(x)| \leqslant \sup_j |\xi_j| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}| = \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}|\right)\|x\|$$

因此, 每个f_{nm}均是有界的.

正则性蕴涵着对于所有$x \in C$ (1)中的级数收敛. 因而(1)在C上定义线性泛函$f_1, f_2, \cdots$为

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{6}$$

从(5)看到，对于所有$x\in C$，当$m\to\infty$时，$f_{nm}(x)\to f_n(x)$. 这是弱*收敛. 由引理4.8-5($T=f_n$)知，f_n是有界的. 而且对于所有$x\in C$，$(f_n(x))$收敛. 根据推论4.8-7，$(\|f_n\|)$是有界的. 即有

$$\|f_n\|\leqslant r \qquad \text{对于所有}n. \tag{7}$$

对于任意固定的$m\in N$，定义

$$\xi_k^{(n,m)}=\begin{cases}|\alpha_{nk}|/\alpha_{nk} & \text{若}k\leqslant m\text{且}\alpha_{nk}\neq 0\\ 0 & \text{若}k>m\text{或}\alpha_{nk}=0\end{cases}$$

则有$x_{nm}=(\xi_k^{(n,m)})\in C$. 而且，若$x_{nm}\neq\theta$，有$\|x_{nm}\|=1$. 若$x_{nm}=\theta$，则$\|x_{nm}\|=0$. 另外，

$$f_{nm}(x_{nm})=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{nk}\xi_k^{(n,m)}=\sum_{k=1}^{m}|\alpha_{nk}| \quad ,(\text{对于所有}m)$$

因此，

$$(A)\quad \sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{nk}\right|=f_{nm}(x_{nm})\leqslant\|f_{nm}\|$$

$$(B)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_{nk}\right|\leqslant\left\|f_n\right\| \tag{8}$$

这就证明了(4)中的级数收敛，并且从(7)证得(4).

(b) 我们证明(2)至(4)是正则性的充分条件. 在C上定义一线性泛函f为，

$$f(x)=\xi=\lim_{k\to\infty}\xi_k$$

这里$x=(\xi_k)\in C$. 由

$$\left|f(x)\right|=|\xi|\leqslant\sup_j|\xi_j|=\|x\|$$

知f是有界的.

设$M\subset C$是"从某项开始都相等"的序列的全体组成的集合，即$x\in M$，$x=(\xi_k)$，有

$$\xi_j=\xi_{j+1}=\xi_{j+2}=\cdots=\xi$$

j依赖于x. 则$f(x)=\xi$. 在(1)和(6)中得，

$$\eta_n=f_n(x)=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}\xi_k+\xi\sum_{k=j}^{\infty}\alpha_{nk}$$

$$=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}(\xi_k-\xi)+\xi\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}$$

因此由(2)和(3)，对于每个$x\in M$,

$$\eta_n=f_n(x)\longrightarrow 0+\xi\cdot 1=\xi=f(x). \qquad (9)$$

下面证M在C中稠密. 设$x=(\xi_k)\in C$，且$\xi_k\to\xi$. 则对于每个$\varepsilon>0$，存在一个N，使得，

$$|\xi_k-\xi|<\varepsilon \qquad \text{对于}k\geqslant N.$$

于是. $\tilde{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_{N-1},\xi,\xi,\xi\cdots)\in M$.

$$x-\tilde{x}=(0,\cdots,0,\xi_N-\xi,\xi_{N+1}-\xi,\cdots)$$

且，$\|x-\tilde{x}\|\leqslant\varepsilon$、因为$x\in C$是任意的，所以证得$M$在$C$中稠密.

由(4)对于每个$x\in C$及所有的n，有

$$\left|f_n(x)\right|\leqslant\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqslant r\|x\|$$

因此，$\|f_n\|\leqslant r$. 即$\left(\|f_n\|\right)$是有界的. 另外，(9)表明对于稠密集M中的所有x，$f_n(x)\longrightarrow f(x)$. 根据推论4.9-7这蕴涵$fn$弱*收敛于$f$. 这就证明了若$\xi=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$存在，则得$\eta_n\to\xi$. 由定义，这就是正则性. 从而，定理得证.

习 题 4.9

1. Cesaro求和方法c_1定义成

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n). \qquad n=1,2\cdots,$$

即取算术平均值．求出相应的矩阵A．

2. 利用习题1中的方法C_1对下述序列，

$$(1,0,1,0,1,0,\cdots)\text{和}\left(1,0,-\frac{1}{4},\ -\frac{2}{8}-\frac{3}{16}-\frac{4}{32}\cdots\right)$$

求其η_n的极限．

3. 在习题1中，以(η_n)的项表示(ξ_n)，求出(ξ_n)使得$(\eta_n)=(1/n)$．

4. 利用习题8的公式，求出一个不是C_1可和的序列（即η_n没有极限η）

5. Hölder求和方法H_p定义如下：H_1与习题1中的C_1方法相同．方法H_2是连续应用H_1两次，即第一次取算术平均，然后再对平均值取算术平均值．H_3是连续应用H_1三次．H_p是连续应用p次H_1．试求出将H_1和H_2用于序列
$(1,-3,5,-7,9,-11,\cdots)$之后所得的序列．

6. （级数）无穷级数叫做$A-$可和的，是指它的部分和序列是$A-$可和的．该序列的$A-$极限称为级数的$A-$和．证明级数$1+Z+Z^2+\cdots$对于$|Z|=1$，$Z\neq1$是C_1-可和的，C_1-和是$1/1-Z$．

7. （Cesaro C_k-方法）给定(ξ_n)，令$\sigma_n^{(0)}=\xi_n$且，$\sigma_n^{(k)}=\sigma_0^{(k-1)}+\sigma_1^{(k-1)}+\cdots+\sigma_n^{(k-1)}$ （$K\geqslant1$, $n=0,1,2\cdots$）若对于固定的$K\in N$．我们有$\eta_n^{(k)}=\sigma_n^{(k)}/C_{n+k}^{k}\to\eta$，则称$(\xi_k)$是$C_k-$可和的，并有$C_k-$极限$\eta$．证明$\sigma_n^{(k)}$可用$\xi_j$表示成简单的形式：

$$\sigma_n^{(k)}=\sum_{v=0}^{n}C_{n+k-1-v}^{k-1}\xi_v$$

8．级数的Euler变换为：

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j \quad \text{变换成级数} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

这里，

$$\Delta^0 a_j = a_j, \quad \Delta^n a_j = \Delta^{n-1} a_j - \Delta^{n-1} a_{j+1}, \quad j=1, 2\cdots$$

写$(-1)^j$是为方便（a_j不必是正的）．可以证明这个方法是正则的．因此给定级数的收敛性蕴涵变换后级数的收敛性，其和相同，证明由这个方法得出

$$ln2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots,$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$$

9．证明用习题8中的Euler方法可产生下列级数．

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right)$$

10．证明Euler方法可得下列结果．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

§4.10　数值积分和弱*收敛

弱*收敛在数值积分、微分和插值等方面均有重要应用．本节我们考虑数值积分，即求

$$\int_a^b x(t)dt$$

的近似值问题．解决这个问题有多种方法，例如，梯形法、

Simpson法、Newton-Cotes和Gauss公式.

各种方法的共同点是首先在$[a,b]$内选结点，然后用结点的x值的线性组合来表示积分的近似值，而结点和线性组合的系数的选取只依赖于方法本身.

本节我们将给出这些方法的一般结构，然后借助于泛函分析来考虑当结点数目无限增加时的收敛问题.

我们考虑连续函数，这使我们想起$I=[a,b]$上所有实值连续函数所构成的Banach空间$C[a,b]$，其范数定义为

$$\|x\|=\max_{t\in I}\left|x(t)\right|$$

在$C[a,b]$上定义一线性泛函f为，

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt. \tag{1}$$

为了得到一个数值积分公式，我们按上述提到的方法进行. 对每个正整数n，我们选取$n+1$个实数使得.

$$a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant b \quad （称为结点） \tag{2}$$

然后再选取$n+1$个实数.

$$\alpha_0^{(n)},\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_n^{(n)} \quad （称做系数）$$

并在$C[a,b]$上定义线性泛函f_n为.

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}x\left(t_k^{(n)}\right) \qquad n=1,2\cdots \tag{3}$$

$f_n(x)$是$f(x)$的近似值. 这里x是已知的. 为了找出积分的数值法的精确度，首先我们考虑f_n的有界性.

由$C[a,b]$上范数的定义，$\left|x(t_k^{(n)})\right|\leqslant\|x\|$.

因此，

$$\left|f_n(x)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\alpha_k^{(n)}\right|\left|x(t_k^{(n)})\right|$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|\right)\|x\|$$

于是，

$$\|f_n\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\alpha_k^{(n)}\right|$$

我们来证f_n的范数为

$$\|f_n\|=\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_k^{(n)}\right|$$

事实上，若我们取$x_0\in C[a,b]$，$|x_0(t)|\leqslant 1$，且

$$x_0(t_k^{(n)})=\operatorname{sgn}\alpha_k^{(n)}=\begin{cases}1 & \text{当}\alpha_k^{(n)}\geqslant 0\\ -1 & \text{当}\alpha_k^{(n)}<0\end{cases}$$

显然，　$\|x_0\|=1$.

$$f_n(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\operatorname{sgn}\alpha_k^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|$$

从而(5) 式得证.

4.10-1　**定义（收敛性）**. 如果对于一个$x\in C[a,b]$，有，

$$f_n(x)\to f(x)\qquad(n\to\infty)\tag{6}$$

这里f是由(1) 定义的.

则称数值积分法(3) 关于x是收敛的.

另外，由于多项式的积分容易精确求得，自然提出下列要求.

4.10-2　**要求**. 对于每个n，如果x是次数不超过n的多项式，则存在一个由(3) 式定义的泛函f_n，使得

$$f_n(x)=f(x).\tag{7}$$

证明　为了证明(7)，首先定义$n+1$个幂函数，

$$x_0(t)=1,\ x_1(t)=t,\ \cdots,\ x_n(t)=t^n.$$

对于n次多项式$x(t)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j t^j$，由于$f_n$是线性的，若（7）成立，则有，

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j f_n(x_j)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j f(x_j)=f(x)$$

于是，

$$f_n(x_j)=f(x_j) \qquad j=0,1,2,\cdots n. \tag{8}$$

确定f_n需用$2n+2$个参数，即$n+1$个结点和$n+1$个系数．当我们选定$n+1$个结点$t_k^{(n)}$之后，让我们来证明这些系数是唯一确定的．

在(8)式中，现在有，$x_j(t_k^{(n)})=(t_k^{(n)})^j$，因此，(8)式变成

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}(t_k^{(n)})^j=\int_a^b t^j dt=\frac{1}{j+1}(b^{j+1}-a^{j+1}) \tag{9}$$

这里$j=0,1,2,\cdots,n$．对于每个固定的n．这是$n+1$个未知量$\alpha_0^{(n)},\cdots\alpha_n^{(n)}$的$n+1$个方程的非齐次线性方程组．其系数行列式$D$是一个$n+1$阶的Vandermonde行列式．由于$t_i^{(n)}\neq t_j^{(n)}$ $(i\neq j)$，所以$D\neq 0$．故线性方程组(9)有唯一解．

4.10-3 **Polya收敛定理（数值积分）**．满足4.10-2的数值积分法(3)，对于所有$x\in C[a,b]$是收敛的当且仅当存在一个数C，使得对于所有的n有

$$\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|\leqslant C. \tag{10}$$

证明　由Weierstrass逼近定理（证明在下面）知，所有实系数多项式集W在实空间$C[a,b]$中是稠密的．对于每个$x\in W$，由于f_n满足(7)，所以，$f_n(x)\to f(x)$．另外，由(5)（$\|f_n\|$）为有界的充分必要条件是对某个实数C(10)成

立. 因为对于所有$x\in C[a,b]$, $f_n(x)\to f(x)$ 意即$f_n \xrightarrow{w} f$. 从而根据推论4.8-7该定理得证.

在大多数数值积分法中，系数值都取非负数. 对于满足4.10-2中要求的f_n，取$x=1$，有

$$f_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|$$

$$=f(1)=\int_a^b dt=b-a.$$

因此，(10)式成立. 这就证明了下面定理.

4.10-4 Steklov**定理（数值积分）**. 满足4.10-2并有非负数$\alpha_k^{(n)}$的数值积分法(3)，对于每个连续函数均是收敛的.

4.10-5 Weierstrass**逼近定理（多项式）**. 实系数多项式全体所构成之集W在实空间$C[a,b]$中是稠密的.

证明　由于$J=[a,b]$是紧的，则每个$x\in C[a,b]$在$J=[a,b]$上是一致连续的. 因此，对于任意$\varepsilon>0$，存在一个逐段线性的连续函数y，使得，

$$\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

我们先假定$x(a)=x(b)$，$y(a)=y(b)$. 因为y是逐段线性的连续函数，于是利用分部积分可以证明它的Fourier系数是有界的，即存在一正数M，使得，$|a_0|<M$，$|a_m|<M/m^2$，$|b_m|<M/m^2$，记$M=2\pi/b-a$，从而关于y的Fourier级数有，

$$|a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos kmt+b_m\sin kmt)|$$

$$\leqslant 2M\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)=2M\left(1+\frac{1}{6}\pi^2\right). \tag{13}$$

这即证明了级数在J上一致收敛．由于y是连续的，于是级数的和为y．因此，对于充分大的n，级数前n项部分和$S_n(t)$有，

$$\max_{t\in I}|y(t)-S_n(t)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

S_n中的正弦函数和余弦函数的泰勒级数也在J上一致收敛，所以，存在一多项式P（例如，由这些Taylor级数适当的部分和得到的）使得，

$$\max_{t\in I}|S_n(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由此不等式和(12)、(14)式以及

$$|x(t)-P(t)|\leqslant|x(t)-y(t)|+|y(t)-S_n(t)|+|S_n(t)-P(t)|$$

有，

$$\max_{t\in I}|x(t)-P(t)|<\varepsilon. \tag{15}$$

注意，这里取的$x\in C[a,b]$满足$x(a)=x(b)$．若$x(a)\neq x(b)$．令$u(t)=x(t)-r(t-a)$，常数r使得$u(a)=u(b)$．则对于u，存在一多项式q使在J上有，$|u(t)-q(t)|<\varepsilon$．取$p(t)=q(t)+r(t-a)$．于是，$x-p=u-q$，(15)式成立．由于$\varepsilon>0$是任意的．从而证明了W在$C[a,b]$中是稠密的．

这个定理有许多其他的证明．例如可用Bernstein多项

式逼近$x(t)\in C[a,b]$，（参看定光桂著的“Banach空间引论”）

习 题 4.10

1. 矩形法则是（见图28）

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx h\cdot[x(t_1^*)+\cdots+x(t_n^*)]$$

这里，$h=\frac{b-a}{n}$，$t_k^*=a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h$，这个公式是怎样得到的？结点和系数是什么？

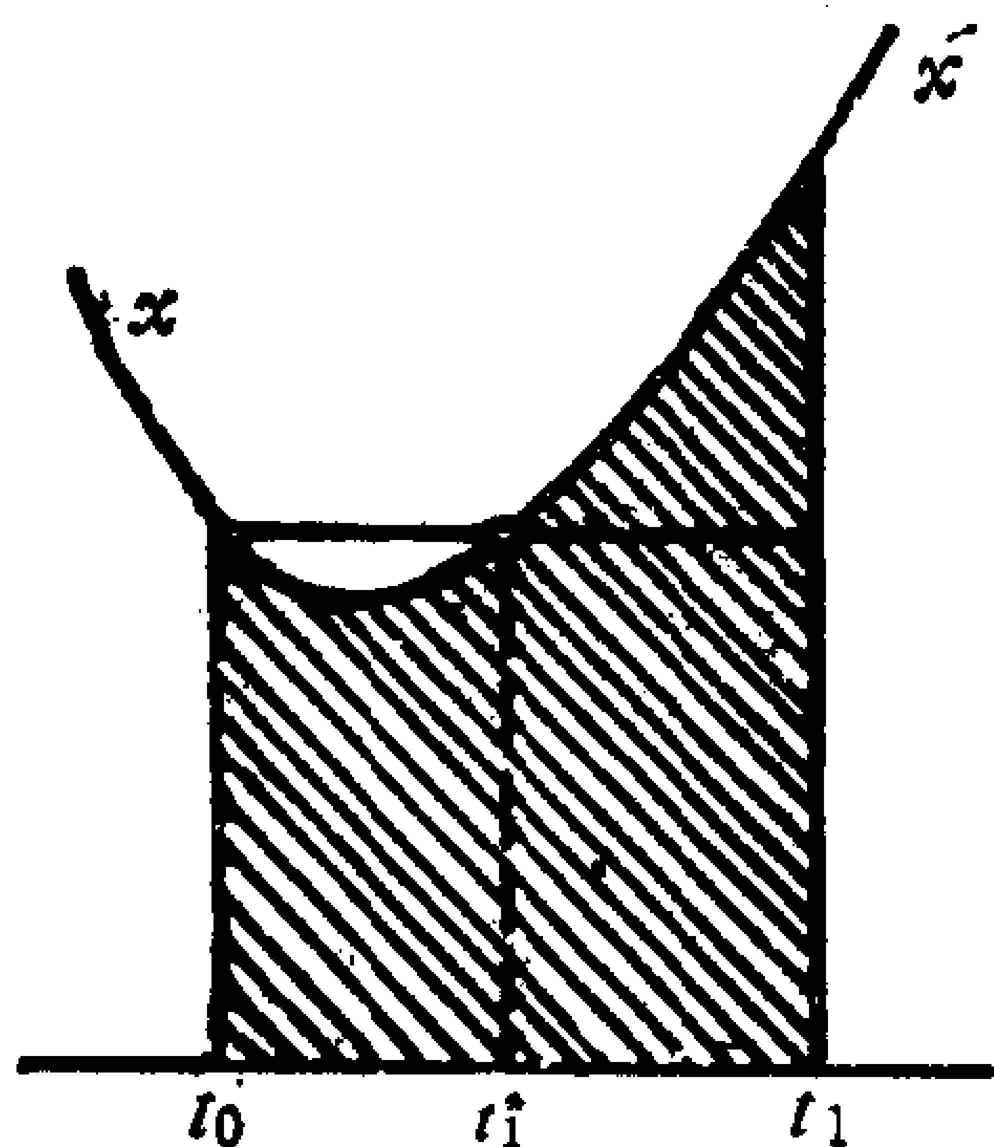


图28 矩形法则

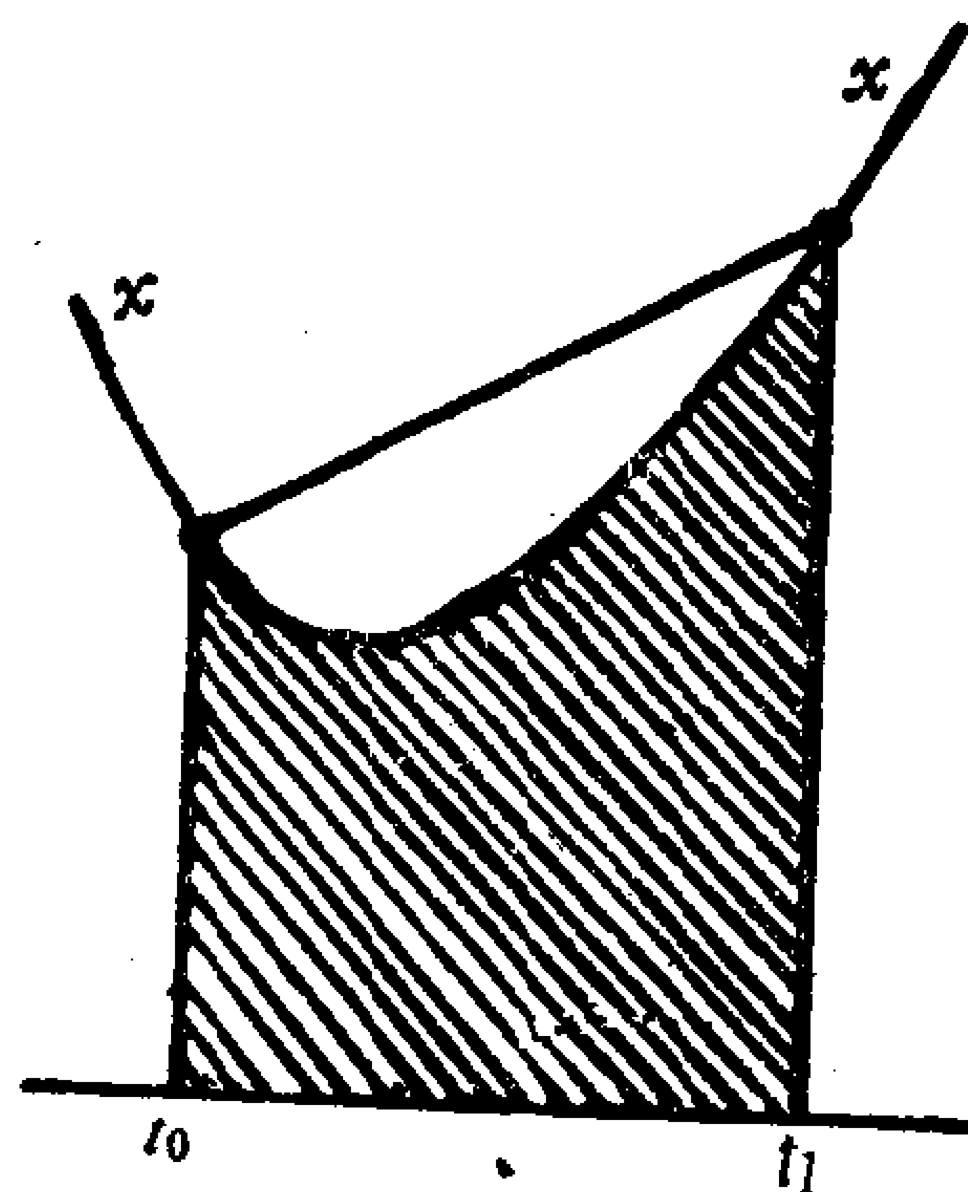


图29 梯形法则

2. 梯形法则是（见图29）

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t)\,dt \approx \frac{h}{2}(x_j+x_{j-1}) \qquad h=\frac{b-a}{n}.$$

$x_j=x(t_j)$

或 $$\int_a^b x(t)\,dt \approx h\left(\frac{1}{2}x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n\right)$$

这里$x_k = x(t_k)$，$t_k = a + kh$. 若我们用逐段线性函数近似x，试解释这个公式是怎样得到的．.

3．Simpson法则是（见图30）．

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}(x_0 + 4x_1 + x_2) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

或 $$\int_a^b x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}(x_0 + 4x_1 + 2x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n)$$

这里n是偶数，$x_k = x(t_k)$，$t_k = a + kh$. 试证明：上面公式为：对$[t_0, t_2]$上$x(t)$，由过t_0, t_1, t_2三点的x值的二次多项式来近似. 类似在$[t_2, t_4]$等区间上也这样作，就得到上述这个公式

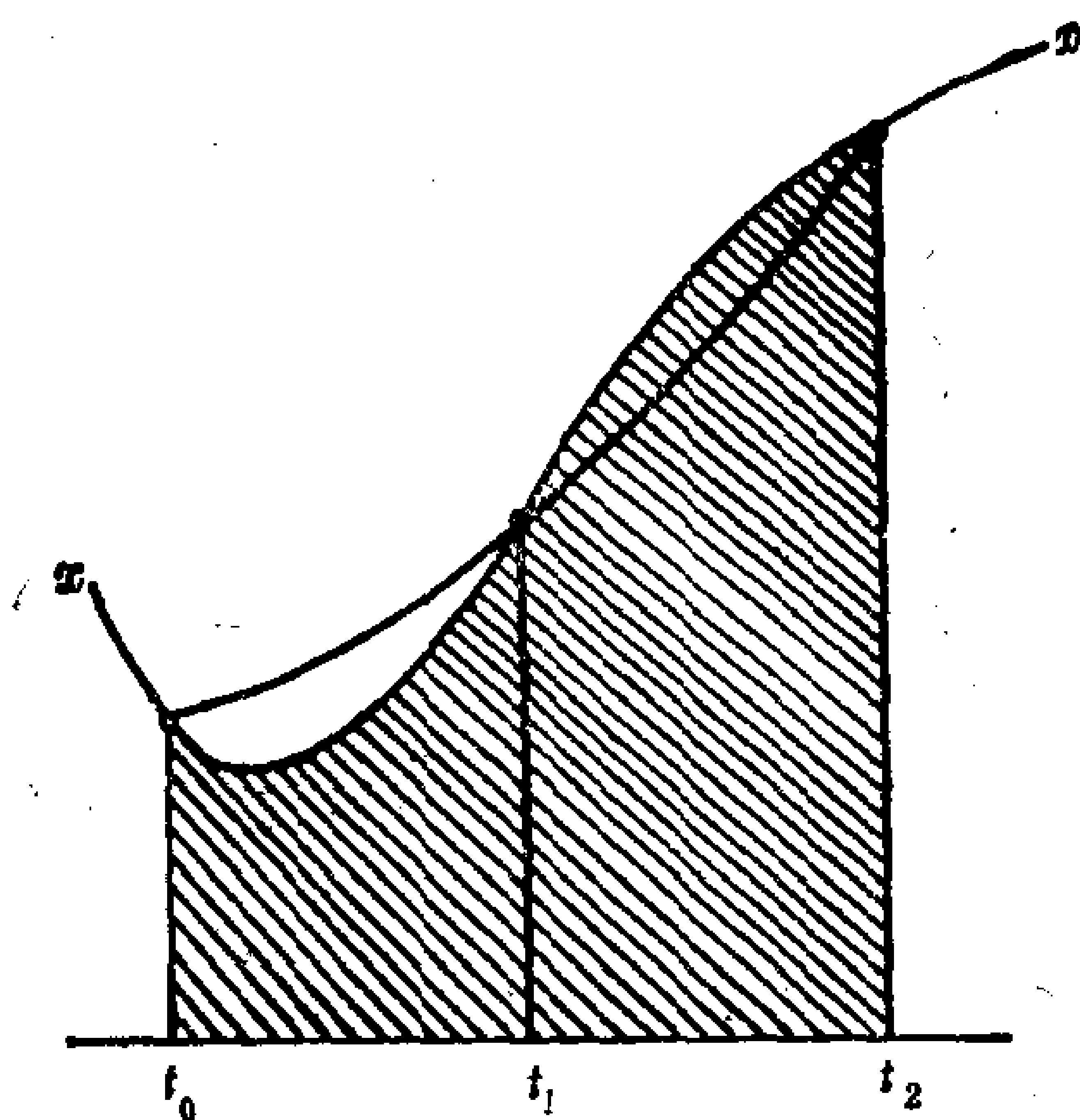


图30 Sinpson法则

4．设$f(x) = f_n(x) - e_n(x)$. 这里f_n是按梯形法则得到的近似值. 证明对于任意2次连续可微函数x有如下误差界.

$k_n m_2^* \leqslant \varepsilon_n(x) \leqslant k_n m_2$，这里$k_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$， m_2和m_2^*是x''在

$[a, b]$上的最大值和最小值．

5．Simpson法则在实际中应用很广泛．为了比较精 确度．对于积分

$$I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

以$n=10$分别用梯形法则和 Simpson 法 则 计 算，并 将 所 得 数 值 0.746211和0.746825与精确值0.746824比较一下．下面附表 给出e^{-t^2}的各近似值．

6．利用习题 4 证明习题 5 中0.746211的误差界是 -0.001667 和 0.000614，因此，

$$0.745597 \leqslant I \leqslant 0.747878.$$

7．3－8 法则是，

$$\int_{t_0}^{t_3} x(t)\,dt = \frac{3h}{8}(x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3)$$

这里$(x_k = x(t_k)$，$t_k = a + kh$，若在$[t_0, t_3]$上用一个三次多项式近似x，使得在结点t_0、t_1、t_2、t_3处的多项式的值等于x在这些点的值．证 明 上述式子就是所得公式．

8．考虑积分公式

$$\int_{-h}^{h} x(t)\,dt = 2hx(0) + r(x).$$

这里r是误差．假 定$x \in c^1[-h, h]$即x在$J = [-h, h]$上连续可微，证明这时误差估计为

t	e^{-t^2}
0	1.000000
0.1	0.990050
0.2	0.960789
0.3	0.931931
0.4	0.852144
0.5	0.778801
0.6	0.697676
0.7	0.612626
0.8	0.527292
0.9	0.444858
1.0	0.367879

$$|r(x)| \leqslant h^2 p(x)$$

其中，

$$p(x) = \max_{t \in J} |x'(t)|$$

证明p是这些函数的向量空间上的拟范数（参看§2.3的习题10）

9．如果x是实解析函数．证明下式成立．

$$\int_{-h}^{h} x(t)\,dt = 2h\left[x(0) + x''(0)\frac{h^2}{3!} + x^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!} + \cdots\right] \tag{16}$$

若对积分取一形如：$2h(\alpha_{-1}x(-h) + \alpha_0 x(0) + \alpha_1 x(h))$的近似式，在确定系数$\alpha_{-1}$，$\alpha_0$，$\alpha_1$时，使尽可能多的幂$h$、$h^2\cdots$与(16)中一致，证明这样就得到了Simpson法则

$$\int_{-h}^{h} x(t)\,dt \approx \frac{h}{3}[x(-h) + 4x(0) + x(h)]$$

说明：为什么上述结果对于三次多项式是精确表达式．

10．在Weierstrass逼近定理的证明中，我们用到了逐段线性的连续函数的Fourier系数的界，这些界是如何得到的呢？

§4.11 开映象定理

我们已介绍了Hahn-Banach定理和一致有界性定理．现在将考虑第三个定理．即开映象定理．这将涉及开映射的概念．

4.11-1 **定义(开映射)**．设X和Y是度量空间，T是从X内到Y中的映射，如果对于$D(T)\subset X$中的每个开集其象是Y中的一个开集．则称

$T: D(T) \to Y$为开映射．

注意．若映射不是满射，下面两个开映射是有区别的．

(a)从定义域到Y中的开映射；

(b)从定义域到它的值域上的开映射.

(b)比(a)弱. 例如，若$X\subset Y$. X到Y中的映射$x\mapsto x$是开映射当且仅当X是Y的一个开子集.

然而，若$x\mapsto x$是从X到其值域（即X）上的映射，则在任何情况下它都是开映射.

另外，为避免与连续映射混淆．让我们回忆定理1.3-6. $T:X\mapsto Y$为连续映射的充要条件是对于Y中的每个开子集其原象是X中一个开集，这不蕴涵T将X中的开集映到Y中的开集上．例如，按$t\mapsto \sin t$给出的映射$R\to R$是连续的．但将$(0,2\pi)$映到$[-1,1]$上.

为证明开映象定理，我们首先证下列引理

4.11-2 **引理(开单位球)**从Banach空间X到Banach空间Y上的有界线性算子T具有如下性质：开单位球$B_0=B(\theta;1)$关于T的象$T(B_0)$包含一个中心在$\theta\in Y$的开球.

证明．分以下三步来证.

(a) 开球$B_1=B\left(\theta;\frac{1}{2}\right)$的象的闭包包含一开球$B^*$.

(b) $\overline{T(B_n)}$包含一个中心在$\theta\in Y$的开球，这里，$B_n=B(\theta;2^{-n})\subset X$.

(c)$T(B_0)$包含一个中心在$\theta\in Y$的开球.

详细证明如下：

(a) 对子集$A\subset X$，我们以αA（α是数量）和$A+w$（$w\in X$）．分别表示下列两个集合.

$$\alpha A=\{x\in X\mid x=\alpha a,\ a\in A\} \tag{1}$$

$$A+w=\{x\in X\,|x=a+w,\ a\in A\}. \tag{2}$$

考虑开球$B_1=B(\theta;\ \frac{1}{2})\subset X$. 对于任意固定的$x\in X$，有充分大的正整数$k(k>2\|x\|)$使得$x\in kB_1$，因此.

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}kB_1$$

由于T是满射的、线性的. 于是有.

$$Y=T(X)=T(\bigcup_{k=1}^{\infty}kB_1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}kT(B_1)$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{kT(B_1)} \tag{3}$$

根据定理4.6-2，存在一个$\overline{kT(B_1)}$必包含某个开球，这蕴涵$\overline{T(B_1)}$也包含一个开球，即，$B^*=B(y_0;\varepsilon)\subset\overline{T(B_1)}$. 从而得到

$$B^*-y_0=B(\theta;\varepsilon)\subset\overline{T(B_1)}-y_0 \tag{4}$$

(b)证明$B^*-y_0\subset\overline{T(B_0)}$. 这里$B_0$是定理给定的. 由(4)只须证明

$$\overline{T(B_1)}-y_0\subset\overline{T(B_0)} \tag{5}$$

设$y\in\overline{T(B_1)}-y_0$，则，$y+y_0\in\overline{T(B_1)}$. 还已知$y_0\in\overline{T(B_1)}$. 由定理1.4-7($a$). 存在

$u_n=Tw_n\in T(B_1)$，使得$u_n\to y+y_0$

$v_n=Tz_n\in T(B_1)$使得$v_n\to y_0$

因为$w_n,z_n\in B_1$. 且B_1的半径为$\frac{1}{2}$，得，

$$\|w_n - z_n\| \leqslant \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

所以，$w_n - z_n \in B_0$. 从

$$T(w_n - z_n) = T\omega_n - Tz_n = u_n - v_n \to y.$$

应有，$y \in \overline{T(B_0)}$. 由于$y \in \overline{T(B_1)} - y_0$是任意的. 因此，(5)式得证. 由(4)从而有.

$$B^* - y_0 = B(\theta; \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)} \tag{6}$$

令$B_n = B(\theta; 2^{-n}) \subset X$. 因为$T$是线性的.

$\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_0)}$. 由(6)得到， (7)

$$V^n = B(\theta; \varepsilon/2^n) \subset \overline{T(B_n)}.$$

(C) 最后我们来证

$$V_1 = B\left(\theta; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset T(B_0)$$

从(7)有，$V_1 \subset \overline{T(B_1)}$. 对于任意$y \in V_1$，则，$y \in \overline{T(B_1)}$.

由定理1.4-7(a)必有$v \in T(B_1)$，使$\| y - v\| < \frac{\varepsilon}{4}$. 因为$v \in T(B_1)$蕴涵某个$x_1 \in B_1$，$v = Tx_1$，所以.

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

与(7)可得到，$y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$. 同样存在一个$x_2 \in B_2$，使得，

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

因此，$y-Tx_1-Tx_2\in V_3\subset\overline{T(B_3)}$，依此下去，第$n$步可有一个$x_n\in B_n$，使得.

$$\|y-\sum_{k=1}^{n}Tx_k\|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\qquad (n=1,2\cdots)\qquad (8)$$

令$z_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，因为$x_k\in B_k$，有
$\|x_k\|<1/2^k$，对于$n>m$,

$$\|z_k-z_m\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\to 0(m\to\infty)$$

故(z_n)是X中的Cauchy序列．由于X是完备的，所以，(z_n)收敛，即$z_n\to x\in X$．B_0的半径是1，从下式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1\qquad (9)$$

知$x\in B_0$。因为T是连续的，则$Tz_n\to Tx$. 由（8）得$Tx=y$。从而证得$y\in T(B_0)$.

4.11-3 开映象定理、有界逆算子定理． 从Banach空间X到Banach空间Y上的有界线性算子T是一个开映射．因此，若T是双射的，则T^{-1}是有界的．

证明．我们证明每个开集$A\subset X$的象$T(A)$是Y中的开集．即证明对于每个$y=Tx\in T(A)$，集$T(A)$包含一个以$y=Tx$为中心的开球．

令$y=Tx\in T(A)$．由A是开集，它包含了一个以x为中心的开球，于是$A-x$包含一个以θ为中心的开球，设这个球的半径为r. $k=\frac{1}{r}$，则$r=1/k$. 且$k(A-x)$包含单位球$B(\theta;\ 1)$

引理4.11-2蕴涵$T\{k(A-x)\}=k[T(A)-Tx]$包含一个中心在θ的开球，于是$T(A)-Tx$也包含这样一个开球。因此$T(A)$包含一个以$Tx=y$为中心的开球。因为$y\in T(A)$是任意的。所以，$T(A)$是开集.

最后，如果T^{-1}：$Y\to X$存在．因为T是开映射，由定理1.3-6知T^{-1}是连续的．根据定理2.6-10，T^{-1}是线性的．由定理2.7-10，T^{-1}是有界的.

习 题 4.11

1．证明由$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto\xi_1$定义的$T:R^2\to R$是开映射．由$(\xi_1,\ \xi_2)\mapsto(\xi_1,\ 0)$定义的映射$R^2\to R^2$是开映射吗？

2．证明一个开映射不一定将闭集映射到闭集上.

3．作为(1)和(2)的扩充，我们定义

$$A+B=\{x\in X\mid x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$$

这里，A，$B\subset X$．若$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，求aA，$A+w$，$A+A$．（参看图31）

4．证明(9)中的不等式是严格的.

5．设X是赋范空间，它的点是“只有有限个非零项”的复数列$x=(\xi_j)$，其范数定义为$\|x\|=\sup_j|\xi_j|$，设T是由$y=Tx=\left(\xi_1,\ \frac{1}{2}\xi_2,\ \frac{1}{3}\xi_3\cdots\right)$定义的．证明$T$是线性有界算子．但$T^{-1}$是无界的，这与定理4.11-3矛盾吗？

6．设X和Y是巴拿赫空间，T：$X\to Y$是单射有界线性算子．证明T^{-1}：$R(T)\to X$是有界的当且仅当$R(T)$在Y中是闭的.

7．设$T:X\to Y$是有界线性算子．这里X和Y是巴拿赫空间．若T是双射的，证明存在正实数a，b．使得对于所有$x\in X$，有

$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|.$$

8. （等价范数）设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是向量空间X上的范数．使得$X_1=(X,\ \|\cdot\|_1)$和$X_2=(X,\ \|\cdot\|_2)$是完备的．如果$\|x_n\|_1\to 0$总蕴涵$\|x_n\|_2\to 0$，证明X_1中的收敛性蕴涵X_2中的收敛性，且反之亦然．并存在正数a和b，使得对于所有$x\in X$，

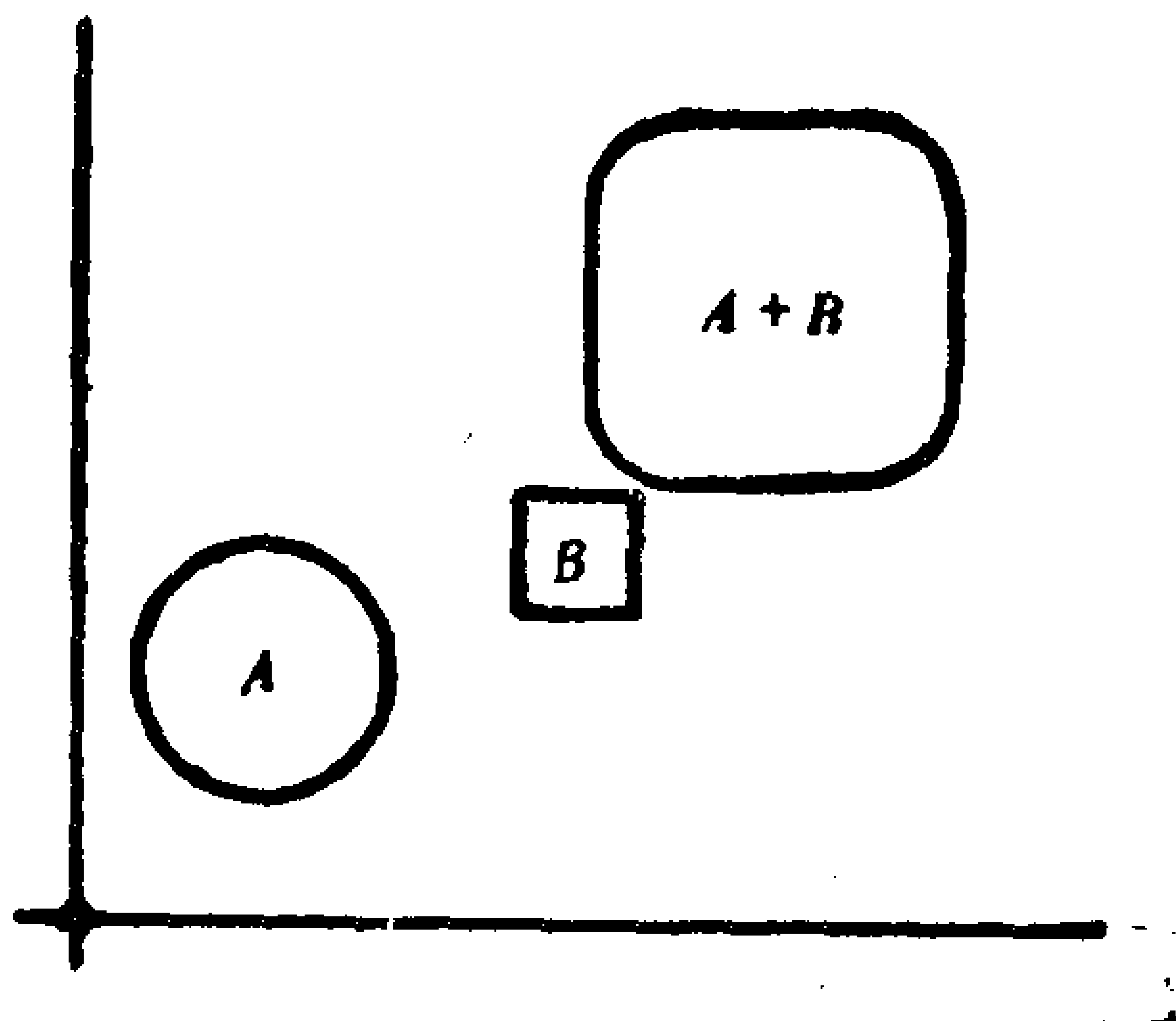


图31　平面上，集$A+B$

$$a\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant b\|x\|_1$$

（这两个范数是等价的，参看定义2.4-4）

9. 设$X_1=(X,\ \|\cdot\|_1)$和$X_2=(X,\ \|\cdot\|_2)$是巴拿赫空间，若存在一个常数c，使得对于所有$x\in X$，$\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$，证明存在一常数$k$，使得，对于所有$x\in X$，$\|x\|_2\leqslant k\|x\|_1$（因此，两个范数是等价的．）

10. 从§1.3知，度量空间X的所有开子集组成的集合T称为X的一个拓扑．因此，向量空间X上的每个范数定义X一个拓扑．若X上的两个范数使得$X_1=(X,\ \|\cdot\|_1)$和$X_2=(X,\ \|\cdot\|_2)$均是Banach空间．并且由$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$所定义的拓扑T_1和T_2满足$T_1\supset T_2$．证明$T_1=T_2$．

§4.12　闭线性算子、闭图象定理

实际中重要的线性算子并不都是有界的，例如，微分算子就是无界的(2.7-6)．在量子力学和其他应用中经常需要无界算子，并且在实际中常遇到的是一类所谓线性算子．

在本节我们定义赋范空间上闭线性算子，并研究它们的

一些性质．特别重要的是闭图象定理．它给出了Banach空间上闭线性算子是有界的充分条件．

让我们从定义开始．

4.12-1　**定义（闭线性算子）**．设X和Y是赋范空间，$T:D(T)\to Y$是一线性算子．其定义域$D(T)\subset X$．若T的图象

$$G(T)=\{(x,y)\mid x\in D(T),\ y=Tx\}$$

在赋范空间$X\times Y$中是闭的．则称T为一个闭线性算子．这里向量空间$X\times Y$中的两个代数运算定义为，

$$(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$\alpha(x,\ y)=(\alpha x,\ \alpha y)$$

（α是数量），$X\times Y$上的范数定义成

$$\|(x,\ y)\|=\|x\|+\|y\| \tag{1}$$

（关于此空间上另一个范数，请看习题2）

闭线性算子在什么条件下是有界的？下面重要的定理给予了回答．

4.12-2　**闭图象定理**．设X和Y是Banach空间，$T:D(T)\to Y$是一闭线性算子．这里，$D(T)\subset X$．如果$D(T)$在X中是闭的，则算子T是有界的．

证明　首先证明$X\times Y$依(1)所定义的范数是完备的．设$(z_n)=(x_n,\ y_n)$是$X\times Y$中的任一Cauchy序列．则对于每个$\varepsilon>0$，存在一个N，使得，

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|<\varepsilon \qquad (m,\ n>N) \tag{2}$$

因此，(x_n)和(y_n)分别是X和Y中的序列，因为X和Y是完备的，所以(x_n)、(y_n)收敛，$x_n\to x$，$y_n\to y$．这蕴涵$z_n\to$

$z=(x, y)$且在(2)中令$m\to\infty$，有，$\|z_n-z\|\leqslant\varepsilon \quad (n>N)$
由于(z_n)是$X\times Y$中的任意Cauchy序列．从而证得$X\times Y$是完备的．

根据假设$G(T)$在$X\times Y$中是闭的，$D(T)$在X中是闭的．因此，由定理1.4-8，$G(T)$和$D(T)$均是完备的．现在考虑映射

$$P: G(T)\to D(T)$$
$$(x, Tx)\mapsto x$$

显然P是线性的．由于

$$\|P(x, Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x, Tx)\|$$

所以P是有界的．容易验证P是双射的．从而逆映射，

$$P^{-1}: D(T)\to G(T)$$
$$x\mapsto(x, Tx)$$

存在．因为$D(T)$和$G(T)$均是完备的，利用有界逆算子定理4.11-3，P^{-1}是有界的．即对于某个数b和所有$x\in D(T)$，$\|(x, Tx)\|\leqslant b\|x\|$，因此，

$$\|Tx\|\leqslant\|Tx\|+\|x\|=\|(x, Tx)\|\leqslant b\|x\|．对于x\in G(T)．$$

故T是有界的．

4.12-3 定理（闭线性算子）．设X和Y是赋范空间，$T: D(T)\to Y$是一线性算子．这里，$D(T)\subset X$．则T是闭的当且仅当它有如下性质：若$x_n\to x$，这里$x_n\in D(T)$，$Tx_n\to y$．那么$x\in D(T)$，且$Tx=y$．

证明　根据定义，T为闭的充要条件是$G(T)$为闭的．而$G(T)$是闭的当且仅当$z=(x, y)\in\overline{G(T)}$蕴涵$z\in G(T)$．

由定理1.4-7(a)，$z\in\overline{G(T)}$当且仅当存在$z_n=(x_n, Tx_n)\in G(T)$，使得$z_n\to z$，因此有，

$$x_n\to x,\quad Tx_n\to y. \tag{3}$$

且$z=(x, y)\in G(T)$当且仅当$x\in D(T)$，$y=Tx$.

注意，这个性质与有界线性算子的性质是有区别的．若线性算子T是有界的，则T是连续的．如果(x_n)是$D(T)$中的收敛序列，那么，(Tx_n)也收敛．（参看定理1.4-9）．这对于闭线性算子不一定成立．但是，如果T是闭的，且两个序列(x_n)和$(\tilde{x}_n)$在$D(T)$中收敛于同一个极限，并相应的序列(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$均收敛，则后两个序列也有相同的极限。（参看习题6）

4.12-4 例题（微分算子）．设$X=C[0, 1]$；且

$$T:\ D(T)\to X$$
$$x\mapsto x' \qquad (x'\text{是}x\text{的导数})$$

这里$D(T)$是由具有连续导数的函数$x\in X$构成的子空间．则T不是有界的，但它是闭的．

证明　从2.7-6看到T不是有界的．下面利用定理4.12-3证明T是闭的．设$(x_n)\subset D(T)$．

且

$$x_n\to x \quad \text{和} \quad Tx_n\to y.$$

因为依$C[0, 1]$上的范数的收敛是$[0, 1]$上的一致收敛．由$x_n'=Tx_n\to y$，有，

$$\int_0^t y(\tau)d\tau=\int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^t x'_n(\tau)d\tau = x(t) - x(0).$$

即，$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)d\tau$.

这就证得$x \in D(T)$，且$x' = y$，由定理4.12-3知T是闭的。

值得注意的是在这个例子中，$D(T)$在X里不是闭的。否则，根据闭图象定理，T将是有界的.

线性算子的闭性不蕴涵有界性．反之，有界性也不蕴涵闭性．事实上，例题4.12-4可说明闭性不蕴涵有界性．下例则表明有界性不蕴涵闭性，设，$T: D(T) \to D(T) \subset X$ 是$D(T)$上的恒等算子，这里$D(T)$是赋范空间X的一个真稠密子空间，显然，T是线性有界的．但是T不是闭的．这是因为若取$x \in X - D(T)$，有$D(T)$中序列(x_n)收敛于x，由定理4.12-3知T不是闭的.

4.12-5 引理（闭算子）．设X和Y是赋范空间，T: $D(T) \to Y$是有界线性算子．这里$D(T) \subset X$．那么，

(a) 若$D(T)$是X的一个闭子集，则T是闭的；

(b) 若T是闭的且Y是完备的．则$D(T)$是X的闭子集.

证明 (a)、若(x_n)在$D(T)$中收敛，即$x_n \to x$．且(Tx_n)也收敛．由于$D(T)$是闭的．则$x \in \overline{D(T)} = D(T)$．因为$T$是连续的，所以$Tx_n \to Tx$．根据定理4.12-3，$T$是闭的.

(b) 对于$x \in \overline{D(T)}$，存在$D(T)$中一序列(x_n)使得$x_n \to x$．（参看1.4-7）．由于T是有界的，

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\|\,\|x_n - x_m\|$$

这证得(Tx_n)是柯西序列．因为Y是完备的，(Tx_n)收敛，

即$Tx_n \to y \in Y$．由T是闭的，根据定理4.12-3，$x \in D(T)$（且$Tx = y$）．由于$x \in \overline{D(T)}$是任意的．因此，$D(T)$是闭的．

习 题 4.12

1．证明(1)定义$X \times Y$上一个范数．

2．验证：

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

和

$$\|(x, y)\|_0 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

是赋范空间X和Y的乘积空间$X \times Y$上的两个范数．

3．证明线性算子$T: X \to Y$的图象$G(T)$是$X \times Y$的一个向量子空间．

4．若定义4.12-1中的X和Y是Banach空间，证明$V = X \times Y$按(1)所定义的范数是一个巴拿赫空间．

5．（逆算子）若闭线性算子的逆T^{-1}存在，证明T^{-1}是闭线性算子．

6．设T是闭线性算子．若$D(T)$中的两个序列(x_n)和$(\tilde{x}_n)$都收敛于同一个极限，且(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$均收敛．证明(Tx_n)和$(T\tilde{x}_n)$有相同的极限．

7．从闭图象定理可以证得定理4.11-3中的第二个论述．

8．设X和Y是赋范空间，$T: X \to Y$是闭线性算子．

(a) 证明紧子集$C \subset X$的象A在Y中是闭的，

(b) 证明紧子集$K \subset Y$的原象B在X中是闭的（参看定义2.5-1）

9．设X和Y是赋范空间，且Y是紧的．若$T: X \to Y$是闭线性算子．证明T是有界的．

10．设X和Y是赋范空间，且X是紧的．若$T: X \to Y$是双射闭

线性算子. 证明T^{-1}是有界的.

11. (零空间) 证明闭线性算子$T: X\to Y$的零空间$N(T)$是X的闭子空间.

12. 设X和Y是赋范空间. 若$T_1: X\to Y$是闭线性算子且$T_2\in B(X, Y)$. 证明T_1和T_2是闭线性算子.

13. 设T是一闭线性算子. 其定义域$D(T)$在巴拿赫空间X中, 值域$R(T)$在赋范空间Y中. 若T^{-1}存在且有界. 证明$R(T)$是闭的.

14. 假设级数$u_1+u_2+\cdots$的各项在区间$I=[0,1]$上是连续可微的函数, 且级数在I上一致收敛于x. 而且, 假定$u_1'+u_2'+\cdots$在I上也一致收敛. 证明x在$(0, 1)$上是连续可微的. 且可逐项微分, $x'=u_1'+u_2'+\cdots$

15. (闭延拓) 设$T: D(T)\to Y$是闭线性算子具有图象$G(T)$. 这里$D(T)\subset X$, 且X和Y均是Banach空间. 证明T有闭线性延拓算子$\tilde{T}$其图象为$\overline{G(T)}$当且仅当$\overline{G(T)}$不含形如(θ, y)的元素, 这里, $y\neq\theta$.

第五章　Banach不动点定理、逼近理论

本章包含泛函分析在两个方面的应用，其一是Banach不动点定理及其应用．其二是赋范空间和Hilbert空间中的逼近理论及其应用．

重要概念、主要内容的概述

在§5.1中介绍了压缩映射的概念、Banach不动点定理．定理给出了不动点（映射到自身的点）存在性和唯一性的充分条件．也给出了逼近不动点的迭代过程和误差界．在§5.2中介绍了Banach不动点定理在三个重要方面：线性代数方程、常微分方程、积分方程上的应用．

§5.3至§5.6介绍了逼近理论．在§5.3我们定义了最佳逼近并讨论了其存在性．若一赋范空间是严格凸的，其最佳逼近是唯一的，而Hiblert空间正是这样空间．对一般的赋范空间需附加条件才能保证最佳逼近的唯一性．如在$C[a, b]$中的$Haar$条件．由于范数选择的不同，我们可得到不同类型的逼近．并着重讨论了以下两种逼近：

(i) 在$C[a, b]$中的一致逼近（§5.4）

(ii) Hilbert空间中的逼近．（§5.5）

此外，我们还简单地讨论了三次样条函数逼近$[a, b]$上一给定函数的问题（参看§5.6）

本章内容在后面章节中并不需要，故根据情况可灵活选用．§5.1至§5.2的前提是第一章（不需要 2 至 4 章）如果选用，本章前两节可接在第一章后面讲．§5.3至 §5.6只须 2、3 章作为前提．因此，这部分可在第三章之后讲．

§5.1 Banach不动点定理

Banach不动点定理是用泛函分析的方法处理分析中不同领域的统一的存在性和唯一性的一个重要定理．

首先介绍不动点和压缩映射的概念．

5.1-1 定义（不动点）．设X为一集合．$T: X\to X$为一映射．如果$x_0\in X$，使得，$Tx_0=x_0$．则称x_0为映射T的一个不动点．

例如．平面的旋转有一个不动点（旋转中心）．R到自身的映射：$x\longmapsto x^2$有两个不动点（0与1）．由$(\xi_1, \xi_2)\longmapsto\xi_2, \xi_1)$定义的映射$T$：$R^2\longrightarrow R^2$有无穷多个不动点（$\xi_1=\xi_2$上的所有点）．平移变换作为一个映射是没有不动点的．

5.1-2 定义(压缩映射)．设(X, d)为一度量空间，$T:X\longrightarrow X$是一映射．若存在数α，
$0\leqslant\alpha<1$，使得对于所有$x, y\in X$，

$$d(Tx, Ty)\leqslant\alpha d(x, y) \tag{1}$$

成立．则称T是一个压缩映射．

压缩映射的几何意义是：X中任意二点x与y的象比该两点更接近．确切地说：比值$d(Tx, Ty)/d(x, y)$不超过小于1的常数α．

压缩映射是连续映射．事实上，对于任意$x_n\longrightarrow x$，有，

$$d(Tx_n,\ Tx)\leqslant \alpha d(x_n,\ x)$$

当$n\longrightarrow\infty$时，由$d(x_n,\ x)\longrightarrow 0$，得$d(Tx_n,\ Tx)\longrightarrow 0$.

5.1-3 Banach**不动点定理（压缩映射原理）**. 设$X=(X,d)$，$X\neq\phi$是一完备的度量空间. $T:X\longrightarrow X$为X上的一个压缩. 则T有一个且只有一个不动点.

证明的思路是：我们构造一序列(x_n)，并证明其为Cauchy序列，因而在完备的度量空间X中收敛，然后证明其极限x就是T的不动点. 且没有其他的不动点.

证明 (a)首先证明存在性. 我们任选一$x_0\in X$，并定义迭代序列(x_n)如下：

$$x_0,\ x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1=T^2x_0,\ \cdots x_n=T^nx_0\cdots \quad (2)$$

下面证明(x_n)为Cauchy序列. 由(1)与(2)，

$$\begin{aligned}d(x_{m+1},\ x_m)&=d(Tx_m,\ Tx_{m-1})\\&\leqslant \alpha d(x_m,\ x_{m-1})\\&=\alpha d(Tx_{m-1},\ Tx_{m-2})\\&\leqslant \alpha^2 d(x_{m-1},\ x_{m-2})\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&\leqslant \alpha^m d(x_1,\ x_0)\end{aligned}\quad (3)$$

因此，由三角不等式及几何级数的部分和，对于$n>m$，有，

$$\begin{aligned}d(x_m,\ x_n)&\leqslant d(x_m,\ x_{m+1})+d(x_{m+1},\ x_{m+2})+\cdots\\&\quad+d(x_{n-1},\ x_n)\\&\leqslant(\alpha^m+\alpha^{m+1}+\cdots+\alpha^{n-1})d(x_1,\ x_0)\\&=\alpha^m\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}d(x_1,\ x_0)\end{aligned}$$

由$0\leqslant\alpha<1$，$0<1-\alpha^{n-m}\leqslant 1$，因而，

$$d(x_m, x_n) \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \quad (n>m) \qquad (4)$$

在右边，$0 \leqslant \alpha < 1$，且$d(x_1, x_0)$不变. 所以只要m取得足够大（且$n>m$），则右边可任意小. 这就证明了(x_m)为Cauchy序列. 因为X是完备的. (x_m)收敛，令$x_m \longrightarrow x$. 证明此极限x即为映射T的不动点.

从三角不等式与(1)有，

$$d(x, Tx) \leqslant d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$$
$$\leqslant d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \longrightarrow 0$$

$(m \longrightarrow \infty)$. 即$d(x, Tx) = 0$. 由§1.1中$(M2)$得$Tx = x$. 这就证明了$x$是$T$的不动点.

(b)证明x是唯一的不动点. 设$\tilde{x}$是T的另一个不动点. 则$Tx = x$; $T\tilde{x} = \tilde{x}$. 由(1)得

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leqslant \alpha d(x, \tilde{x})$$

因为$0 \leqslant \alpha < 1$. 所以，$d(x, \tilde{x}) = 0$ 由$(M2)$知$\tilde{x} = x$.

5.1-4 推论（迭代、误差界）. 在定理5.1-3的条件下. 从任一$x_0 \in X$开始的迭代序列(2)均收敛于T的唯一不动点x. 其误差估计分别为.

$$d(x_m, x) \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad \text{（先验估计）} \qquad (5)$$

$$d(x_m, x) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m) \qquad \text{（后验估计）} \qquad (6)$$

证明. 迭代序列(x_m)收敛于不动点x这从定理5.1-3可直

接证得．在(4)中令$n\to\infty$，得不等式(5)．在(5)中取$m=1$，并将x_0、x_1分别记为y_0、y_1．得，

$$d(y_1, x)\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}d(y_0, y_1)$$

再令$y_0=x_{m-1}$，$y_1=x_m$，则(6)式得证．

先验误差界(5)在计算开始时使用，用来估计为达到给定的准确度所需的步数．(6)式在计算的中间阶段和最后使用．其准确度至少不低于(5)．

从应用观点上看，上述定理还不能令人满意．因为常常遇到如下的限制：压缩映射T不是定义在整个空间X上的，而只是定义在X的子空间Y上．然而，若Y是闭的，由定理1.4-8知其为完备的．因而在Y中存在一不动点x．并且只要我们在x_0的选择上加以适当的限制，使诸x_m保持在Y中，就能得到$x_m\to x$．这一类问题一个典型的结果是下面的定理．

5.1-5 **定理(在球中的压缩)**．设T是从完备度量空间$X=(X, d)$到其自身的映射．$Y=\{x\,|\,d(x, x_0)\leqslant r\}$是$X$中一个闭球．若$T$在$Y$上满足(1)、并且假设

$$d(x_0, Tx_0)<(1-\alpha)r \tag{7}$$

成立．则迭代序列(2)收敛于T在Y中的唯一不动点$x\in Y$．

证明　我们只须证明T将Y映射在Y中，由假设对于任意y_1，$y_2\in Y$，有，

$$d(Ty_1, Ty_2)\leqslant\alpha d(y_1, y_2)\qquad(0\leqslant\alpha<1)$$

再利用$d(x_0, Tx_0)<(1-\alpha)r$．对于每个$y\in Y$，

$$d(x_0, Ty)\leqslant d(x_0, Tx_0)+d(Tx_0, Ty)$$
$$<(1-\alpha)r+\alpha d(x_0, y)$$

$$\leqslant (1-\alpha)r + \alpha r$$

$$= r$$

因此，$Ty \in Y$. 即证得T将Y映到自身中，由X是完备的、Y是闭的. 从而Y是完备的. 利用定理5.1-3此定理得证.

5.1-6 引理(不动点). 设$T: X \to X$为完备度量空间$X=(X, d)$上的一连续映射. 若存在一个自然数m，使得T^m是X上一个压缩映射，则T在X中有唯一的不动点.

证明：令$B=T^m$. 由假设B是X上一压缩映射. 根据定理5.1-3，B在X上有唯一的不动点x^*，即，$Bx^*=x^*$. 下面我们证明x^*也是T的不动点. 事实上. 由于$BT=T^{m+1}=TB$，所以，$B(Tx^*)=T(Bx^*)=Tx^*$. 于是Tx^*亦是B的一个不动点. 因为B的不动点是唯一的. 从而有$Tx^*=x^*$. 故x^*亦是T的不动点.

最后我们证明x^*是T的唯一不动点. 假设x'是T的另一个不动点. 则$Bx'=T^m x'=T^{m-}x'=\cdots=Tx'=x'$. 由于$B$的不动点是唯一的，因此，$x'=x^*$.

习 题 5.1

1. 设$X=\{x\in R \mid x\geqslant 1\}\subset R$.定义映射$T: X\to X$为$Tx=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$. 证明$T$为压缩映射并求出最小的$\alpha$.

2. 举例说明定理5.1-3中的完备性是必要的.

3. 在Banach不动点定理5.1-3中，当$x \neq y$时，条例(1)不能用$d(Tx, Ty)<d(x, y)$代替.考察下例.

$X=\{x \mid 1\leqslant x<+\infty\}$并取实数轴上的通常度量，定义，映射$T$: $X\to X$为$x\mapsto x+\frac{1}{x}$.证明当$x\neq y$时，$|Tx-Ty|<|x-y|$.但映射没

有不动点．

4．设$X=(X, d)$为一度量空间．当$x\neq y$时$T: X\to X$满足$d(Tx, Ty)<d(x, y)$且T有一不动点，证明不动点是唯一的．

5．若T为一压缩映射，证明$T^n(n\in N)$亦为一压缩映射．若对于$n>1$，T^n为一压缩映射，证明T不一定为一压缩映射．

6．证明当$0<\alpha<1$时由(5)给定的误差界形成一严格单调减序列．证明(6)至少与(5)一样的精确．

7． 利用Banach不动点定理5.1-3证明：在分析中，迭代$x_n=g(x_{n-1})$其为收敛的一个常用的充分条件是$g(x)$有连续导数且，

$$|g'(x)|\leqslant\alpha<1$$

8． 对一给定的方程$f(x)=0$，为求其逼近的数值解，可将该方程变换为$x=g(x)$的形式，选一初始值x_0并计算

$$x_n=g(x_{n-1}) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

假设g在一区间$J=[x_0-r, x_0+r]$上有连继导数且在J上满足

$|g'(x)|\leqslant\alpha<1$ 及

$$|g(x_0)-x_0|<(1-\alpha)r.$$

证明：$x=g(x)$在J上有唯一解，且迭代序列(x_m)收敛于此解．其误差估计分别为

$$|x-x_m|<\alpha^m r, \quad |x-x_m|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_m-x_{m-1}|$$

9． 若$f(x)$在区间$J=[a,b]$上具有连续导数，且$f(a)<0, f(b)>0$，$0<k_1\leqslant f'(x)\leqslant k_2 (x\in J)$、试选一适当的常数$\lambda$，利用函数$g(x)=x-\lambda f(x)$建立一迭代过程，以求方程$f(x)=0$的解．

10． 为解方程$f(x)=x^3+x-1=0$．考察下列两种迭代．

(a) $\quad x_n=g(x_{n-1}) =\dfrac{1}{1+x^2_{n-1}}.$

取$x_0=1$迭代三步，$|g'(x)|<1$吗？

(b)若将$f(x)=0$写成$x=1-x^3$的形式，能适合迭代吗？试用x_0

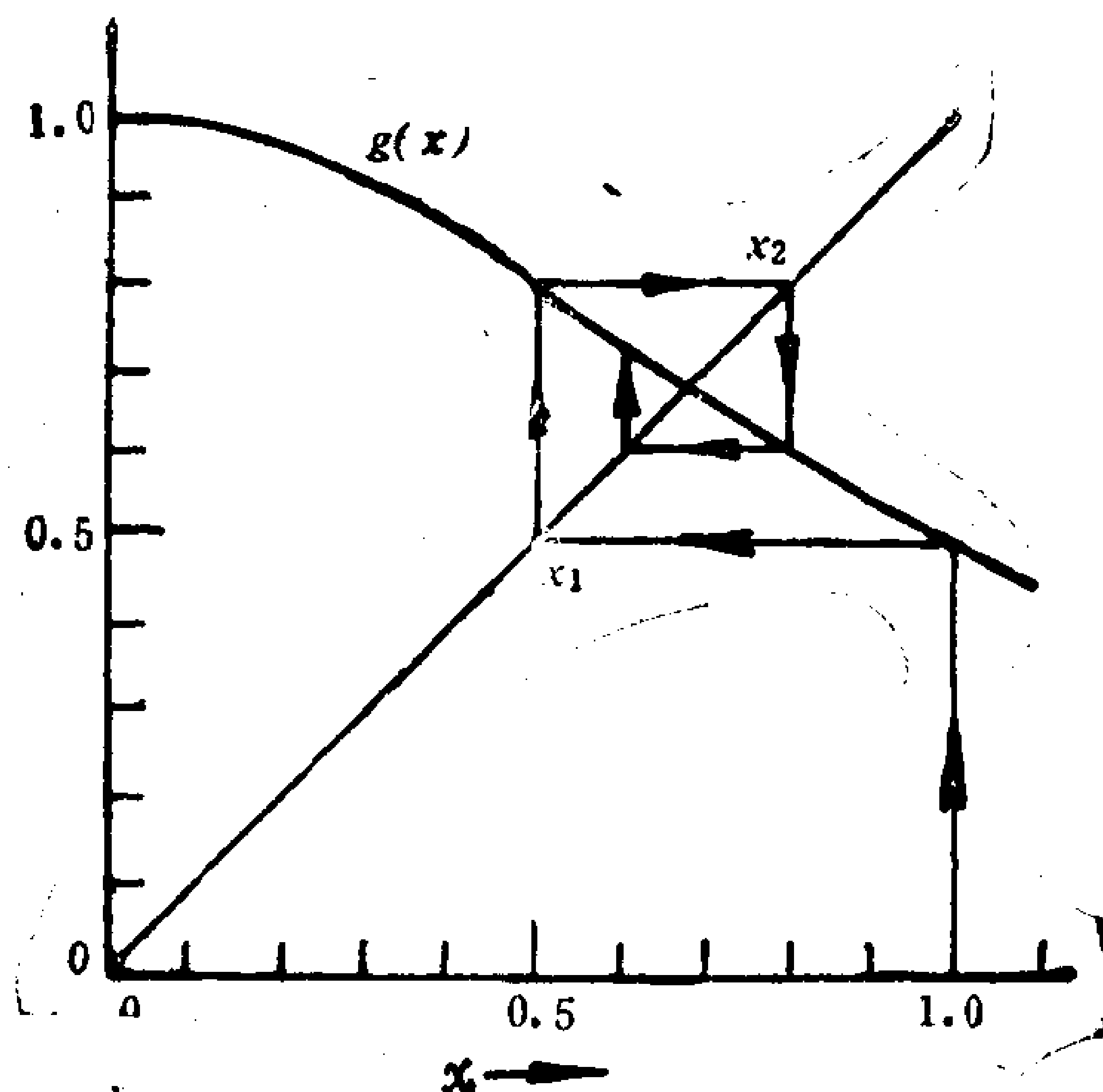


图32　习题10(a)中的迭代线路

$=1$、$x_0=0.5$进行迭代运算并观察其结果.

11． 对于习题10中的方程，证明可用另一个迭代过程

$$x_n=\sqrt{\frac{x_{n-1}}{1+x^3_{n-1}}}$$

求解.取$x_0=1$时确定x_1、x_2、x_3.这个迭代快速收敛的理由是什么?(实根为0.682328)

12． (Newton法) 设$f(x)$为实值函数，且在区间(a,b)上具有二阶连续导数. $\hat{x}$是$f(x)$在(a,b)上的单零点.证明由下列Newton法定义的迭代

$$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

在$\hat{x}$的某邻域内为一压缩映射（因而对于该邻域内的任意一点x_0，迭

代序列均收敛于$\hat{x}$）

13. （平方根）对于一给定的正数C，证明计算其平方根的迭代过程为

$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$ 并指出条件（其中$n=0,1,2$

…）．从$x_0=1$开始，对$\sqrt{2}$计算逼近值x_1、x_2、x_3、x_4．

14．（Lipschitz条件）映射$T:[a,b]\to[a,b]$称为在$[a,b]$上满足Lipschitz条件是指存在一常数K，使得对于所有的$x,y\in[a,b]$．

$$|Tx-Ty|\leqslant K|x-y|$$

成立．

(1)．T是否为一压缩映射？

(2)．若T有连续导数．证明T满足Lipschitz条件．

§5.2 Banach不动点定理的应用

本节介绍Banach不动点定理在线性代数方程上、微分方程上、积分方程上的应用．

首先考虑Banach不动点定理在解线性代数方程组上的应用．我们利用定理中的迭代法解线性代数方程组．并给出了收敛的充分条件和误差界．

为了应用Banach不动点定理，我们需要一完备的度量空间和在其上的一压缩映射．

我们取所有n个实数的有序组所成之集为X．对于X中的任意元素x,y,z，其坐标表示为：$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$．定义$X$上的度量为，

$$d(x,z)=\max|\xi_j-\zeta_j| \tag{1}$$

则$X=(X,d)$为一完备的度量空间（参看§1.5习题2）

定义映射$T:X\to X$为

$$y=Tx=Cx+b. \tag{2}$$

其中，$C=(c_{iK})$是确定的n阶方阵. $b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$是$X$中一固定向量.

下面我们找出T为压缩映射的一个充分条件. 为此将(2)写成分量形式

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n}C_{iK}\xi_K+\beta_i \qquad j=1,2,\cdots,n.$$

令$W=(W_1\cdots,W_n)=Tz$，由(1)和(2)得，

$$d(y,W)=d(Tx,Tz)=\max_j|\eta_j-W_j|$$

$$=\max_j\left|\sum_{k=1}^{n}c_{jK}\ (\xi_k-\zeta_k)\right|$$

$$\leqslant\max_k|\xi_k-\zeta_k|\max_j\sum_{k=1}^{n}|C_{jk}|$$

$$=\max_j\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}|\,d(x,z)$$

设

$$\alpha=\max_j\sum_{k=1}^{n}|c_{jk}| \tag{3}$$

有 $d(Tx,Tz)\leqslant\alpha d(x,z)$.

因此，当$\alpha<1$时，T为一压缩映射. 由Banach不动点定理5.1-3得出下面定理.

5.2-1 **定理**(线性代数方程) 若含有n个未知量$\xi_1,\cdots,\xi_n$且有n个线性方程的方程组

$$x = Cx + b \quad (\text{矩阵} C = (c_{jk}) \text{和向量} b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{为已知}) \tag{4}$$

满足

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

则方程组有唯一解x. 此解x可作为迭代序列 $(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(m)} \cdots)$ 的极限得出.其中,$x^{(0)}$为X中任意元素.且迭代过程为

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

误差界为

$$d(x^{(m)}, x) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)})$$

$$\leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}) \tag{7}$$

条件(5)是迭代收敛的充分条件,称为行和准则.它是在度量(1)下得出的.若用其他的度量代替(1),就会得到其他的条件.

n个未知量n个线性方程的方程组通常写成形式

$$Ax = c \tag{8}$$

这里A为一n阶方阵.c是一固定的n维列向量.我们知道当$\det A \neq 0$时, 方程组(8)有唯一解.为了用迭代法解线性方程组(8),今将A写成$A = B - G$的形式, 其中B为一适当的满秩矩阵.于是(8)成为

$$Bx = Gx + c$$

或 $x = B^{-1}Gx + B^{-1}c$

(6)中的C与b此时分别为

$$C = B^{-1}G, \quad b = B^{-1}c \tag{9}$$

由于B和G的不同，可得不同的具体迭代法，常见的有下面两种.

5.2-2 **Jacobi迭代法**.假设A的主对角线上元素$a_{jj} \neq 0$ $j=1,2\cdots n$.(若有$a_{jj}=0$,因为A是满秩的，可经初等行变换，得到一个非零对角元的满秩矩阵).令 (8) 中的$A = D + (A-D)$,这里$D = \mathrm{diag}(a_{jj})$为对角阵.于是(8)变成

$$Dx = -(A-D)x + c$$

或 $x = -D^{-1}(A-D)x + D^{-1}c$

记$c = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$,得Jacobi迭代过程为

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(r_j - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right) \quad (j=1,2,\cdots n) \tag{10}$$

或 $x^{(m+1)} = -D^{-1}(A-D)x^{(m)} + D^{-1}c$

将条件(5)用于$-D^{-1}(A-D)$得行知准则为

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right| < 1 \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

或

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}| \quad j=1,2\cdots n \tag{12}$$

若A满足(12)，A称为严格对角优势.此时Jacobi迭代序列

收敛.

5.2-3 Gauss-Seidel**迭代法**. 将(8)中的A写成$A=-L+D-V$. 这里的D同于Jacobi迭代中的D, L和V分别是主对角线上元素全部为零的下三角和上三角矩阵, 于是(8)成为,

$$(D-L)x=Vx+c$$

即
$$x=(D-L)^{-1}Vx+(D-L)^{-1}c$$

因此, Gauss-Seidel迭代过程为:

$$x^{(m+1)}=(D-L)^{-1}Vx^{(m)}+(D-L)^{-1}c$$

或
$$x^{(m+1)}=D^{-1}[c+Lx^{(m+1)}+Vx^{(m)}]$$

$$\xi_j^{(m+1)}=\frac{1}{a_{jj}}\left(r_j-\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}\xi_k^{(m+1)}-\sum_{k=j+1}^{n}a_{jk}\xi_k^{(m)}\right)$$

$$(j=1,2,\cdots,n,\ a_{jj}\neq 0) \qquad (13)$$

将条件(5)用于$C=(D-L)^{-1}V$可充分保证Gauss-Seidel迭代收敛. 但由于这样处理C较麻烦, 我们可以找出另外一些更简单的充分条件, 可以证明(12)就是这样的一个充分条件.

现在我们考虑Banach不动点定理在微分方程上的应用. 设微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \qquad (14)$$

其中$f(t,x)$在矩形域$R=\{(t,x)|\ |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$上连续, 因而存在常数$C$, 使得任意$(t,x)\in R$,

$$|f(t,x)|\leqslant C \qquad (15)$$

并且$f(t,x)$关于x满足李普希兹条件

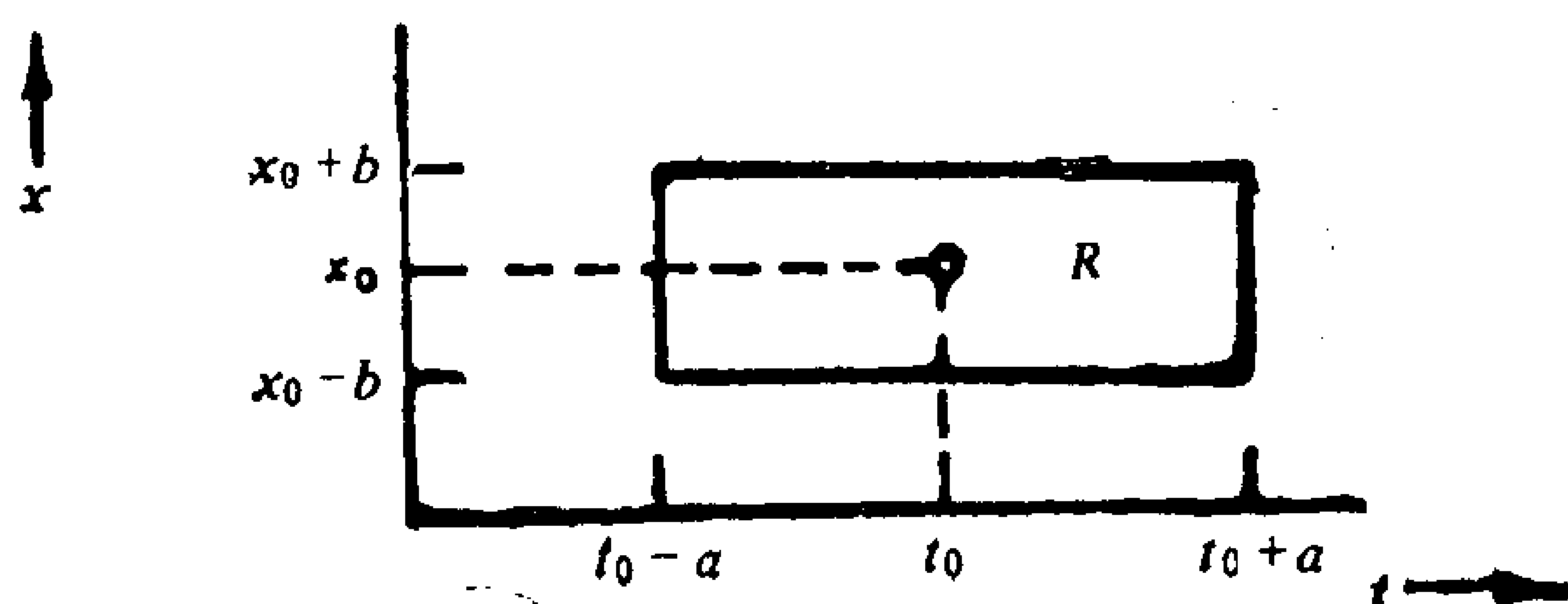


图33 矩形域R

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant K|x_1-x_2| \tag{16}$$

这里K是常数.

5.2-4 **定理**（Picard**定理**）. 满足上述条件的具有始值条件的微分方程(14)在区间$[t_0-\beta,t_0+\beta]$上有唯一解.

其中， $\beta<\min\left\{a,\dfrac{b}{c}, \dfrac{1}{k}\right\}$.

证明 设$C(J)$为区间$J=[t_0-\beta,t_0+\beta]$上所有实值连续函数所成的度量空间，其度量定义为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|$$

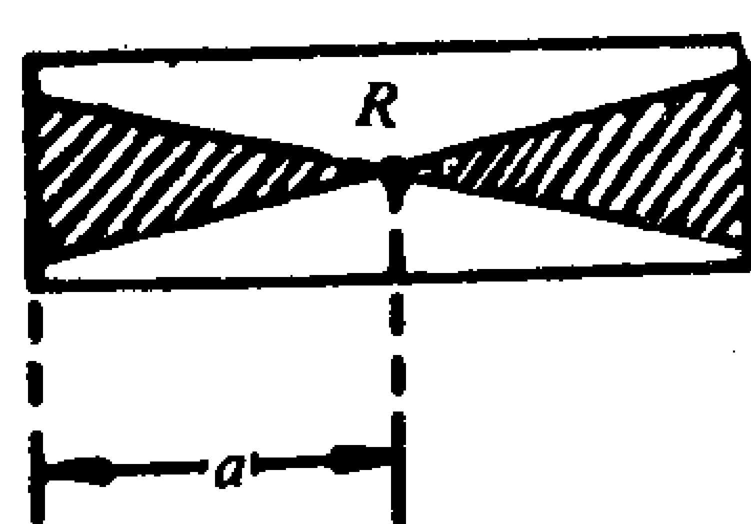
从1.5-5知$C(J)$是完备的.

设$\widetilde{C}$为$C(J)$中满足

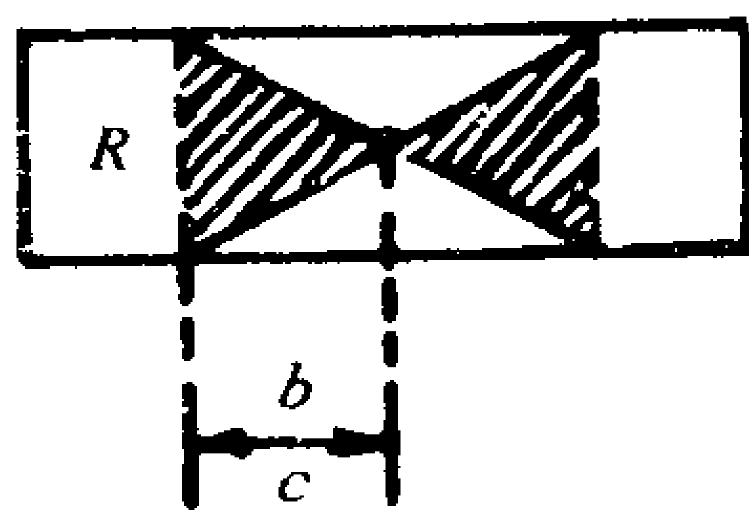
$$|x(t)-x_0|\leqslant c\beta \tag{17}$$

的所有函数组成的$C(J)$的子空间. 不难看出$\widetilde{C}$是$C(J)$的闭子空间. 由定理1.4-8，$\widetilde{C}$为完备的.

(14)可写成积分形式，



$(A)\ a<\frac{b}{c}$



$(B)\ a>\frac{b}{c}$

图34　(15)式的几何解释
解曲线位于阴影部分

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]d\tau$$

定义映射T：$\widetilde{C}\to\widetilde{C}$为

$$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]d\tau \tag{18}$$

事实上，对于每个$x(t)\in\widetilde{C}$，由于$f(t,x)$在R上连续，因此$Tx(t)$在J上连续．$Tx(t_0)=x_0$且有

$$\begin{aligned}|Tx(t)-x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]d\tau\right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |f[\tau, x(\tau)]|\,d\tau \\ &\leqslant c\int_{t_0}^{t} d\tau = c(t-t_0)\leqslant c\beta.\end{aligned}$$

因而，T是$\widetilde{C}$到其自身的映射．

下面证明T在$\widetilde{C}$上为压缩映射．对于任意$x_1(t), x_2(t)\in\widetilde{C}$，由Lipschitz条件(16)

$$
\begin{aligned}
|Tx_1(t) - Tx_2(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_1(\tau)) \right. \\
&\quad \left. - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau \right| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_1(\tau)) \\
&\quad - f(\tau, x_2(\tau))| \, d\tau \\
&\leqslant K\int_{t_0}^{t} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau \\
&\leqslant K(t-t_0)\max_{t\in J} |x_1(t) \\
&\quad - x_2(t)| \\
&\leqslant K\beta d(x_1, x_2),
\end{aligned}
$$

因此，$d(Tx_1, Tx_2) \leqslant K\beta d(x_1, x_2)$

令$\alpha = K\beta$，则由题设．$\alpha<1$，故T为$\widetilde{C}$上一压缩映射．由定理5.1-3得出T有唯一不动点$x\in\widetilde{C}$．即此x是方程(14)在J上的唯一连续函数解，并且x为Picard迭代

$$
x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (n = 0, 1, 2\cdots) \tag{19}
$$

序列$(x_0, x_1, \cdots)$的极限．

最后我们应用Banach不动点定理解决两类积分方程解的存在性和唯一性．

下述形式的积分方程

$$
x(t) - \mu\int_a^b K(t, \tau)x(\tau)d\tau = V(t) \tag{20}
$$

称为第二类的Fredholm方程．

5.2-5 **定理**（Fredholm积分方程）．设$V(t)$在区间

$[a,b]$上连续．$K(t,\tau)$在正方形域$G=[a,b]\times[a,b]$上连续，因而存在常数$C>0$，使得对于所有$(t,\tau)\in G$，$|K(t,\tau)|\leqslant C$．则当$|\mu|<\frac{1}{C(b-a)}$时，积分方程

$$x(t)=V(t)+\mu\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{21}$$

有唯一连续解$x(t)$，并且函数$x(t)$是迭代序列$(x_0,x_1,\cdots)$的极限．其迭代过程为

$$x_{n+1}(t)=V(t)+\mu\int_a^t K(t,\tau)x_n(\tau)d\tau.$$

$(n=0,1,2\cdots)$ (22)

证明　在$C[a,b]$上定义映射T为

$$Tx(t)=V(t)+\mu\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{23}$$

由于$V(t)$、$K(t,\tau)$分别在$[a,b]$和G上连续，则$Tx(t)$在$[a,b]$上连续．即T是从$C[a,b]$到其自身的映射．下面证明T为$C[a,b]$上的压缩映射．对于任意$x(t),y(t)\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)-Ty(t)|\\&=|\mu|\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right|\\&\leqslant|\mu|\max_{t\in[a,b]}\int_a^t|K(t,\tau)|\ |x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau\\&\leqslant|\mu|\,C(b-a)\max_{\tau\in[a,b]}|x(\tau)-y(\tau)|\\&=|\mu|\,C(b-a)d(x,y)\end{aligned}$$

令$\alpha = |\mu|(b-a)C$. 由题设$|\mu| < \frac{1}{C(b-a)}$，因此$\alpha<1$，T是$C[a,b]$上的压缩映射. 由Banach不动点定理5.1-3知，T在$C[a,b]$上有唯一不动点$x(t)$. 并且$x(t)$可作为迭代序列$(x_0, x_1\cdots)$的极限得出，其迭代过程为

$$x_{n+1}(t) = V(t) + \mu\int_a^t K(t,\tau)x_n(\tau)d\tau$$

$(n=0,1,2,\cdots)$

现在我们考虑Volterra积分方程

$$x(t) - \mu\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau = V(t) \tag{24}$$

5.2-6 定理（Volterra积分方程）. 设$V(t)$在区间$[a,b]$上连续. $K(t,\tau)$在三角形域$R=\{(t,\tau)\ |a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant\tau\leqslant t\}$上连续，则对于每个常数$\mu$，积分方程(24)在$[a,b]$上有唯一的连续解$x(t)$.

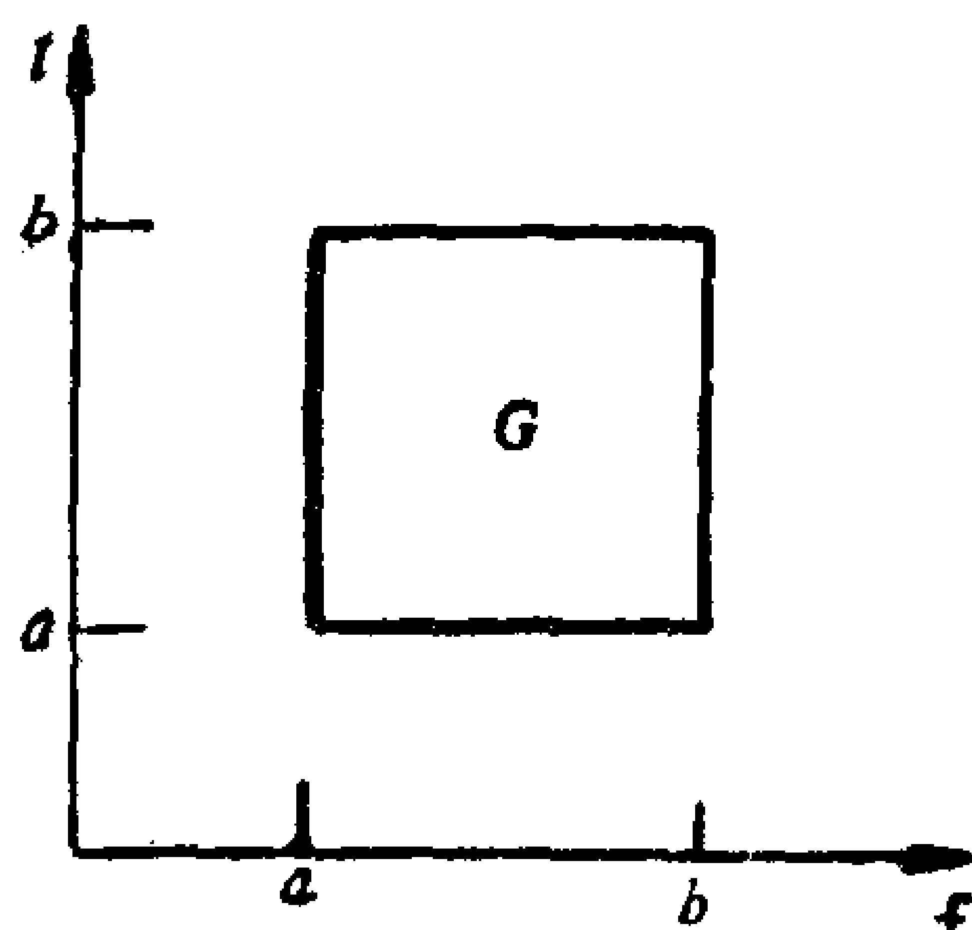


图35　定理5.2-5中$K(t,\tau)$在$a>0$，$b>0$时的定义域

证明　定义映射$T:C[a,b]\to C[a,b]$为

$$Tx(t) = V(t) + \mu\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{25}$$

由于$K(t,\tau)$在有界闭域R上连续，则$K(t,\tau)$在R上为有界函数，即存在常数$c>0$，使得

$$|K(t,\tau)| \leqslant c \quad 对所有(t,\tau)\in R.$$

对于任意$x(t), y(t)\in C[a,b]$我们可得到，

$$
\begin{aligned}
|Tx(t)-Ty(t)| &= |\mu| \left|\int_a^t k(t,\tau)\Big[x(\tau)-y(\tau)\Big]d\tau\right| \\
&\leqslant |\mu| \int_a^t |k(t,\tau)|\ |x(\tau)-y(\tau)|\, d\tau \\
&\leqslant |\mu|\, c(t-a) \max_{\tau\in[a,b]} |x(\tau)-y(\tau)| \\
&= |\mu|\, c(t-a)\, d(x,y) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

下面我们用数学归纳法证明：

$$
|T^m x(t)-T^m y(t)| \leqslant |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y) \tag{27}
$$

对$m=1$时，(27)变为(26)．已证成立．假设对m(27)式成立．则对$m+1$有

$$
\begin{aligned}
&|T^{m+1}x(t)-T^{m+1}y(t)| \\
&= |\mu| \left|\int_a^t K(t,\ \tau)\Big[T^m x(\tau)-T^m y(\tau)\Big]d\tau\right| \\
&\leqslant |\mu|\, c\int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau-a)^m}{m!} d\tau\cdot d(x,y) \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y)
\end{aligned}
$$

因此对任意自然数m，(27)式永远成立．

令$a_m=|\mu|^m c^m \dfrac{(b-a)^m}{m!}$，则

$$d(T^m x, T^m y) \leqslant \alpha_m d(x,y).$$

对于任意给定的μ，只要m充分大就有$\alpha_m<1$，因而对应的映射T^m在$C[a,b]$上为压缩映射，根据引理5.1-6，T在$C[a,b]$上有唯一的不动点$x(t)$．即$x(t)$是积分方程(24)在$[a,b]$上的唯一连续解．

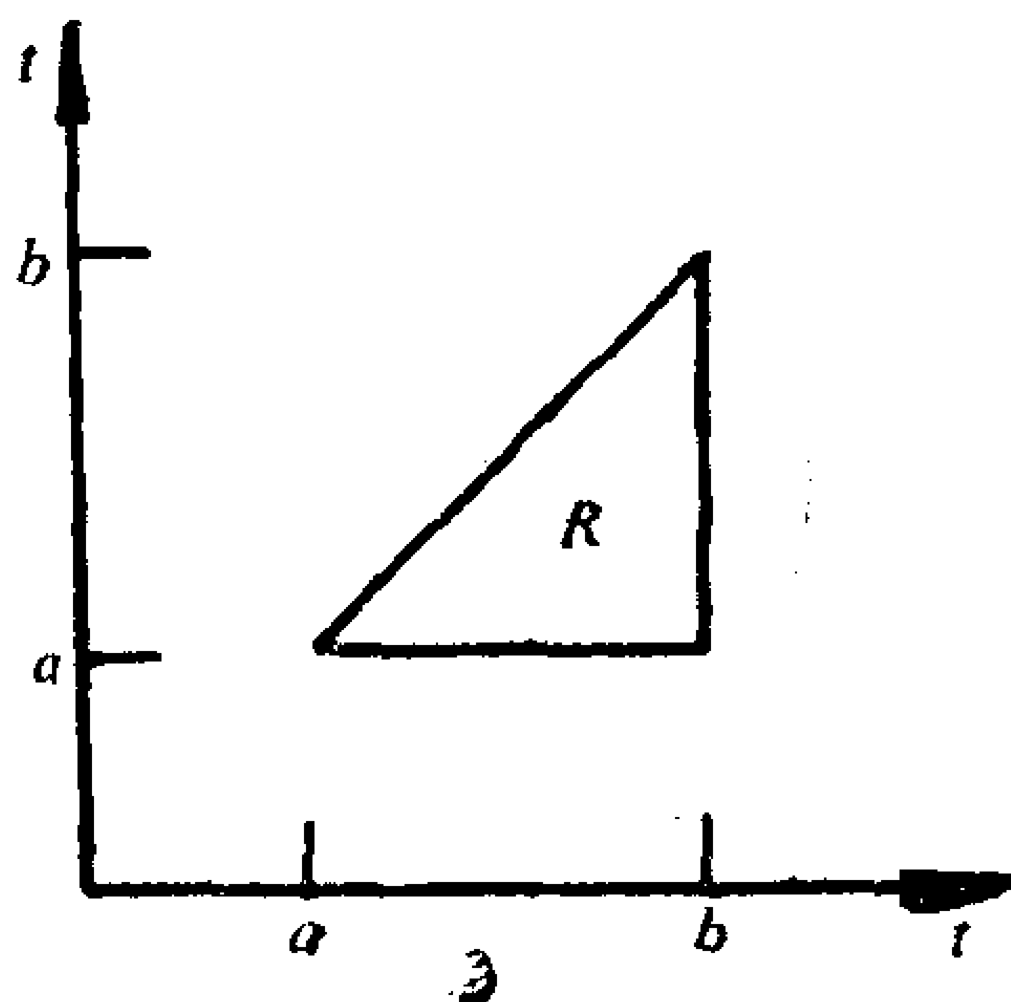


图36　定理5.2-6中$a>0$，$b>0$时三角形域R

习　题　5.2

1．设线性代数方程组为

$$\begin{cases} 5\xi_1-\xi_2=7 \\ -3\xi_1+10\xi_2=24 \end{cases}$$

(a)　求出准确解；

(b)　矩阵C满足条件(5)吗？从$x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$开始用Jacobi迭代计算$x^{(1)}$、$x^{(2)}$．并对$x^{(2)}$求出误差界．将此误差界与实际误差进行比较．

(c)　应用Gauss-Seidel迭代完成(b)中的运算．

2．(Gershgorin定理)若数λ是一方阵$C=(c_{jk})$的特征值，则对某一$j(1\leqslant j\leqslant n)$有，

$$\left| c_{jj}-\lambda \right| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left| c_{jk} \right|$$

(a)　证明(4)式可以写成$Kx=b$的形式，其中$K=I-C$，并且Gershgorin定理和(5)式一起蕴涵K不可能有特征值0（因而K为满秩，即，$\det K\neq o$，于是$Kx=b$有唯一解）

(b) 证明从(5) 和Gershgorin定理可推出(6) 式中C的谱半径小于1（可证明这是迭代收敛的充要条件.C的谱半径是$\max_i |\lambda_i|$，其中$\lambda_1, \cdots \lambda_n$为$C$的特征值.）

3．（列和准则）若用度量

$$d_1(x, z) = \sum_{j=1}^{n} \left| \xi_j - \zeta_j \right|$$

代替度量(1) .证明

$$\sum_{j=1}^{n} \left| C_{jk} \right| < 1 \qquad (K = 1, 2 \cdots n)$$

是迭代(6) 收敛的充分条件.

4．（平方和准则）若用度量

$$d_2(x, z) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \zeta_j)^2 \right]^{1/2}$$

代替度量(1)，证明迭代(6) 收敛的充分条件是

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^2 < 1$$

5．若$f(t, x)$的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$在矩形域$R$上连续.证明$f$在$R$上关于第二个自变量$x$满足Lipschitz条件．($R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b \cdot c \leqslant y \leqslant d\}$)

6．对于微分方程

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

应用picard迭代(19)．验证x_3与准确解中所含$t, t^2, \cdots, t^5$的项完全相同.

7，选$x_0 = v$，用迭代法解下列积分方程.

$$x(t)-\mu\int_0^1 e^{t-\tau}x(\tau)d\tau=v(t)\quad(|\mu|<1)$$

8．（非线性积分方程）设$v(t)$和$K(t,\tau,x(\tau))$分别在$[a,b]$和$G=[a,b]\times[a,b]\times R$上连续.且$K$在$G$上满足下述形式的Lipschitz条件：

$$|K(t,\tau,x_1(\tau))-K(t,\tau,x_2(\tau))|\leqslant l|x_1-x_2|$$

证明：非线性积分方程

$$x(t)-\mu\int_a^b K(t,\tau,x(\tau))d\tau=v(t)$$

对任一满足$|\mu|<1/l(b-a)$的μ有唯一解$x(t)$。

9．积分方程同样可从微分方程引出。

(a)．将始值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

写成积分方程的形式.并说明是哪一类方程。

(b)．证明二阶常微分方程的始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\\ x'(t_0)=x_1\end{cases}$$

可转换成一Volterra积分方程.

10．（Neumann级数）定义算子S为

$$Sx(t)=\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

令$z_n=x_n-x_{n-1}$，证明(22)蕴涵

$$z_{n+1}=\mu Sz_n$$

选$x_0=v$，证明(22)产生一Neumann级数

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=v+\mu sv+\mu^2s^2v+\mu^3s^3v+\cdots$$

11. 解下列积分方程

$$x(t)-\mu\int_0^1 x(\tau)\,d\tau=1$$

(a) 用Neumann级数解（参看习题10）

(b) 用直接法解.

§5.3 赋范空间中的逼近

逼近理论是一个有着多方面应用的非常广泛的领域. 在这几节中，我们将介绍赋范空间和Hilbert空间中逼近理论的基本概况.

这一节我们研究赋范空间中的逼近理论. 逼近理论要研究的问题是某类函数空间中的函数如何用其子空间中的函数来逼近.

一般地讲，由集Y中元素逼近X中元素，我们要考虑逼近的存在性、唯一性和在某一准则下的“最佳逼近”的结构等问题.

5.3-1 **定义(最佳逼近)**. 设Y是赋范空间$X=(X,\|\cdot\|)$的一固定子空间，对于任一给定的$x\in X$，x到Y的距离为

$$\delta=\delta(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\| \tag{1}$$

若存在$y_0\in Y$，使得

$$\|x-y_0\|=\delta \tag{2}$$

则称y_0是Y中对x的最佳逼近.

从定义中可看出，最佳逼近y_0是Y中与给定的x有最小距离的元素. 这样的y_0可能存在也可能不存在. 但对于Y是有穷维的情况，最佳逼近y_0一定存在.

5.3-2 **定理（最佳逼近存在定理）**. 若Y为赋范空间

$X=(X,\|\cdot\|)$的一有穷维子空间.则对于每一个$x\in X$，必存在Y中对x的最佳逼近.

证明　对于给定的$x\in X$，令，

$$\tilde{B}=\{y\in Y \mid \|y\|\leqslant 2\|x\|\}$$

则$\theta\in\tilde{B}$. 因而对于x到$\tilde{B}$的距离有，

$$\delta(x,\ \tilde{B})=\inf_{\tilde{y}\in\tilde{B}}\|x-\tilde{y}\|\leqslant\|x-\theta\|=\|x\|$$

若$y\in Y$，$y\notin\tilde{B}$，则　$\|y\|>2\|x\|$，且

$$\|x-y\|\geqslant\|y\|-\|x\|>\|x\|\geqslant\delta(x,\ \tilde{B}) \tag{3}$$

显然对$y\in\tilde{B}$有，$\|x-y\|\geqslant\delta(x,\ \tilde{B})$. 因此，对于任意$y\in Y$恒有，

$$\|x-y\|\geqslant\delta(x,\ \tilde{B})$$

由下确界的定义得，

$$\delta(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|\geqslant\delta(x,\tilde{B}) \tag{4}$$

但$\tilde{B}\subset Y$，于是

$$\delta(x,Y)\leqslant\delta(x,\ \tilde{B}) \tag{5}$$

由(4)和(5)得，$\delta(x,Y)=\delta(x,\tilde{B})$. 并且由于(3)中的“$>$”若最佳逼近存在的话，必在$\tilde{B}$中.因为$Y$是有穷维的. $\tilde{B}$是Y的有界闭子集，由定理2.5-3，$\tilde{B}$是紧的. 在$\tilde{B}$上定义映射$f:\tilde{B}\to R$为

$$f(y)=\|x-y\|.$$

由于范数的连续性，则f是连续的．根据2.5-7，f在$\widetilde{B}$上取得最小值．即存在$y_0\in\widetilde{B}$，使得

$$\|x-y_0\|=\inf_{y\in\widetilde{B}}\|x-y\|=\delta(x,Y).$$

5.3-3 **空间** $C[a,b]$，对于固定的n，令，

$$Y=\operatorname{Span}\{x_0,\cdots,x_n\},x_i(t)=t^i$$

则Y是$C[a,b]$的$n+1$维的子空间，由存在定理5.3-2知，对于给定的$[a,b]$上的一连续函数$x(t)$，必存在一个次数最多为n的多项式$P_n(t)$，使得对于每一个$y\in Y$，有，

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)-P_n(t)|\leqslant\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$$

5.3-4 **多项式**．在存在定理5.3-2中，Y为有穷维的条件是必要的．事实上，令Y为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上次数任意的所有多项式组成的集．则$Y$是$C\left[0,\frac{1}{2}\right]$的一个子空间，且$\dim Y=\infty$．对于$x(t)=\frac{1}{1-t}\in C\left[0,\frac{1}{2}\right]$，存在$y_n=1+t+\cdots+t^n\in Y$，使得$\|x-y_n\|\to0(n\to\infty)$，即$\delta(x,Y)=0$．显然，对于任意$y\in Y$．$\|x-y\|\neq0$．故最佳逼近不存在．

现在我们来考虑最佳逼近的唯一性问题．从观察两个例子开始．

【例1】 若$X=R^3$，Y为$\xi_1\xi_2$平面($\xi_3=0$)．则对给定点$x_0=(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)$，$Y$中的最佳逼近是$y_0=(\xi_1^0,\xi_2^0,0)$，且$x_0$到$Y$的距离为$\delta=|\xi_3^0|$．这里的最佳逼近是唯一的．

【例2】 设$X=(X,\|\cdot\|_1)$ 为有序实数对的向量空间X

$=\{(\xi_1,\xi_2)\}$，其范数定义为（参看图20）

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2| \tag{6}$$

令$Y=\{y=(\xi_1,\xi_2)\mid\xi_1=\xi_2\}$．取$x=(1,-1)$

则对所有的$y\in Y$．$y=(\eta,\eta)$ 有

$$\|x-y\|_1=|1-\eta|+|-1-\eta|\geqslant 2$$

因此x到Y的距离$\delta(x,Y)=2$．并且凡是满足$|\eta|\leqslant 1$的$y=(\eta,\eta)$均为Y中对x的最佳逼近．

该例表明即使这样简单的空间其最佳逼近也不是唯一的．

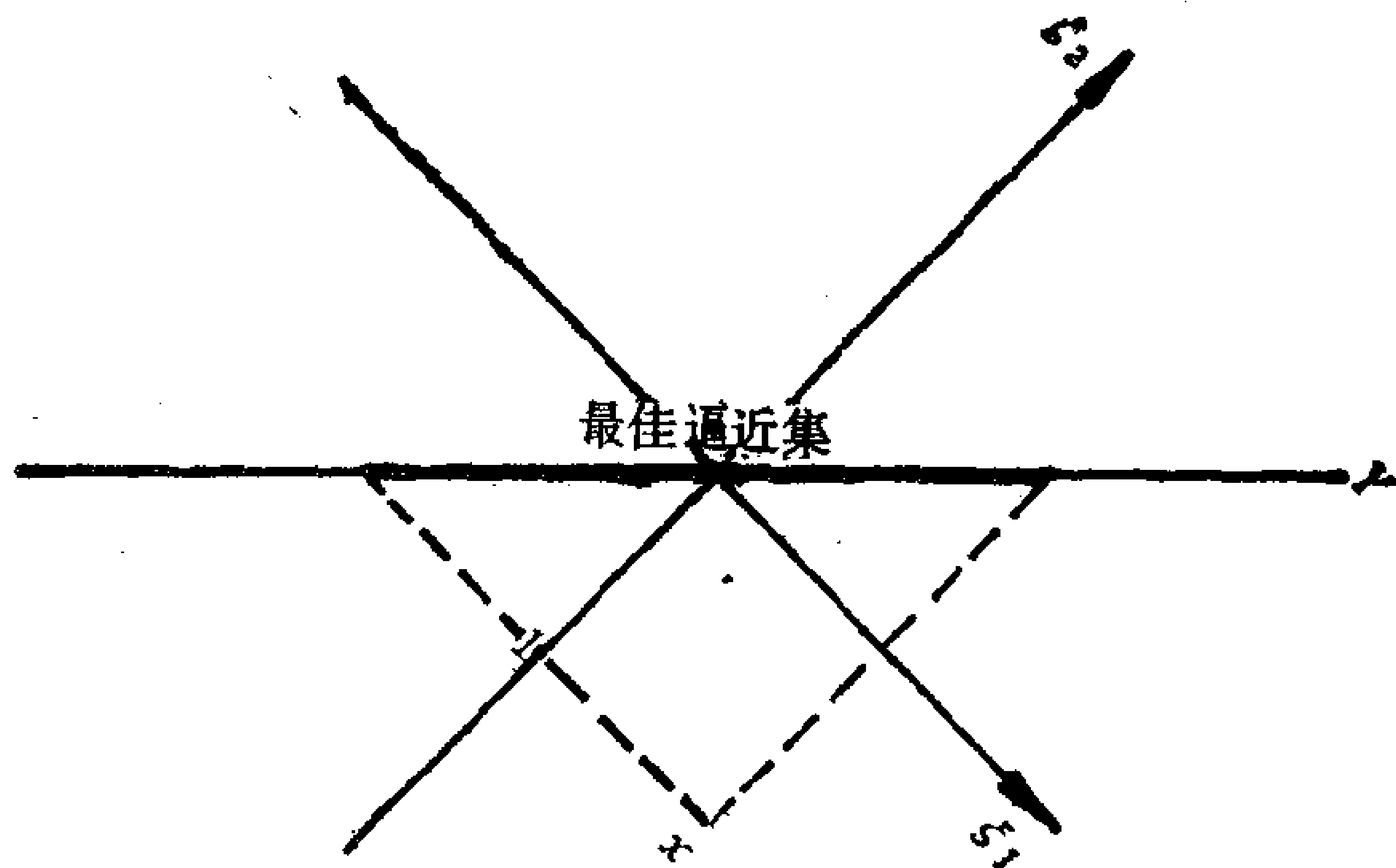


图37 例2中在范数（6）下的最佳逼近集

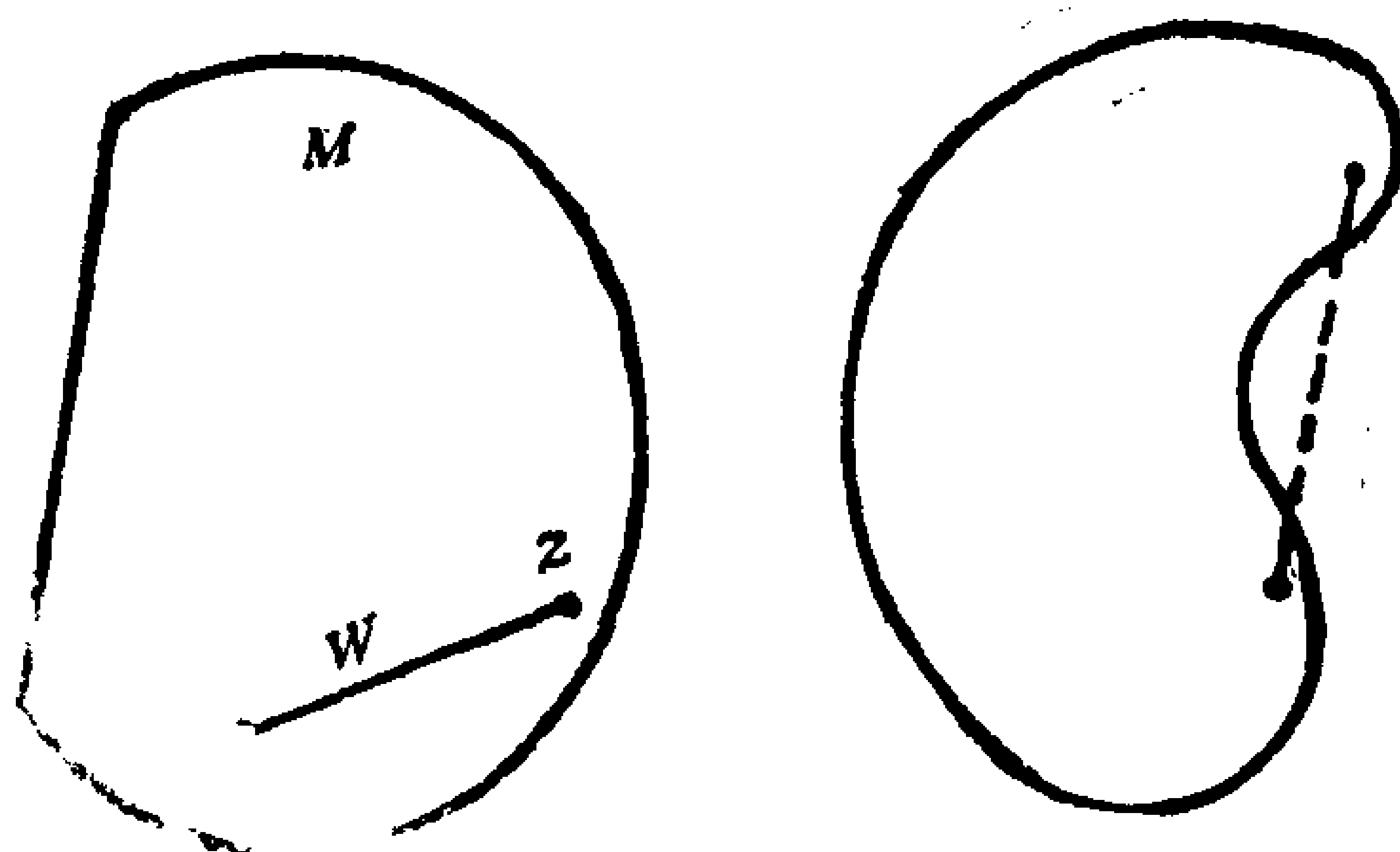
从例子中我们观察出最佳逼近集是凸的．不仅如此，凸性与最佳逼近的唯一性也是有联系的．

首先让我们回顾§ 3.2中凸集的定义．向量空间X的子

集M称为凸的是指：对于任意y、$z\in M$，闭线段

$$W=\{v=\alpha y+(1-\alpha)z\}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant1)$$

为M的子集．y与z称为W的边界点．W的其他点称为W的内点（参看图38）



凸集　　非凸集

图38　凸集与非凸集

5.3-5　引理（凸性）．在赋范空间$(X,\ \|\cdot\|)$中，子空间Y中对给定点$x\in X$的最佳逼近集M是凸的．

证明　若M为空集或单点集．显然M是凸的．现设M的元素多于一点，令$\delta=\delta(x,Y)$．则对y，$z\in M$有，

$$\|x-y\|=\|x-z\|=\delta \tag{7}$$

我们证明(7)蕴涵

$$W=\alpha y+(1-\alpha)z\in M.\qquad(0\leqslant\alpha\leqslant1) \tag{8}$$

事实上，由于$w\in Y$，$\|x-w\|\geqslant\delta$，另一方面．

$$\begin{aligned}\|x-w\|&=\|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(x-z)\|\\&\leqslant\alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|x-z\|\\&=\alpha\delta+(1-\alpha)\delta=\delta\end{aligned}$$

因此，$\|x-w\|=\delta$. 即$w\in M$. 因为y、$z\in M$是任意的. 从而证明了M为凸集.

如果同时存在几个Y对x的最佳逼近，那么由引理可知Y与闭球

$$\widetilde{B}(x,\delta)=\{v \mid \|v-x\|\leqslant\delta\}$$

必有一公共线段W.显然W在闭球的界面$S(x,\delta)$上，而且，对于每一个$w\in W$，对应着唯一的$v=\delta^{-1}(w-x)$，其范数为$\|v\|=\|w-x\|/\delta=1$，这意味着由(8)给出的每一个最佳逼近在单位球面$\{x \mid \|x\|=1\}$上对应唯一的v.

由此可见，为了得到最佳逼近唯一性的条件，必须排除使单位球面能包含直线段的那种范数.

5.3-6　**定义（严格凸性）**. 严格凸性的范数是指这样一种范数：对于所有范数为1的x,y，且$x\neq y$，有

$$\|x+y\|<2$$

具有这样范数的赋范空间称为严格凸的赋范空间.

5.3-7　**引理（严格凸性）**

(a)　Hilbert空间是严格凸的.

(b)　空间$C[a,b]$是非严格凸的.

证明　(a)．对于范数为1的所有x,y，且$x\neq y$．有$\|x-y\|=\alpha>0$，由平行四边形等式得.

$$\|x+y\|^2=-\|x-y\|^2+\alpha(\|x\|^2+\|y\|^2)$$
$$=-\alpha^2+2(1+1)<4$$

因此，　$\|x+y\|<2$.

(b)　在$C[a,b]$中取$x_1(t)=1$，$x_2(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$则，$\|x_1\|$

$= \|x_2\| = 1$，$x_1 \neq x_2$，但是，

$$\|x_1 + x_2\| = \max_{t \in [a,b]} \left| 1 + \frac{t-a}{b-a} \right| = 2 .$$

因此，$C[a,b]$是非严格凸的.

5.3-8 **定理**（**最佳逼近的唯一性**）. 在严格凸的赋范空间X中，已知子空间Y. 则Y中对每个给定$x \in X$的最佳逼近至多有一个.

证明. 用反证法证. 若Y中对x有两个最佳逼近y和z，且$y \neq z$. 则，

$$0 < \|y - z\| \leqslant \|y - x\| + \|x - z\| = 2\delta$$

于是$\delta > 0$. 令$v_1 = \frac{x-y}{\delta}$，$v_2 = \frac{x-z}{\delta}$，有

$\|v_1\| = \|v_2\| = 1$，$v_1 \neq v_2$. 由引理5.3-5，

$\frac{1}{2}(y+z)$也是最佳逼近，因此，$\|x - \frac{1}{2}(y+z)\| = \delta$

$$\left\|\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right\| = \frac{1}{\delta} \left\|x - \frac{1}{2}(y+z)\right\| = 1，即$$

$\|v_1 + v_2\| = 2$. 这与X是严格凸空间矛盾. 故证得Y对X至多存在一个最佳逼近.

由定理3.2-1和引理3.2-3，我们得出下面的定理.

5.3-9 **定理**（**Hilbert空间**）. 在Hilbert空间H中，对每个给定x与每个已知的H的闭子空间Y，则Y中对x的最佳逼近唯一存在.（即是$y = px$，p是H到Y的投影算子）.

习 题 5.3

1. 若(X, d)为一度量空间，Y为X一紧子集. 则Y中对每个

$x\in X$均有一最佳逼近y.

2.（凸函数）一函数$f: R^n\to R$称为凸的，若它的定义域$D(f)$是凸集，而且对所有u，$v\in D(f)$，有，

$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leqslant\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$ 其中$0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

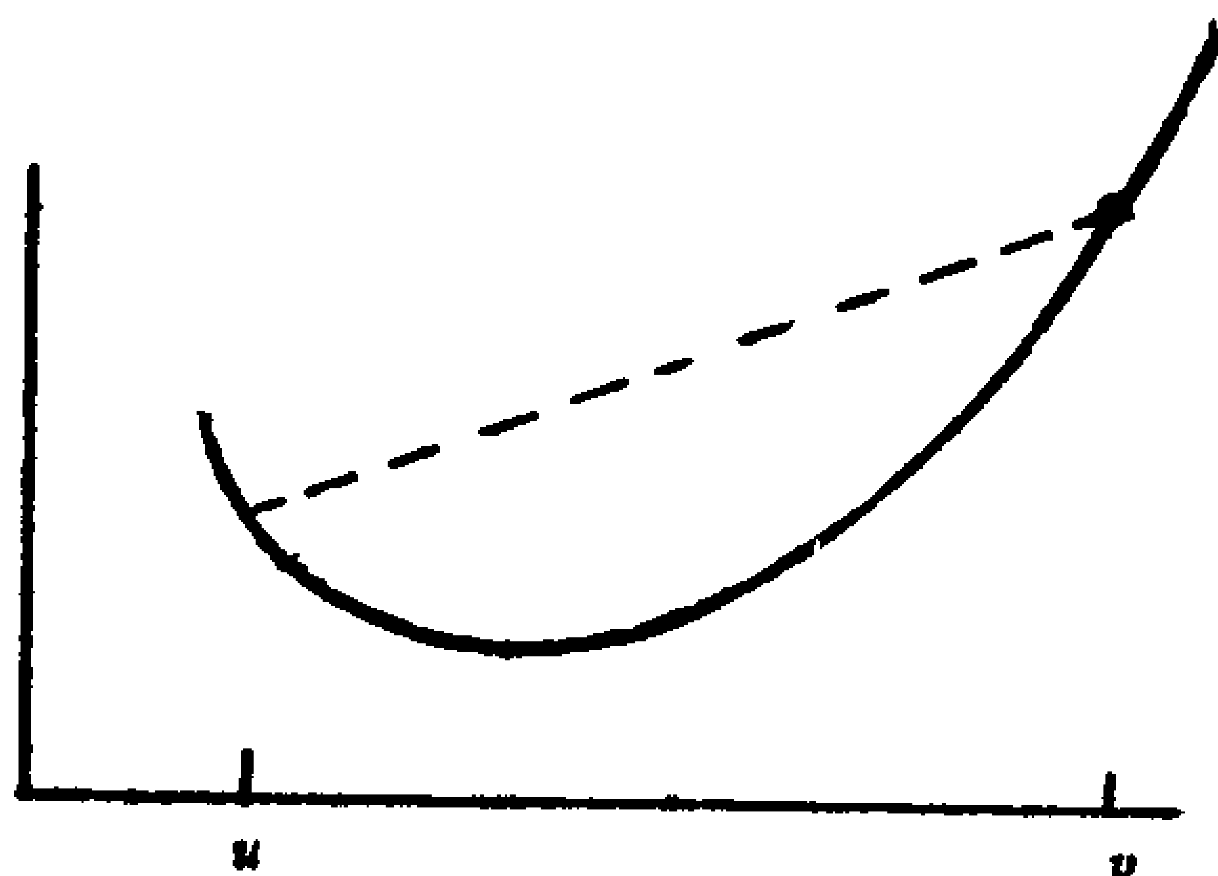


图39 关于单变量t的凸函数f

设Y是赋范空间X的有穷维子空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是Y的一个基.对于固定的$x\in X$.定义函数f为

$$f(\alpha)=\|x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\| \qquad \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),$$

证明函数f为凸的.

3．证明由(6)定义的范数不是严格凸的.

4．在范数(6)下，试确定单位闭球$\widetilde{B}$上与点$x=(2,0)$的距离为极小的所有点y.并确定极小值δ.（注：$\widetilde{B}$的球心在原点）

5．所有有序实数对构成的向量空间，其范数定义为

$$\|(\xi_1,\xi_2)\|=\max(|\xi_1|,|\xi_2|)$$

证明此范数是非严格凸的.并画出单位球面.

6．证明l^1不是严格凸的（可以证明l^p，且$p>1$时是严格凸的）

7．若在赋范空间中，子空间Y中对x的最佳逼近不唯一时，证明x有无穷多个这样的最佳逼近.

8．证明：若一范数的严格凸的，则，

$\|x\|=\|y\|=1$且$x\neq y$蕴涵对所有$0<\alpha<1$有，

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|<1$$

并证明这一条件对严格凸性也是充分的.

9．证明：若一赋范空间X为严格凸的.则，

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \qquad (x\neq\theta,\ y\neq\theta)$$

蕴涵对某实数C有$x=Cy$.

10. 证明习题 9 中的条件对严格凸性不仅是必要的而且是充分的.即，若条件对X中所有非零的x与y均成立.则X为严格凸的.

11. 向量空间X中凸集M的端点是这样的点x，$x\in M$，但x不是线段$w\subset M$的内点.试证明：若X是严格凸的赋范空间，则X中单位球面上的每一点均是X中闭单位球的端点.

§5.4 一 致 逼 近

根据需要，选择不同的范数会得到不同的逼近．一致逼近是指按$C[a,b]$上的范数

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$$

得到的逼近.

本节考虑实空间$C[a,b]$的n维子空间Y中对$x\in C[a,b]$的最佳逼近的唯一性.

5.4-1 **定义（极值点）**．设$x\in C[a,b]$，$t_0\in[a,b]$称为$x(t)$的极值点是指：$|x(t_0)|=\|x\|$.

由$C[a,b]$上范数的定义，在x的极值点$t_0\in[a,b]$，$|x(t)|$有极大值.

5.4-2 **定义**（Haar**条件**）．设Y是实空间$C[a,b]$的n维子空间．若每一个$y\in Y$，$y\neq 0$，在$[a,b]$中至多有$n-1$个零点，则称Y满足Haar条件.

为方便起见．我们证明与Haar条件等价的一个条件.

5.4-3 **引理**. n维子空间$Y\subset C[a,b]$满足Haar条件等价于对每一基$\{y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$和区间$[a,b]$中任意$n$个不同的点$t_1,\cdots,t_n$，均有

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

证明　任一$y\in Y$可表示为$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k$. 子空间$Y$满足Haar条件当且仅当对每一$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k$若在$J=[a,b]$中有$n$个或多于$n$个的零点$t_1,\cdots,t_n,\cdots$,则$y=0$. 意即齐次线性方程组

$$y(t_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k(t_j)=0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

有唯一零解$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$

而齐次线性方程组(2) 只有零解的充分必要条件是行列式(1) 不为零.

由下面引理可得出Haar条件是最佳逼近唯一性的充分条件.

5.4-4　**引理（极值点）**. 假设实空间$C[a,b]$的n维子空间Y满足Haar条件. 对给定的$x\in C[a,b]$和$y\in Y$, 如果函数$x-y$极值点的个数少于$n+1$, 则y不是Y中对x的最佳逼近.

证明　由假设函数$v=x-y$. 有$m\leqslant n$个极值点t_1, $\cdots$, t_m. 若$m<n$, 可在$[a.b]$中选出点$t_{m+1},\cdots,t_n$, 加上去使n个点$t_1,\cdots,t_n$互不相同. 由于Y满足Haar条件. 根据引理5.4-3, 对于这n个点和Y的一个基$\{y_1,\cdots,y_n\}$, (1)式成立. 因此非齐次线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k(t_j)=V(t_j)\quad(j=1,2\cdots n)\tag{3}$$

有唯一解$\beta_1,\cdots,\beta_n$. 利用此解定义

$$y_0=\beta_1 y_1+\cdots+\beta_n y_n$$

和

$$\tilde{y}=y+\varepsilon y_0$$

我们证明对一充分小的ε，函数$\tilde{V}=x-\tilde{y}$满足 (4)

$$\|\tilde{V}\|<\|V\|$$

因而y不可能成为Y中对x的最佳逼近.

在$V(t)$的极值点$t_1,\cdots,t_n$，$|V(t_j)|=\|V\|$. 由题设极值点的个数$m\leqslant n$，因此，$V(t)=x(t)-y(t)\not\equiv 0$，（因为否则有无穷个极值点)，于是$\|V\|>0$. 由(3)及$y_0$的定义知，$V(t_j)=y_0(t_j)\neq 0$，根据$|V(t)|$和$|y_0(t)|$连续，对于每个$t_j$，均存在邻域$N_j$，使得在$N=N_1\cup N_2\cup\cdots\cup N_m$中，有

$$\mu=\inf_{t\in N}|V(t)|>0,\qquad \operatorname{int}_{t\in N}|y_0(t)|\geqslant\frac{1}{2}\|V\|>0\tag{5}$$

且对于所有的$t\in N$，$\dfrac{y_0(t)}{V(t)}>0$. 于是，

$$\frac{y_0(t)}{V(t)}=\frac{|y_0(t)|}{|V(t)|}\geqslant\frac{\inf|y_0(t)|}{\|V\|}\geqslant\frac{1}{2}\text{对于所有}$$

$t\in N$. 设$M_0=\sup\limits_{t\in N}|y_0(t)|$，则对于每个正的$\varepsilon<\mu/M_0$，及每个$t\in N$，得，

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{V(t)}=\frac{\varepsilon\,|y_0(t)|}{|V(t)|}\leqslant\varepsilon\cdot\frac{M_0}{\mu}<1$$

因为，$\widetilde{V}=x-\widetilde{y}=x-(y+\varepsilon y_0)=V-\varepsilon y_0$. 利用上述不等式，可看出对所有的 $t\in N$，与$0<\varepsilon<\frac{\mu}{M_0}$.

$$\begin{aligned}|\widetilde{V}(t)| &= |V(t)-\varepsilon y_0|\\ &= |V(t)|\left(1-\varepsilon\cdot\frac{y_0(t)}{V(t)}\right)\\ &\leqslant\|V\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\|V\| \qquad (6)\end{aligned}$$

另一方面，在余集$K=[a,b]-N$上，令

$$M_1=\sup_{t\in K}|y_0(t)| \qquad M_2=\sup_{t\in K}|V(t)|$$

由于N包含了$V(t)$的所有极值点，因此，
$M_2<\|V\|$且可写成

$$\|V\|=M_2+\eta. \qquad 其中\eta>0.$$

选取一正$\varepsilon<\eta/M_1$，于是$\varepsilon M_1<\eta$且对所有的$t\in K$有.

$$\begin{aligned}|\widetilde{V}(t)| &\leqslant |V(t)|+\varepsilon\,|y_0(t)|\\ &\leqslant M_2+\varepsilon M_1<\|V\|.\end{aligned}$$

取$\varepsilon<\min\{\mu/M_0,\eta/M_1\}$，利用上述不等式和(6) 并对$|\widetilde{V}(t)|$在$[a,b]$上取上确界，因此得到，$\|\widetilde{V}\|<\|V\|$.

利用这个引理，可得出最佳逼近的唯一性定理.

5.4-5 Haar唯一性定理（最佳逼近）. 设Y是实空间

$C[a,b]$的一个n维子空间，则Y中对每一个$x\in C[a,b]$的最佳逼近为唯一的充分且必要条件是Y满足Haar条件．

证明．(a)，充分性，设Y满足Haar条件，$y_1\in Y$与$y_2\in Y$同为某固定$x\in C[a,b]$且$(x\notin Y)$的最佳逼近．令，

$$V_1=x-y_1, V_2=x-y_2,$$

则，$\|V_1\|=\|V_2\|=\delta$，其中δ为x到Y的距离．由引理5．3-5，

$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$亦是Y中对x的最佳逼近．设

$$V=x-y=x-\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(V_1+V_2) \tag{7}$$

根据引理5．4-4，$V(t)$至少有$n+1$个极值点$t_1,\cdots,t_{n+1}$，且$|V(t_i)|=\|V\|=\delta$．而$|V_k(t_i)|\leqslant\|V_k\|=\delta(k=1, 2)$，由(7)有

$$\begin{aligned}|V_1(t_j)|&=|2V(t_j)-V_2(t_j)|\\&\geqslant 2|V(t_j)|-|V_2(t_j)|\\&\geqslant 2\delta-\delta=\delta.\end{aligned}$$

从而，$|V_1(t_j)|=\delta$．同理，$|V_2(t_j)|=\delta$．
由(7)，$V_1(t_j)$与$V_2(t_j)$符号必相同，即，

$$V_1(t_j)=V_2(t_j)=\delta\text{或}-\delta.\ (j=1,2,\cdots,n+1)$$

这蕴涵$y_1-y_2=V_1-V_2$在$[a,b]$中有$n+1$个零点，由于Y满足$Haar$条件，因此，$y_1-y_2=0$．即$y_1=y_2$，唯一性得证．

(b)　必要性，假设Y不满足$Haar$条件，我们来证存在$x(t)\in C[a,b]$其最佳逼近不唯一．

因为假设Y不满足Haar条件，由引理5．4-3必存在Y的一个基$\{y_1,\cdots,y_n\}$和$[a,b]$中的n个值$t_1,\cdots,t_n$，使得(1)中的

行列式为零.因此齐次方程组

$$r_1y_k(t_1)+r_2y_k(t_2)+\cdots+r_ny_k(t_n)=0\quad k=1,\cdots n,$$

有非零解$r_1,\cdots,r_n$,利用此解，对任一$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k\in Y$有，

$$\sum_{j=1}^{n}r_j y(t_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\sum_{j=1}^{n}r_j y_k(t_j)\right]=0 \tag{8}$$

由于(1)中行列式为零.所以转置方程组

$$\beta_1y_1(t_j)+\beta_2y_2(t_j)+\cdots+\beta_ny(t_j)=0\,(j=1,2\cdots n)$$

亦有非零解$\beta_1\cdots,\beta_n$,利用这一解,定义$y_0=\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k$，则$y_0\neq 0$(因为$y_1,\cdots,y_n$线性无关)，且，$y_0(t_j)=0,j=1,2\cdots,n$，取一数$\lambda$满足$\|\lambda y_0\|\leqslant 1$,设$z\in C[a,b]$,$\|z\|=1$,且

$$z(t_j)=\mathrm{Sgn}r_j=\begin{cases}-1 & 若r_j<0\\ 1 & 若r_j\geqslant 0\end{cases}$$

定义$x\in C[a,b]$为

$$x(t)=z(t)(1-|\lambda y_0(t)|)$$

由于$y_0(t_j)=0$，则$x(t_j)=z(t_j)=\mathrm{Sgn}r_j$.且$\|x\|=1$.我们证明$Y$中对$x$的最佳逼近有无穷多个.

事实上，因为，$|z(t)|\leqslant\|z\|=1$，$|\lambda y_0(t)|\leqslant\|\lambda y_0\|\leqslant 1$，所以，对于每个$\varepsilon\in[-1,1]$,有

$$\begin{aligned}&|x(t)-\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant|x(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&=|z(t)|(1-|\lambda y_0(t)|)+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant 1-|\lambda y_0(t)|+|\varepsilon||\lambda y_0(t)|\\&=1-(1-|\varepsilon|)|\lambda y_0(t)|\leqslant 1.\end{aligned}$$

如果我们能证明

$$\|x-y\|\geqslant 1,\quad 对任意y\in Y \tag{9}$$

成立，则每个$\varepsilon\lambda y_0(t)$ ($\varepsilon\in[-1,1]$,)就是X到Y的最佳逼近.

若(9)不成立，那么，必存在$\tilde{y}\in Y$，使得$\|x-\tilde{y}\|<1$，由于$|x(t)-\tilde{y}(t)|\leqslant\|x-\tilde{y}\|<1$及其$x(t_i)=\mathrm{Sgn}\,r_j=\pm1$，则$\tilde{y}(t_i)\neq0$且，

$$\mathrm{Sgn}\,\tilde{y}(t_j)=\mathrm{Sgn}\,x(t_j)=\mathrm{Sgn}\,r_i$$

因为有些$r_j\neq0$，于是，

$$\sum_{j=1}^{n}r_j\tilde{y}(t_j)=\sum_{j=1}^{n}r_j\,|\tilde{y}(t_j)|\,\tilde{y}\mathrm{Sgn}\,r_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}|r_i|\,|\tilde{y}(t_j)|\neq0.$$

这与条件(8)矛盾.因此(9)必成立.

若Y为次数不超过n的所有多项式与多项式$y=0$组成的子空间.则，$\dim Y=n+1$，且Y满足Haar条件.因此有下述定理.

5.4-6 **定理**(多项式).设Y_n是$C[a,b]$中由$y=0$和所有次数不超过n的多项式构成的子空间.则Y中对每一个$x\in C[a,b]$的最佳逼近是唯一的.

此定理表明：一般情况下不能保证最佳逼近的唯一性.但是多项式逼近有唯一性.多项式之所以有这样特别好的性质，是由于它们满足$Haar$条件.

以上是在理论上研究了一致逼近的问题.下面我们考虑$C[a,b]$中函数$x(t)$的最佳逼近的形式.一般情况下这是一个很困难的问题.我们这里只考虑一个简单而非常重要的古典例子.

求$Y = \mathrm{Span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\}$, $y_j(t) = t^j$, $(j = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$对$C[-1, 1]$中函数$x(t) = t^n$的最佳逼近$y$.
即由一个次数小于n的多项式y逼近$[-1, 1]$上的$x(t) = t^n$.这样的多项式y可写成.

$y(t) = a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_0, t \in [-1, 1]$.因此$z = x - y$有如下形式

$$z(t) = t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_0), t \in [-1, 1] \tag{10}$$

z是一个n次多项式，其首项系数为1且$\|z\| = \|x - y\|$是x到Y的距离.因此我们的问题就等价于：在所有次数为n且首项系数为1的多项式中求一多项式z，使其在所考虑区间$[-1, 1]$上与0有最小的极大偏差，为此我们引进下述概念.

5.4-7 **定义（交错集）**.设Y是实空间$C[a, b]$的子空间，$x \in C[a, b]$，$y \in Y$.点集$\{t_0, \cdots, t_k\} \subset [a, b]$且$t_0 < t_1 < \cdots < t_k$.若$x(t_j) - y(t_j)$在相邻的点$t_j$交错地取值$+\|x - y\|$和$-\|x - y\|$，则称点集$\{t_0, \cdots t_k\}$为函数$x - y$的交错集.

从定义中可看出交错集中的点均为5.4-1所定义的极值点.

下述引理指出了交错集的重要性：若$x - y$存在一充分大的交错集，则y是Y中对x的最佳逼近.

5.4-8 **引理（最佳逼近）**设Y是实空间$C[a, b]$的n维子空间且满足$Haar$条件5.4-2，给定$x \in C[a, b]$. 设$y \in Y$且$x - y$在$[a, b]$上有一含$n + 1$个点的交错集.则y是Y中对x的最佳逼近.

证明.由定理5.3-2和5.4-5知x到Y里的最佳逼近唯一存在.若最佳逼近不是y而是另外的$y_0 \in Y$.则

$$\|x - y\| > \|x - y_0\|$$

函数

$$y_0 - y = (x - y) - (x - y_0)$$

与$x-y$在这$n+1$个极值点上有相同的符号，这是因为$x-y$在这些点的值等于$\pm\|x-y\|$，而右边的另一项$x-y_0$的绝对值不会超过$\|x-y_0\|$而严格小于$\|x-y\|$.这表明y_0-y在这$n+1$个点上交错取正和负.因而y_0-y在$[a,b]$中至少存在n个零点这与Y满足$Haar$条件矛盾.因此y必为Y中对x的最佳逼近.

要想利用上述引理求出$x=t^n$到Y的最佳逼近.(10)中的$z(t)$应具有一个含$n+1$个点的交错集.这使我们联想起函数

$$t = \cos\theta \tag{11}$$

当θ在$[0,\pi]$上变化时，t在$[-1,1]$上变此.函数$\cos n\theta$在$[0,\pi$上有$n+1$个极值点，依次交替取值± 1.因此$\cos(\arccos t)$在$[-1,1]$上存在一含$n+1$个点的交错集.我们希望$\cos(\arccos t)$帮助解决上述问题，其前提$\cos(\arccos t)$能写成t的n次多项式的形式.下面我们证明

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_{ni}\cos^i\theta \quad (\beta_{ni}\text{ 为常数}) \tag{12}$$

证明.利用Demoivre公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

将左端用二项式定理展开，等式两边的实部应相等，得，

$$\cos n\theta = C_n^0\cos^n_0 - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\sin^4_\theta + \cdots$$

$$+(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta \quad \left(k=\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

$$= \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$+C_n^4\cos^{n-4}\theta(1-\cos^2\theta)^2+\cdots$$
$$+(-1)^kC_n^{2k}\cos^{k-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k$$

$$\cos^n\theta\text{的系数}=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^{2k}\quad k=\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$(\text{由}C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots$$
$$+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$$

因此(12)成立.

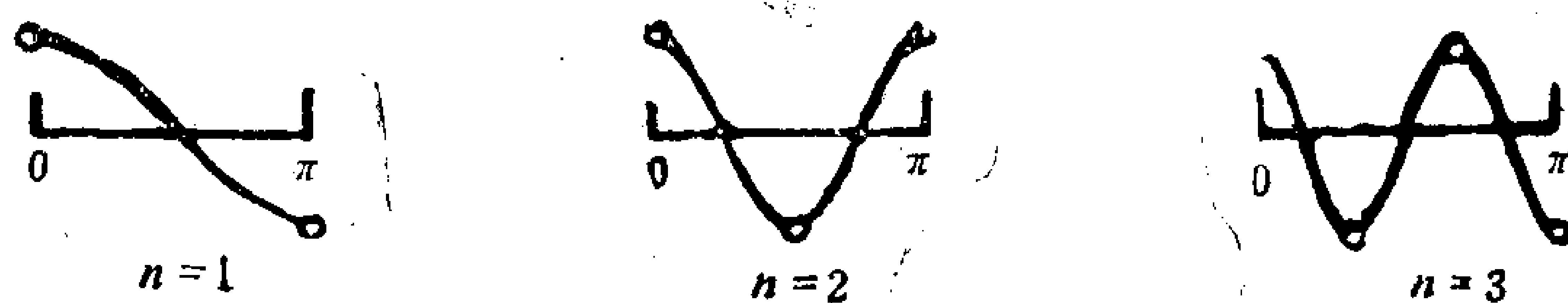


图40　$\cos n\theta$在[0, π]上的$n+1$个极值点.

5.4-9　**定义**(Chebyshev**多项式**). 称函数

$$T_n(t)=\cos(n\arccos t)\qquad t\in[-1,\ 1]$$
$$(n=0,1,2\cdots)\quad(13)$$

为第一类n次Chebyshev多项式. 显然有

$$T_n(t)=t^n-C_n^2t^{n-2}(1-t^2)+C_n^4t^{n-4}(1-t^2)^2$$

$$+\cdots+(-1)^kC_n^{2k}t^{n-2k}(1-t^2)^k\quad k=\left[\frac{n}{2}\right]$$

由　　$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$

可得递推公式:

$$T_{n+1}^n(t)+T_{n-1}^n(t)=2tT_n(t)$$

于是依次可推出下列各次Chebysher多项式:

$$T_0(t)=1\qquad\qquad T_1(t)=t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1 \qquad T_3(t) = 4t^3 - 3t \tag{14}$$
$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1 \quad T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t, \cdots,$$

$$T_n(t) = \frac{n}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^j \frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2t)^{n-2j}$$
$$(n = 1, 2\cdots) \tag{15}$$

5.4-10 定理(Chebysher**多项式**)由

$$\widetilde{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t)$$
$$(n \geqslant 1) \tag{16}$$

定义的多项式在[-1, 1]上是所有次数为n、首项系数为1的实多项式中距0有最小的极大偏差. 即$x = t^n$到$Y = \mathrm{Spen}\{1, t, \cdots t^{n-1}\}$里的最佳逼近为

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) \tag{17}$$

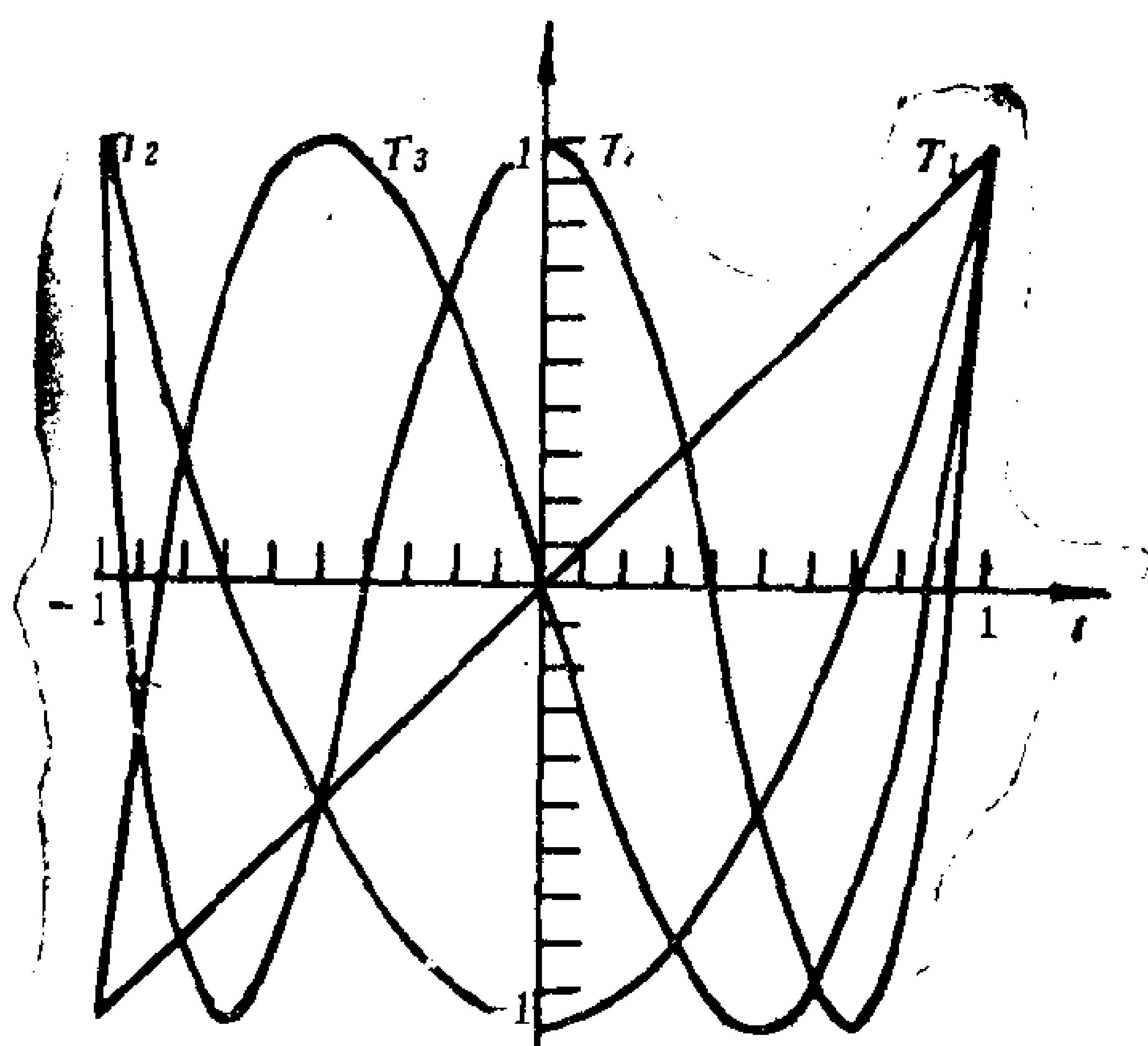


图41 Chebyshev多项式T_1, T_2, T_3, T_4

习 题 5.4

1．若Y为$C[a, b]$的一n维子空间且满足Haar条件．证明将Y的元素限制到$[a, b]$的任意由n个点组成的子集上，仍构成一n维向量空间．

2．设$x_1(t)=1$，$x_2(t)=t^2$．若$Y=\text{Span}\ \{x_1, x_2\}$看成(a) $C[0, 1]$的子空间；

(b) $C[-1, 1]$的子空间．

问Y满足Haar条件吗？

3．证明：n维子空间$Y=\text{Span}\ \{y_1,\cdots, y_n\}\subset C[a, b]$满足Haar条件当且仅当对于任意$n$个不同的$t_j\in[a, b]$，$(j=1,\cdots, n)$ n个向量．

$$v_j=[y_1(t_j), \cdots, y_n(t_j)] \qquad (j=1, 2, \cdots n)$$

成一线性无关集．

4．设Y是$C[a, b]$的n维子空间且满足Haar条件．对任一$x\in C[a,b]$，若$y\in Y$是使得$x-y$在$[a, b]$中的$n+1$个依次相邻的点的值交替取正与负的元素．证明从x到Y里最佳逼近的距离δ不会小于$x-y$在这$n+1$个点处其绝对值最小者．

5．在$C[0, 1]$中试求$Y=\text{Span}\ \{1, t\}$中对函数$x(t)=e^t$的最佳逼近．并与给定的线性Taylor多项式$1+t$进行比较．

6．求$x(t)=t^3+t^2$，$t\in[-1, 1]$的二次多项式的最佳逼近y_0，其极大偏差为多少？

7．证明$T_n(t)$的所有零点为实的、单根、并位于$[-1, 1]$中．

8．证明：$T_n(t)$的任二相邻的零点间存在$T_{n-1}(t)$的一零点．

9．证明：$T_n(t)$与$T_{n-1}(t)$没有公共零点．

10．证明：在空间$L^2[-1, 1]$中，函数集合

$\{(1-t^2)^{-\frac{1}{4}}T_n(t)\}$是直交的，即

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}T_n(t)T_m(t)dt=0 \qquad (m\neq n)$$

并证明若$m=n=0$时积分值为π.

§5.5 Hilbert空间中的逼近

在Hilbert空间中对任一给定的x和一闭子空间Y，Y中对x的最佳逼近唯一存在（参看定理5.3-9）．本节给出最佳逼近以及x与其最佳逼近y之间距离$\|x-y\|$的Gram行列式表示.

设Y是Hilbert空间H的n维子空间．由定理2.4-2知其完备．从而Y是H的闭子空间．根据定理3.2-5，

$$H=Y\oplus Z \qquad (Z=Y^{\perp}) \tag{1a}$$

因此对每一个$x\in H$，有，

$$x=y+z \qquad 其中z=(x-y)\perp y. \tag{1b}$$

即 $\langle x-y,\ y\rangle=0.$

这里的y是Y中对x的最佳逼近．令$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$是Y的一个基，则y可唯一地表示成

$$y=\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ny_n \tag{2}$$

因为$x-y\perp Y$，于是有

$$\langle y_j,\ x-y\rangle=\langle y_j,\ x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_ky_k\rangle=0$$

即得到一个含n个未知量的n个方程的非齐次线性方程组.

$$\overline{\alpha_1}\langle y_j,\ y_1\rangle+\cdots+\overline{\alpha_n}\langle y_j,y_n\rangle=\langle y_j,x\rangle$$

$$(j=1,\cdots,n) \tag{3}$$

其系数行列式为

$$G(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}\langle y_1,y_1\rangle & \langle y_1,y_2\rangle & \cdots & \langle y_1,y_n\rangle\\ \langle y_2,y_1\rangle & \langle y_2,y_2\rangle & \cdots & \langle y_2,y_n\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle y_n,y_1\rangle & \langle y_n,y_2\rangle & \cdots & \langle y_n,y_n\rangle\end{vmatrix}$$

由于y存在且唯一，则方程组(3)有唯一解，因此，$G(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$，$G(y_1,\cdots,y_n)$称为$y_1,\cdots,y_n$的Gram行列式．可简记作G.

由Gram规则，将y的系数可表示成

$\alpha_j=\overline{G}_j/\overline{G}$，其中$\overline{G}$是(4)中$G$的复共轭，$G_j$是$G$中第$j$列用$\begin{vmatrix}\langle y_1, x\rangle\\ \cdots\cdots\\ \langle y_n, x\rangle\end{vmatrix}$代替所得的行列式

现在我们来考虑x与其Y对x的最佳逼近y之间的距离$\|z\|=\|x-y\|$的Gram表示，首先有下面定理.

5.5-1 定理(线性无关). Hilbert空间H的元素$y_1,\cdots,y_n$，构成H中一线性无关集的充分必要条件为

$$G(y_1,\ \cdots,\ y_n)\neq 0.$$

证明 必要性由前面的讨论已证明．现只证充分性．假设$G(y_1,\ \cdots,\ y_n)\neq 0$．证$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$线性无关．用反证法证，若$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$线性相关，则其中必有一向量$y_j$是其他向量的线性组合，因而$G(y_1,\ \cdots,\ y_n)$的第$j$列是其他各列的线性组合，$G(y_1,\ \cdots,\ y_n)=0$，这与假设$G(y_1,\ \cdots,\ y_n)\neq 0$矛盾．从而证得$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$线性无关.

5.5-2定理 (距离)．设Y是Hilbert空间H的n维子空间．$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$是Y的一个基．则x与其Y对x的最佳逼近

y的距离$\|z\| = \|x-y\|$可表示成

$$\|z\|^2=\frac{G(x, y_1, \cdots, y_n)}{G(y_1, \cdots, y_n)} \tag{5}$$

这里，$G(x, y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y_1\rangle & \cdots & \langle x, y_n\rangle \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_n, x\rangle & \langle y_n, y_1\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$

证明　因为$x=y+z$. $\langle y, z\rangle=0$，则，

$$\|z\|^2=\langle z, z\rangle=\langle z, z\rangle+\langle y, z\rangle$$

$$=\langle x, x-y\rangle=\langle x, x\rangle-\langle x, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k\rangle$$

这可写成

$$\langle x, x\rangle-\|z\|^2-\overline{\alpha_1}\langle x, y_1\rangle-\cdots-\overline{\alpha_n}\langle x, y_n\rangle=0 \tag{6}$$

由(3)有.

$$\langle y_j, x\rangle-\overline{\alpha_1}\langle y_j, y_1\rangle-\cdots-\overline{\alpha_n}\langle y_j, y_n\rangle=0$$

$$j=1, \cdots, n \tag{7}$$

方程(6)与(7)合在一起可看作$n+1$个未知量：1，$-\overline{\alpha_1}, \cdots$，$-\overline{\alpha_n}$的$n+1$个方程的线性齐次方程组.

由于此方程组有非零解，则其系数行列式必为零．即

$$\begin{vmatrix} \langle x, x\rangle-\|z\|^2 & \langle x, y_1\rangle & \cdots & \langle x, y_n\rangle \\ \langle y_1, x\rangle+0 & \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_n, x\rangle+0 & \langle y_n, y_1\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}=0 \tag{8}$$

将此行列式按第一列化成二行列式之和，并将第二个行列式

按第一列展开，于是(8)可写成下述形式

$$G(x, y_1, \cdots, y_n) - \|z\|^2 G(y_1, \cdots, y_n) = 0.$$

由定理5.6-1，$G(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$. 因此(5)式得证.

若基$\{y_1, \cdots, y_n\}$为一直交集，则$G(y_1, \cdots, y_n) = 1$，并将$G(x, y_1, \cdots, y_n)$按第一行展开. 由于
$\langle x, y_i\rangle\langle y_i, x\rangle = |\langle x, y_i\rangle|^2$，(5)式可写成

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, y_k\rangle|^2 \tag{9}$$

这与§3.3中的(5)式一致.

习 题 5.5

1. 证明

$$G(\cdots, \alpha y_j, \cdots) = |\alpha|^2 G(\cdots, y_j, \cdots)$$

2. 若$G(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$，证明：$G(y_1, \cdots y_j) \neq 0$. $j = 1, \cdots, n-1$.

3. 用Gram行列式表示Schwar不等式：
$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$. 并利用定理5.6-1求出等号成立的条件.

4. 证明$G(y_1, \cdots, y_n) \geqslant 0$. 由此可得下列命题：Hilbert空间$H$的有限子集为线性无关的充要条件是其元素的Gram行列式为正值.

5. 证明

$$G(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n + \alpha y_j) = G(y_1, \cdots, y_n) \quad (j < n)$$

并用此式能证明定理5.5-2.

6. 设$M = \{y_1, \cdots, y_n\}$为Hilbert空间H中一线性无关集证明：对任意子集$\{y_k, \cdots, y_m\}$（其中$k < m < n$）有，

$$\frac{G(y_k, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)}$$

并证明.

$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m)$$

7. 设 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 为Hilbert空间H的一线性无关集.证明:对$m=1, \cdots, n-1$有

$$G(y_1, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1, \cdots, y_m) G(y_{m+1}, \cdots y_n)$$

且等号成立的充分必要条件为集$M_1 = \{y_1, \cdots, y_m\}$ 的每一元素与集$M_2 = \{y_{m+1}, \cdots, y_n\}$ 的每一元素直交.(利用习题6)

8. 证明:对于习题7中的$y_1, \cdots, y_n$有,

$$G(y_1, \cdots, y_n) \leqslant \langle y_1, y_1\rangle \cdots \langle y_n, y_n\rangle$$

且等号成立当且仅当y_i相互直交.

9. 在Hilbert空间H中一线性无关集 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 的Span $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为稠密的充要条件是:对每一$x \in H$,

$$\frac{G(x, x_1, \cdots, x_n)}{G(x_1, \cdots, x_n)} \longrightarrow 0 \quad (\text{当} n \to \infty \text{时})$$

§5.6 样条逼近

样条逼近就是分段多项式逼近. 对于$[a, b]$上给定的函数x. 将区间$[a, b]$分成n个小区间, 然后在这些小区上用不同的多项式去逼近x, 由这n个多项式组成的函数y作为x的逼近函数.

最简单的连续分段多项式是分段线性函数, 但是这样的函数在子区间的端点不可微. 我们希望逼近函数在$[a, b]$上处处有一定阶的导数.

我们考虑$J=[a, b]$上的三次样条函数. 给定区间$J=[a, b]$一个划分P_n:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{1}$$

称t_j $(0\leqslant j\leqslant n)$为$P_n$的结点．以$t_j$ $(0\leqslant j\leqslant n)$为结点的三次样条函数$y(t)$是指它满足以下两个条件：

(a) $y\in C^2[a, b]$．这里$C^2[a, b]$是具有二阶连续导数的实值函数组成的空间．

(b) 在每个子区间$[t_j, t_{j+1}]$上，$0\leqslant j\leqslant n-1$
y是一个不超过3次的多项式．

对应区间$[a, b]$的划分P_n，所有三次样条函数组成的向量空间记作

$$Y(P_n).$$

现在我们来说明，如何用$Y(P_n)$中的样条函数逼近$[a, b]$上的实值函数$x(t)$．x的逼近函数可用插值法得到．三次样条函数的样条插值是指取刚才定义过的样条函数其在每一结点的值与x的对应值一致．这样的y是存在的．并且若规定了y在端点a与b的导数值．则y是唯一的．

5.6-1 **定理（样条插值）**．设x为定义在$J=[a, b]$上的实值函数 设P_n为J的形如(1)的划分．并设k_0'与k_n'为任意两实数．则存在唯一的三次样条函数$y\in Y(P_n)$满足下述$n+3$个条件

$$(a)\quad y(t_j)=x(t_j)\qquad (j=0, \cdots, n)$$

$$(b)\quad y'(t_0)=k_0'\qquad y'(t_n)=k_n' \tag{2}$$

证明 在每个子区间$I_j=[t_j, t_{j+1}]$中，$j=0, \cdots, n-1$．样条函数$y(t)$与一个次数不超过三的多项式$P_j(t)$一致．且满足．

$$P_j(t_j)=x(t_j)\qquad P_j(t_{j+1})=x(t_{j+1})$$

记$1/t^j{}_{+1}-t^j=\tau_j$，并令

$$P_j'(t_j)=k_j'\quad P_j'(t_{j+1})=k'_{j+1},$$

这里k_0'和k_n'是给定的常数．而k_1'，…，k'_{n-1}可在后面确定．由直接计算可以验证满足上述四个条件的唯一三次多项式$P_j(t)$为

$$
\begin{aligned}
P_j(t) = & x(t_j)\tau_j^2(t-t_{j+1})^2[1+2\tau_j(t-t_j)] \\
& + x(t_{j+1})\tau_j^2(t-t_j)^2[1-2\tau_j(t-t_{j+1})] \\
& + k_j'\tau_j^2(t-t_j)(t-t_{j+1})^2 \\
& + k'_{j+1}\tau_j^2(t-t_j)^2(t-t_{j+1})
\end{aligned}
$$

微分两次得到．

$$
\begin{aligned}
P_j''(t_j) = & -6\tau_j^2x(t_j)+6\tau_j^2x(t_{j+1})-4\tau_jk_j' \\
& -2\tau_jk'_{j+1}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
P_j''(t_{j+1}) = & 6\tau_j^2x(t_j)-6\tau_j^2x(t_{j+1})+2\tau_jk_j' \\
& +4\tau_j{}'_{j+1}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

因为$y\in C^2[a,\ b]$，在结点处两个对应的多项式的二阶导数必一致：

$$P''_{j-1}(t_j)=P_j''(t_j) \qquad (j=1,\ \cdots,\ n-1)$$

在(4)中用$j-1$代替j，并利用(3)，于是这$n-1$个方程变成如下形式

$$
\begin{aligned}
& \tau_{j-1}k'_{j-1}+2(\tau_{j-1}+\tau_j)k_j'+\tau_jk'_{j+1} \\
= & 3(\tau^2_{j-1}\Delta x_j+\tau_j^2\Delta x_{j+1}),
\end{aligned}
$$

其中　$\Delta x_j=x(t_j)-x(t_{j-1})$，　$\Delta x_{j+1}=x(t_{j+1})-x(t_j)$

$(j=1,\ \cdots,\ n-1)$

由于k_0'与$k^{n}{}'$已给定．所以上述方程组含$n-1$个未知量k_1'，…，k'_{n-1}并具有$n-1$个方程，其系数行列式为：

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
2(\tau_0+\tau_1) & \tau_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\tau_1 & 2(\tau_1+\tau_2) & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & \tau_2 & 2(\tau_2+\tau_3) & \tau_3 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-2} & 2(\tau_{n-2}+\tau_{n-1})
\end{vmatrix}
$$

由于$\tau_i>0$，Δ是对角绝对优势的行列式，即主对角线上的每一元素均较同行其他元素的和为大，由5.2-2知方程组有唯一解k_1'，…，k'_{i-1}. 因此每个子区间I_i上的三次多项式$P_i(t)$唯一确定. 即三次样条函数y唯一确定.

最后介绍三次样条函数一个重要性质

5.6-2 **定理**(**极小性质**). 在定理5.6-1中，假设$x\in C^2[a, b]$，且有，

$$y'(a)=x'(a).\qquad y'(b)=x'(b). \tag{5}$$

则
$$\int_a^b x''(t)^2dt\geqslant\int_a^b y''(t)^2dt \tag{6}$$

证明 因为$x'-y'$在a与b处均为0，利用分部积分得，

$$\int_a^b y''(t)[x''(t)-y''(t)]dt$$

$$=-\int_a^b y'''(t)[x'(t)-y'(t)]dt$$

由于y'''在划分的每个小区间上为常数，所以上述积分右端为0. 从而

$$0\leqslant\int_a^b[x''(t)-y''(t)]^2dt$$

$$=\int_a^b x''(t)^2dt-\int_a^b y''(t)^2dt.$$

即证得(6) 式成立. 等号成立当且仅当x为三次样条函数.

习 题 5.6

1．证明：对应区间$[a, b]$一给定划分p_n的所有三次样条函数构成一向量空间$Y(p_n)$．此空间的维数是多少？

2．证明：对于给定的形如(1)的划分p_n，存在唯一的一组$n+1$个样条函数$y_0, \cdots, y_n$，使得

$$y_j(t_k) = \delta_{jk}$$

$$y'_j(a) = y'_j(b) = 0$$

如何由它们求出$y(p_n)$的一个基？

3．用对应划分$p_2 = \{-1, 0, 1\}$且满足(2a)与(5)的三次样条函数来逼近$[-1, 1]$上的函数$x(t) = t^4$．(先猜测y可能是什么样子然后再计算)

4．设$x(t) = t^4$，$t \in [-1, 1]$．求出次数不超过3的多项式空间关于x的Chebyshev逼近$\tilde{y}$．试问$\tilde{y}$满足(2a)与(5)吗？将$\tilde{y}$与习题3中的样条函数y用图形进行比较．

5．证明：习题4中的Chebyshev逼近比习题3中的样条逼近y对x有较大的极大偏差．

6．若$[a, b]$上的一个三次样条函数y具有连续的三阶导数，则y必为一个多项式．

7．有时可能会出现在$[a, b]$的相邻子区间上样条函数是用相同多项式表示．求出$x(t) = \sin t$对应于划分$\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$且满足(2a)与(5)的三次样条逼近$y$．并以此为例，说明上述情况．

8．对于x，$y \in C^2[a, b]$，定义

$$\langle x, y\rangle_2 = \int_a^b x''(t)\, y''(t)\, dt$$

$$p(x) = \langle x, x\rangle_2^{1/2}$$

证明p是一个拟范数（参看§2.3习题10），但不是范数．

9．证明对任意$x\in C^2[a, b]$与其满足（2a）与（5）的样条函数y，可用p估计偏差（参看习题8），而与划分的具体选择无关。

$$\|x-y\|_2\leqslant p(x).$$

第六章　赋范空间线性算子的谱论

谱论是近代泛函分析及应用内容中主要的一部分. 粗略地讲，谱论涉及某些算子的不变子空间、逆算子的一般性质及与原算子的关系，而这类逆算子问题可由解各类线性代数、微分、积分方程中很自然地引出. 研究谱论对于深入认识算子本身也很有意义.

本章首先从有限维向量空间开始，其谱论实质是矩阵的特征值理论，这虽比无限维空间算子的谱论要简单得多，但在实际中是很重要的，如应用在数值分析方面；并且用其来说明一般情况下的背景及在无限维空间中谱论的某些概念. 在第3、4节里将介绍赋范空间与Banach空间中有界线性算子谱的重要性质，最后还将某些结果推广到Banach代数中去.

为了理论完整，除特殊声明外，不考虑平凡向量空间$\{\theta\}$，并假定所有空间都是复的.

§6.1　有限维赋范空间的谱论

设X为有限维赋范空间，$T:X\to X$为一线性算子，则T可由矩阵表示（其依赖于X基的选择）. 因此我们从讨论矩阵开始，对于给定的（实或复）的n阶方阵$A=(\alpha_{jk})$其特征值和特征向量依下面方程

$$Ax=\lambda x \tag{1}$$

定义如下：

6.1-1 定义;(矩阵的特征值、特征向量、特征空间、谱、预解集). 方阵$A=(\alpha_{jk})$的特征值是使(1)有$x\neq0$解的数λ,并称x为对应特征值λ的一特征向量. 对应于特征值λ的全体特征向量与零向量形成一向量子空间,称其为对应特征值λ的特征空间. A的所有特征值集$\sigma(A)$称为A的谱. 其在复平面的余集$\rho(A)=C-\sigma(A)$称为A的予解集.

例如:二阶方阵$A=\begin{pmatrix}5&4\\1&2\end{pmatrix}$由验算知$x_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$与$x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$分别为对应特征值$\lambda_1=6$与$\lambda_2=1$的特征向量. 在一般情况下矩阵特征值是否存在?特征值、特征向量又如何计算?为此首先注意方程(1) 可改写成

$$(A-\lambda I)x=0. \tag{2}$$

其中I为n阶单位方阵. (2)是含有x的n个未知分量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的齐次线性方程组,为使(2) 存在$x\neq0$解,其系数行列式$det(A-\lambda I)$值应为零,这样就得到A的特征方程:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

并称$\det(A-\lambda I)$为A的特征行列式,其展开为一λ的n次多项式,称做A的特征多项式.

由上述得到下面基本结果:

6.1-2 定理(矩阵的特征值). n阶方程$A=(\alpha_{jk})$的特征值由解A的特征方程(3) 得出,因此A至少有一特征值,

至多有n个不同的特征值.

（由代数基本定理及因式分解知n次多项式在复数中必有根，且至多有n个不同的根. 注意A是实的，其特征值可能是复的）.

在上例中

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0$$

则A的特征值为$\lambda_1=6$与$\lambda_2=1$；谱为$\{6,\ 1\}$；对应的特征向量可分别由

$$\begin{cases}-\xi_1+4\xi_2=0\\ \xi_1-4\xi_2=0\end{cases}\quad 与 \quad\begin{cases}4\xi_1+4\xi_2=0\\ \xi_1+\xi_2=0\end{cases}$$

得到.

将上述结果用于n维赋范空间X上的线性算子$T: X\to X$. 设$=e\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$为$X$的任一基，并设$T_e=(a_{ik})$为$T$关于该基的矩阵，并称$Te$的特征值、谱和予解集为算子$T$的特征值、谱和预解集；这样规定合理性可由下面定理得知.

6.1-3 **定理(算子的特征值)**. 在有限维赋范空间X上给定线性算子$T:X\to X$，对于X的不同基T的表示矩阵均有相同的特征值.

证明：设$e=(e_1,\ \cdots,\ e_n)$与$\tilde{e}=(\tilde{e}_1,\ \cdots,\ \tilde{e}_n)$为$X$中任意两基. 由基定义$e_i$可由$\tilde{e}_k$线性表示，反之亦然，即存在满秩方阵$C$有

$$\tilde{e}=eC \tag{4}$$

由于任一$x\in X$对每一基均有唯一表示式则

$$x=ex_1=\sum\xi_i e_i=\tilde{e}x_2=\sum\tilde{\xi}_k\tilde{e}_k,$$

其中$x_1=(\xi_i)$与$x_2=(\tilde{\xi}_k)$为列向量，由(4)则$ex_1=\tilde{e}x_2=eCx_2$，得

$$x_1=Cx_2 \tag{5}$$

类似地，对$Tx=y=ey_1=\tilde{e}y_2$亦有

$$y_1=Cy_2 \tag{6}$$

若T_1与T_2各表示T在e与$\tilde{e}$下的矩阵，则

$y_1=T_1x_1$ 与 $y_2=T_2x_2$并由(5)与(6)得

$$CT_2x_2=Cy_2=y_1=T_1x_1=T_1Cx_2$$

左乘以C^{-1}得到矩阵变换关系，

$$T_2=C^{-}TC \tag{7}$$

下面证明对应T_1和T_2的特征行列式相等.

$$\begin{aligned}\det(T_2-\lambda I)&=\det(C^{-1}T_1C-\lambda C^{-1}IC)\\&=\det[C^{-1}(T_1-\lambda I)C]\\&=\det(C^{-1})\det(T_1-\lambda I)\cdot\det C\\&=\det(T_1-\lambda I)\end{aligned} \tag{8}$$

由定理6.1-2知T_1与T_2有相同的特征值

上述结果可利用相似矩阵的概念表述如下：若二n阶方阵T_1与T_2，存在满秩矩阵C有(7)式关系，称T_1与T_2为相似矩阵．则

(i)有限维赋范空间X上的线性算子T，对任二不同基其表示矩阵是相似的.

(ii) 相似矩阵有相同的特征值.

由定理6.1-2与6.1-3还可直接得出.

6.1-4　**存在定理(特征值)**有限维复的赋范空间$X\neq\{\theta\}$上的线性算子，至少存在一特征值.

另外在（8）中取$\lambda=0$得$\det T_1=\det T_2$，此行列式值反映了算子T的内在本质，故可用其确切地表达量$\det T$。

习 题 6.1

1．求下列矩阵之特征值与特征向量，其中a与b为实数且$b\neq 0$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -8 & 11\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

2．（Hermite矩阵）证明Hermite矩阵$A=(a_{jk})$的特征值均为实的（即$\overline{A}^T=A$）

3．（斜-Hermite矩阵）证明斜-Hermite矩阵$A=(a_{jk})$的特征值为纯虚数或零（即$\overline{A}^T=-A$）

4．（酉矩阵）证明酉矩阵的特征值其绝对值（或模）为1．（即$\overline{A}^T=A^{-1}$）．

5．设X为有限维内积空间，T：$X\to X$为线性算子．若T为自伴算子证明其谱是实的；若T为酉算子，证明其特征值的绝对值为1．

6．（迹）设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$n$阶方阵$A=(a_{jk})$的$n$个特征值，其中某些或全部$\lambda_j$可以是相等的．证明各特征值之积等于$\det A$；其和等于$A$的迹，即$A$之主对角线各元素的和记为：

$$\operatorname{trace} A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

7．（逆）证明方阵A的逆矩阵A^{-1}存在的充分且必要条件是A的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$均异于零．若$A^{-1}$存在证明其特征值为$1/\lambda_1,\cdots,1/\lambda_n$．

8．证明二阶满秩矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\text{其逆矩阵}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

若A的特征值为λ_1, λ_2，如何从上式得出A^{-1}的特征值为$1/\lambda_1$，$1/\lambda_2$？

9．若方阵$A=(a_{jk})$有特征值λ_j，$(j=1, \cdots, n)$证明kA有特征值$k\lambda_j$；$A^m(m\in N)$有特征值λ_j^m

10．若方阵A的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，且$P$为任一多项式，证明方阵$P(A)$的特征值为$P(\lambda_j)$ $j=1, \cdots, n$．

11．设x_j是n阶方阵A对应特征值λ_j的特征向量，C为任一满秩n阶方阵。证明：λ_j为$\widetilde{A}=C^{-1}AC$的特征值且$y_j=C^{-1}x_j$为对应的特征向量

12．举一简单例说明一n阶方阵，对于R^n（或C^n）的基可以不完全是特征向量，

例如考虑
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13．（相重数）矩阵A的特征值λ之代数重数为其特征多项式根λ的重数，对于λ的特征空间的维数，称为λ的几何重数．求下列变换对应矩阵的特征值及其重数并加以解释

$$\eta_j \xi_j+\xi_{j+1} (j=1, 2, \cdots, n-1), \quad \eta_n=\zeta_n$$

14．证明：特征值的几何重数不超过其代数重数（参看习题 13）

15．设x为不超过$n-1$次的多项式与$x=0$组成的空间（通常对$x=0$的次数不予定义）．T为X上的微分算子．求T的所有特征值和特征向量以及其代数重数和几何重数。

§6.2 基 本 概 念

上一节中的空间是有限维的，现在研究任意维的赋范空间，其谱论比起来要复杂了．

设$X\neq\{\theta\}$为一复的赋范空间，$T:D(T)\to X$为线性算

子，其中$D(T)\subset X$．今考察与T相联系的算子：

$$T_\lambda = T - \lambda I \quad (1)$$

其中λ为一复数，I为与$D(T)$上的恒等算子．如果T_λ存在逆算子记为$R_\lambda(T)$即

$$R_\lambda(T) = T^{-1}{}_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} \quad (2)$$

称其为T的预解算子，或简称为T的预解式，若在特定情况下算子T无需说明时，$R_\lambda(T)$可简写为R_λ

使用预解式的词是很贴切的，因为$R_\lambda(T)$是由解方程$(T - \lambda I)x = y$而得到，当$R_\lambda(T)$存在时，则$x = T_\lambda^{-1}y = R_\lambda(T)y$

重要的是：研究R_λ的性质是认识算子T本身的基础．当然T_λ与R_λ的许多重要性质要依赖于λ．需要考虑的有：在复平面上使R_λ存在的所有λ集合；R_λ的有界性；及λ取什么值使R_λ的定义域在X中稠密等几个方面．

为了研究T、T_λ与R_λ下面引进谱论的基本概念：

6.2-1 **定义(正则集、预解集、谱)**．设$X\neq\{\theta\}$为一复赋范空间，且$T:D(T)\to X$为定义域$D(T)\subset X$上的线性算子，T的正则值为一复数λ且同时满足：

(R_1) $R_\lambda(T)$存在

(R_2) $R_\lambda(T)$有界

(R_3) $R_\lambda(T)$定义在X的稠密子集上

T的**预解集**$\rho(T)$是T的所有正则值的集．其在复平面上的余集称为T的谱．$\sigma(T) = C - \rho(T)$，且$\lambda\in\sigma(T)$称为T的一谱值．此外，将谱$\sigma(T)$分成以下三个互不相交集：

点谱或离散谱$\sigma_p(T)$：是使$R_\lambda(T)$不存在的集；$\lambda\in\sigma_p(T)$称为T的特征值．

连续谱$\sigma_c(T)$：是使$R_\lambda(T)$存在且满足(R_3)但不满足(R_2)，即$R_\lambda(T)$是无界的.

剩余谱$\sigma_r(T)$：是使$R_\lambda(T)$存在（可以有界或无界）但不满足(R_3)，即$R_\lambda(T)$在X中的定义域不是稠密的.

定义6.2-1中的条件要求可概述如下表：

满　足	不　满　足	λ　属　于
$(R_1),(R_2),(R_3)$,		$\rho(T)$
	(R_1)	$\sigma_p(T)$
(R_1)　(R_3)	(R_2)	$\sigma_c(T)$
(R_1)	(R_3)	$\rho_r(T)$

在上述定义中的集有时有的可能为空集，而这正是需要讨论的存在性问题. 例如在6.1-2中有限维的情况下$\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\phi$. 表中的四集为互不相交，且其并为整个复平面.

$$
\begin{aligned}
C&=\rho(T)\cup\sigma(T)\\
&=\rho(T)\cup\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)
\end{aligned}
$$

由定理2.6-10得知若预解算子$R_\lambda(T)$存在则其为线性的，且$R_\lambda(T):R(T_\lambda)\to D(T_\lambda)$（$R(T_\lambda)$为$T_\lambda$的值域）存在当且仅当：由$T_\lambda x=\theta$蕴涵$x=\theta$，即$T_\lambda$的零空间为$\{\theta\}$.

因此对$x\neq\theta$且$T_\lambda x=(T-\lambda I)x=\theta$由定义知$\lambda\in\sigma_p(T)$，即$\lambda$为$T$的特征值. 向量$x$称为$T$的对应特征值$\lambda$的特征向量（若$X$为函数空间，$x$也可称作$T$的特征函数），由对应$T$的特征值$\lambda$的所有特征向量与零向量组成$D(T)$的子空间，称作$T$的对应特征值$\lambda$的特征空间.

可以看到在这里定义的特征值与前一节的定义是一致

的，在有限维空间线性算子的谱是纯点谱，即其连续谱与剩余谱均为空集，从而每一个谱值都是特征值．但在无限维空间线性算子T可以有非特征值的谱值．

6.2-2 例（具有不是特征值的谱值的算子）．在Hilbert序列空间$X=l^2$（参看3.1-6）上，由

$$(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\longmapsto(0,\ \xi_1,\ \xi_2\cdots) \tag{3}$$

定义线性算子 $T:l^2\to l^2$，其中$x=(\xi_j)\in l^2$，称算子T为右移算子，由

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2=\|x\|$$

知T是有界的且$\|T\|=1$．算子$R_0(T)=T^{-1}$：$T(X)\to X$是存在的，其为左移算子由

$$(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\longmapsto(\xi_2,\ \xi_3,\ \cdots)$$

给定．但$R_0(T)$并不满足(R_3)，因为由(3)可知$T(X)$是由所有的$y=(\eta_j)$且$\eta_1=0$构成的子空间Y，但Y在X中不是稠密的，所以根据定义$\lambda=0$是T的谱值但不是特征值．这还可直接从(3)式中看出，由$Tx=\theta$得到$x=\theta$，而零向量不是特征向量．

结合有界逆算子定理4.11-3可得以下结论：若X为完备空间，且$T:X\to X$为有界线性算子，又对某些λ：预解式$R_\lambda(T)$存在并在全空间X上有定义，则对应λ的预解式$R_\lambda(T)$为有界的．

此外，以下的结论在后面要用到，且有助于更好地理解当前的概念．

6.2-3 引理（R_λ的定义域）．设X为复的Banach空间，$T:X\to X$为线性算子且$\lambda\in\rho(T)$．若

(a) T是闭的．或者

(b) T是有界的．

则$R_\lambda(T)$在整个空间X上有定义且有界．

证明：(a)由T是闭的，根据4.12-3知T_λ是闭的，因而R_λ是闭的，从(R_2)得R_λ有界，再将4.12-5(b)用于R_λ，则R_λ的定义域$D(R_\lambda)$是闭的，根据(R_3) $D(R_\lambda)=\overline{D(R_\lambda)}=X$

(b)因$D(T)=X$是闭的，由4.12-5(a)知T是闭的，再由(a)之结果得证

习 题 6.2

1．(恒等算子)求赋范空间X上恒等算子I的特征值、特征空间及$\sigma(I)$和$R_\lambda(I)$．

2．证明：对线性算子T，集$\rho(T)$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$，和$\sigma_r(T)$互不相交，它们的并为复平面．

3．(不变子空间)赋范空间X的子空间Y在线性算子$T: X\to X$下，若$T(Y)\subset Y$，称Y为在T下的不变子空间．证明：T的特征空间是T下的不变子空间．试给出一例．

4．若Y是n维赋范空间X的线性算子T下的不变子空间，若$\{e_1, \cdots, e_n\}$为X的一基且
$Y=\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$对于算子$T$其在基$\{e_1, \cdots, e_n\}$下的表示矩阵有什么特点？

5．设(e_k)为可分Hilbert空间H中的完全标准直交序列，且$T: H\to H$由

$$Te_k=e_{k+1}\qquad (k=1, 2, \cdots)$$

定义并线性与连续地扩充到整个H的算子，求其不变子空间并证明T无特征值．

6．(扩张)在算子扩张下考察谱的各部分变化有实际意义。若T

为有界线性算子，T_L是T的扩张．试证明$\sigma_p(T_1)\supset\sigma_p(T)$且对任意$\lambda\in\sigma_p(T)$对应$T$的特征空间包含于$T_1$的特征空间中．

7．证明习题6中的$\sigma_r(T_1)\subset\sigma_r(T)$

8．证明习题6中的$\sigma_c(T)\subset\sigma_c(T_1)\cup\sigma_p(T_1)$

9．直接证明(不用习题6与8的结果)习题6中的$\rho(T_1)\subset\rho(T)\cup\sigma_r(T)$

10．根据习题6与习题8的结果如何证明习题9？

§6.3 有界线性算子谱的性质

算子谱的性质，依赖于算子所定义的空间及算子的类型，为此分别研究其谱具有共同性质的几大类算子．首先考察的是复的Banach空间X上有界线性算子T，即$T\in B(X,X)$．下面定理是其谱论的关键．

6.3-1 **定理(逆算子)**．设X为Banach空间，$T\in B(X,X)$，若$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}$存在，其为全空间X上的有界线性算子，且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}T^j=I+T+T^2+\cdots \tag{1}$$

(右边的级数依$B(X,X)$上的范数收敛)

证明：由T有界易知，$\|T^j\|\leqslant\|T\|^j$，(1)中级数对$\|T\|<1$绝对收敛．由X为完备再根据2.7-14知，$B(X,X)$完备，且由2.3节得知绝对收敛蕴涵收敛．

设$S=\sum_{j=0}^{\infty}T^j$　　今证$S=(I-T)^{-1}$由

$$\begin{aligned}&(I-T)(I+T+\cdots+T^n)\\&=(I+T+\cdots+T^n)(I-T)=I-T^{n+1}\end{aligned} \tag{2}$$

令$n\to\infty$由$\|T\|<1$，则$T^{n+1}\to0$，得

$$(I-T)S=S(I-T)=I \quad (3)$$

则 $S=(I-T)^{-1}$得证

应用上述定理证明有界线性算子谱的重要性质：其在复平面上为闭集.

6.3-2 定理(谱的闭性). Banach空间X上的有界线性算子的预解集$\rho(T)$为开集，即其谱$\sigma(T)$为闭集.

证明：若$\rho(T)=\phi$定理得证.

设$\rho(T)\neq\phi$，对固定$\lambda_0\in\rho(T)$与任一$\lambda\in C$，有

$$T-\lambda I=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I$$
$$=(T-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}]$$

令$V=[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}]=I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}$，则上式可写成

$$T_\lambda=T_{\lambda_0}V \quad (4)$$

由$\lambda_0\in\rho(T)$且T有界由6.2-3引理(b)知$R_{\lambda_0}=T_{\lambda_0}^{-1}\in B(X,X)$对于所有的$\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$，即

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \quad (5)$$

的λ，由定理6.3-1知V在$B(X, X)$中有一逆

$$V^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^j=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \quad (6)$$

再由$T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X, X)$，由(4)式对满足(5)的$\lambda$，算子$T_\lambda$存在逆算子

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0} \quad (7)$$

所以(5)式表示T的正则值λ集为λ_0一邻域，由$\lambda_0\in\rho(T)$为任意则$\rho(T)$为开集，其余集$\sigma(T)=C-\rho(T)$为闭集

从上述证明中，还可以得到用λ的幂级数来表示预解式

这一重要结果．事实上从(5)、(6)、(7)式可直接得出下面基本表示式：

6.3-3　**表示定理(预解式)**．对于6.3-2的X与T，及每一$\lambda_0\in\rho(T)$，预解式$R_\lambda(T)$可表示为

$$R_\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}{}^{j+1}$$

该级数对于复平面上满足$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$的开圆盘中的$\lambda$绝对收敛，且此圆盘为$\rho(T)$的子集．

从6.3-1定理可以得到下面的重要结论：有界线性算子的谱在复平面上为有界集，精确表叙如下：

6.3-4　**定理(谱)**复的Banach空间X上的有界线性算子T的谱$\sigma(T)$为圆盘

$$|\lambda|\leqq\|T\| \tag{8}$$

上的紧集（从而$\rho(T)\neq\phi$）

证明：设$\lambda\neq 0$且$k=1/\lambda$，由定理6.3-1得．

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}(I-kT)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(kT)^j=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j \tag{9}$$

级数对于满足

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|=\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1 \quad 即 \quad |\lambda|>\|T\|$$

所有λ收敛且$\lambda\in\rho(T)$，因此谱$\sigma(T)=C-\rho(T)$必在圆盘(8)中，故$\sigma(T)$有界，再由6.3-2知$\sigma(T)$为闭集故其为紧

集.

从上面定理知该谱有界，自然会考虑包含整个谱的最小圆盘问题，为此引出下述概念：

6.3-5 **定义（谱半径）**．复Banach空间X的算子$T\in B(X,X)$的谱半径$r_\sigma(T)$为在复λ-平面上以原点为中心的包含$\sigma(T)$之最小圆盘的半径，即

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

又从(8)式得知

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$$

利用解析函数性质还可以进一步证明：

$$\sigma(T)\neq\varnothing$$

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$$

习 题 6.3

1．设$X=C[0,1]$，并依$Tx=Vx$($V\in X$且固定）定义T，求$\sigma(T)$．(注意$\sigma(T)$为闭)

2．求一线性算子$T:C[0,1]\to C[0,1]$其谱为给定的区间$[a,b]$

3．若Y为对应于算子T的特征值λ的特征空间，$T|Y$的谱是什么？

4．设$T:l^2\to l^2$定义为$y=Tx$，$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$ $\eta_j=\alpha_j\xi_j$，其中$\{\alpha_j\}$在[0,1]中稠密．试求$\sigma_p(T)$及$\sigma(T)$

5．在习题4中若$\lambda\in\sigma(T)-\sigma_p(T)$证明$R_\lambda(T)$无界．

6．扩充习题4，求一线性算子$T:l^2\to l^2$，其特征值在给定紧集$K\subset C$为稠密且$\sigma(T)=K$

7．若$T\in B(X,X)$证明当$\lambda\to\infty$时$\|R_\lambda(T)\|\to 0$

8．设$X=C[0,\pi]$并定义$T:D(T)\to X$为$x\mapsto x''$，其中：

$D(T)=\{x\in X \mid x', x''\in X, x(0)=x(\pi)=0\}$
证明$\sigma(t)$不是紧集.

9. 设$T: l^\infty \to l^\infty$定义为$x \mapsto (\xi_2, \xi_3, \cdots)$其中$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$

(a) 若$|\lambda|>1$ 证明：$\lambda \in \rho(T)$

(b) 若$|\lambda|\leqslant 1$ 证明：λ为一特征值，并求对应特征空间Y.

10. 设$T: l^p \to l^p$定义为$x \mapsto (\xi_2, \xi_3, \cdots)$ 其中$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$且$1\leqslant p<+\infty$，若$|\lambda|=1$（如习题9）其为T的特征值吗？

§6.4 预解式与谱的其他性质

下面的几个定理进一步给出预解式和谱的重要和基本性质.

6.4-1 定理（预解方程，交换性）. 设X为一复的Banach空间，$T\in B(X,X)$且λ，$\mu \in \rho(T)$，则

(a) T的预解式R_λ满足下面预解方程或称为Hilbert关系式：

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda \tag{1}$$

(b) 若对任意$S\in B(X,X)$均能与T交换，则其亦能与R_λ交换.

(c) 下式成立

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \tag{2}$$

证明 (a) 由6.2-3知R_λ定义域为整个X空间，因此$T_\lambda R_\lambda = I$（恒等算子），同理$R_\mu T_\mu = I$

$$\begin{aligned}R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu)R_\lambda \\ &= R_\mu(T_\lambda - T_\mu)R_\lambda \\ &= R_\mu[T-\lambda I-(T-\mu I)]R_\lambda \\ &= (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda\end{aligned}$$

(b) 由假设$ST=TS$ 因而$ST_\lambda=T_\lambda S$利用$T_\lambda R_\lambda=R_\lambda T_\mu=I$得

$$R_\lambda S=R_\lambda ST_\lambda R_\lambda=R_\lambda T_\lambda SR_\lambda=SR_\lambda$$

(c) 在(b)中第一次令$S=T$，再令$S=R_\lambda$得

$$R_\lambda R_\mu=R_\mu R_\lambda$$

下一个结果是重要的谱映射定理，其可以从矩阵特征值定理中得到启示：

若λ为方阵A之特征值，则存在$x\neq 0$使$Ax=\lambda x$，将A作用其上得

$$A^2x=A\lambda x=\lambda Ax=\lambda^2x$$

归纳证明对任意正整数m均有

$$A^m x=\lambda^m x$$

即λ若为A的一特征值，则λ^m为A^m的一特征值．更可一般地得到

$$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0$$

为方阵

$$p(A)=\alpha_nA^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha_0I$$

的一特征值．我们可将此性质推广到任意维Banach空间中去，为证明方便起见，引用下列符号

$$p(\sigma(T))=\{\mu\in C\mid \mu=p(\lambda),\ \lambda\in\sigma(T)\} \tag{3}$$

即$p(\sigma(T))$为对于谱值$\lambda\in\sigma(T)$上的多项式$p(\lambda)$所有复数之集．同样$p[\rho(T)]$也有类似的意义．

6.4-2 谱的多项式映射定理．设X为一复Banach空间，$T\in B(X,X)$且

$$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0 \qquad (\alpha_n\neq 0)$$

则 $$\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$$

即：算子

$$p(T)=\alpha_n T^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}+\cdots+\alpha_0 I$$

的谱值$\sigma(p(T))$为值$\sigma(T)$上的多项式$p(\sigma(T))$所有复数之集

证明：假设$\sigma(T)\neq\phi$　（见6.3-5）

当$n=0$时$p(\sigma(T))=\{\alpha_0\}=\sigma(p(T))$命题成立

$n>0$　(a)先证

$$\sigma(p(T))\subset p(\sigma(T)) \tag{4}$$

令$S=p(T)$　则

$$S_\mu=p(T)-\mu I \qquad (\mu\in C)$$

若S_μ^{-1}存在则其应为$p(T)$的预解算子，现将μ固定，由于X为复的，多项式$S_\mu(\lambda)=p(\lambda)-\mu$可分解为$n$个一次因式：

$$S_\mu(\lambda)=p(\lambda)-\mu=\alpha_n(\lambda-r_1)(\lambda-r_2)\cdots(\lambda-r_n) \tag{5}$$

其中$r_1,r_2,\cdots r_n$为$S_\mu(\lambda)$的根. 对应的算子为

$$S_\mu=p(T)-\mu I=\alpha_n(T-r_1I)(T-r_2I)\cdots(T-r_nI)$$

若每一r_j在$\rho(T)$中，由定理6.2-3每一$(T-r_jI)$存在定义在整个空间X上的有界逆算子，且

$$S_\mu^{-1}=\frac{1}{\alpha_n}(T-r_nI)^{-1}(T-r_{n-1}I)^{-1}\cdots(T-r_1I)^{-1}$$

故$\mu\in\rho(p(T))$其等价于

$$\mu\in\sigma(p(T))\Longrightarrow 存在r_j\in\sigma(T)$$

由(5) 得

$$S_\mu(r_j)=p(r_j)-\mu=0$$

因此

$$\mu = p(r_i) \in p(\sigma(T))$$

由$\mu \in \sigma(p(T))$为任意则(4a)得证

(b) 再证

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)) \tag{6}$$

即 $K \in p(\sigma(T)) \Longrightarrow K \in \sigma(p(T))$

令$K p(\sigma(T))$由定义存在一谱值$\beta \in \sigma(T)$ $\quad K = p(\beta)$

下面分作两种情况讨论

(A) $T - \beta I$ 不存在逆算子

从$K = p(\beta)$得$p(\beta) - K = 0$ 则β为多项式

$$S_k(\lambda) = p(\lambda) - K$$

的一根，故

$$S_k(\lambda) = p(\lambda) - K = (\lambda - \beta) g(\lambda)$$

其中$g(\lambda)$可以表示为α_n与其他$n-1$个一次因子的乘积. 其所对应的算子为

$$S_k = p(T) - KI = (T - \beta I) g(T) \tag{7}$$

由于$g(T)$的所有因子均可与$T - \beta I$交换，则可得到

$$S_k = g(T)(T - \beta I) \tag{8}$$

假如S_k存在逆算子，由(7)、(8)可推得

$$I = (T - \beta I) g(T) S_k^{-1} = S_k^{-1} g(T)(T - \beta I)$$

这说明 $T - \beta I$存在逆算子，与假设矛盾. 因此，对于K，$p(T)$不存在预解式S_k^{-1}，故$K \in \sigma(p(T))$由$K \in p(\sigma(T))$为任意，命题在$T - \beta I$不存在逆的情况下成立

(B) $T - \beta I$ 存在逆算子

设$\beta \in \sigma(T)$，$k = p(\beta)$由 $(T - \beta I)^{-1}$存在，则$T - \beta I$的值域

$$R(T - \beta I) \neq X \tag{9}$$

否则，将 4.11-3 有界逆算子定理应用于算子 $T - \beta I$ 得

$\beta\in p(T)$这与假设$\beta\in\sigma(T)$矛盾

再由(7) 与(9) 知

$$R(s_k)\neq X$$

这意味着$k\in\sigma[p(T)]$，不然的话则$k\in\rho(p(T))$、应用6.2-3引理(b)于$p(T)$得$R(s_k)=X$矛盾.

由(A)、(B)则(b)得证. 联合(a)、(b)命题成立

最后研究特征向量的一基本性质

6.4-3 定理（线性无关性）. 在向量空间X上，对应线性算子T的不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$的特征向量$x_1,x_2,\cdots x_n$，组成一线性无关集.

证明：先假设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$线性相关，然后导出矛盾. 令x_m为第一个可由前面几个向量线性表出的向量 即

$$x_m=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1} \tag{10}$$

且$\{x_1,\cdots,x_{m-1}\}$为线性无关的. 对(10)的两边施以$T-\lambda_mI$得

$$(T-\lambda_mI)x_m=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j(T-\lambda_mI)x_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j(\lambda_j-\lambda_m)x_j$$

由x_m为对应λ_m的特征向量，上式左端应为零. 再由$x_1,\cdots,x_{m-1}$的线性无关假设得

$\alpha_j(\lambda_j-\lambda_m)=0$, 但$\lambda_j\neq\lambda_m(j=1,2,\cdots,m-1)$因而$\alpha_j=0$，由(10)得$x_m=0$ 与x_m为特征向量矛盾，命题得证.

习 题 6.4

1. 不用(1) 或6.4-(b) 来直接证明(2)
2. 从(1) 导出(2)
3. 若$S,T\in B(X,X)$，证明对任意$\lambda\in\rho(S)\cap\rho(T)$

$$R_\lambda(s)-R_\lambda(T)=R_\lambda(s)(T-s)R_\lambda(T)$$

4．设X为复Banach空间，$T\in B(X,X)$，且p为一多项式，证明方程

$$p(T)x=y \qquad (x,y\in X)$$

对每一$y\in X$有唯一解x的充分必要条件是：对所有$\lambda\in\sigma(T)$ $p(\lambda)\neq 0$

5．在定理6.4-2中，为什么空间X必需为复的？

6．用定理6.4-3，求n阶方程存在n个能张成全空间C^n（或R^n）的特征向量的充分条件．

7．证明，复Banach空间X上任一算子

$T\in B(X,X)$ 有

$$r_\sigma(\alpha T)=|\alpha|r_\sigma(T), \qquad r_\sigma(T^k)=[r_\sigma(T)]^k \qquad (k\in N)$$

其中r_σ表示谱半径

8．确定下述矩阵的特征值(a)通过直接计算．

(b)通过证明$A^2=I$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

9．（幂等算子） 设T为Banach空间上有界线性算子，若$T^2=T$ 称T为幂等的．试举一例并证明若$T\neq 0$且$\neq I$则其谱为$\sigma(T)=\{0,1\}$．

(a)通过6.3节(9)式证明

(b)通过6.4-2定理证明

10．证明矩阵

$$T_B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

表示一关于标准化直交基B的等幂算子

T: $R^3 \to R^3$

(*a*) 利用习题9证明$\sigma(T) = \{0,1\}$

(*b*) 直接计算

并求其特征向量与特征空间.

§6.5 Banach 代 数

值得考虑的是，谱的存在也与Banach代数有关. 所谓Banach代数其既为Banach空间同时又是一代数. 并且在此两概念中有一个“相容关系”. 下面我们先从有关的概念开始介绍.

一数域K上的代数A为K上的向量空间，且在其上定义了乘法，即对于A中任一对有序元素x，$y \in A$，存在唯一元素$xy \in A$. 并满足下列运算性质：

对所有$\alpha \in K$及x、y、$z \in A$有，

$$(xy)z = x(yz) \tag{1}$$

$$x(y+z) = xy + xz \tag{2a}$$

$$(x+y)z = xz + yz \tag{2b}$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \tag{3}$$

若$K = R$或C，则A称为实的或复的代数.

若A中的乘法是交换的，即对于任何x，$y \in A$，有

$$xy = yx \tag{4}$$

则称A为交换（或*Abel*）代数.

若A中含一元素e使得对所有$x \in A$有，

$$ex = xe = x \tag{5}$$

称e为A的单位元素. 并称A为有单位元素的代数. 若A有单位元素，则其是唯一的. 事实上，若e与e'均为A的单位元

素．则，

$$ee' = e \qquad (e'\text{是单位元素})$$

$$ee' = e' \qquad (e\text{是单位元素})$$

即 $e = e'$

6.5-1 **定义（赋范代数，Banach代数）**．赋范代数A为一赋范空间又是一代数且对于所有的
$x, y \in A$有，

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \tag{6}$$

若A含单位元素e时设其范数$\|e\| = 1$．
Banach代数为一赋范代数，将其看作赋范空间时它还是完备的．

注意(6) 式为乘法和范数联系关系．并且从

$$\|xy - x_0y_0\| = \|x(y - y_0) + (x - x_0)y_0\|$$

$$\leqslant \|x\| \, \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \, \|y_0\|$$

看出，乘积为其因子的二元连续函数．

从下面诸例可以看出，很多常见的空间都是Banach代数．

例：

6.5-2 **空间R与C**．实直线R与复平面C为具有单位元素$e = 1$的交换Banach代数．

6.5-3 **空间$C[a, b]$**．乘积按通常定义：

$$(xy)(t) = x(t)y(t) \qquad t \in [a, b]$$

其为具有单位元素($e = 1$)的交换Banach代数，关系式(6)不难验证成立

由一切多项式构成的$C[a, b]$子空间是一含单位元素($e = 1$)的交换赋范代数．

6.5-4 **矩阵**. 所有复$n\times n$矩阵（$n>1$且固定）组成的向量空间X是具有单位元素I（n阶单位矩阵）的不可交换代数，且通过在X上定义一范数（见2.7节习题8），可得到Banach代数.

6.5-5 **空间$B(X,X)$**. 复Banach空间$X\neq\{\theta\}$上的一切有界线性算子组成的Banach空间$B(X,X)$其中乘法定义为算子的合成，关系式(6)是

$$\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\|T_2\|$$

故其为含单位元素I（X上的恒等算子）的Banach代数，除了$\dim X=1$，$B(X,X)$均为不可交换的.

设A为具有单位元素的代数，$x\in A$若存在$x^{-1}\in A$，使得

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e$$

称x^{-1}为x的逆并称x为可逆的.

若x为可逆的，则其逆是唯一的. 事实上，由$yx=e=xz$得

$$y=ye=y(xz)=(yx)z=ez=z.$$

用上述概念，可表达下列定义.

6.5-6 **定义(预解集、谱)**. 设A为一具有单位元素的Banach代数，$x\in A$的预解集$\rho(x)$为使$x-\lambda e$为可逆的所有复数λ所成之集. x的谱$\sigma(x)$为$\rho(x)$在复平面上的余集$\sigma(x)=C-\rho(x)$，任一$\lambda\in\sigma(x)$称为x的谱值.

因此：$x\in A$的谱值是复数λ其使$x-\lambda e$不存在逆.

自然会考虑这样一个问题，若X为复的Banach空间，则$B(X,X)$为一Banach代数，上述6.5-6定义可以使用，但其是否与前边的6.2-1定义相一致？下面的结果证明确系如此.

设$T\in B(X, X)$且λ依6.5-6定义属于预解集$\rho(T)$因而$R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在且$R_\lambda(T)\in B(X, X)$，即$R_\lambda(T)$为定义在$X$上的有界线性算子则$\lambda\in\rho(T)$，其中$\rho(T)$是由6.2-1定义的.

反之，设$\lambda\in\rho(T)$，其中$\rho(T)$由6.2-1定义，则$R_\lambda(T)$存在且为线性、有界并定义在X一稠密子集上. 由引理6.2-3(b)推得$R_\lambda(T)$定义在全空间上，因此$\lambda\in\rho(T)$，其中$\rho(T)$是由6.5-6定义的.

故6.2-1与6.5-6所定义的预解集和谱是一致的.

习 题 6.5

1. 例6.5-4中X为什么是完备的?

2. 证明例6.5-3中的(6)式成立.

3. 怎样使n个复数有序组构成的向量空间成为一Banach代数?

4. (a) 6.5-2, (b) 6.5-3 (c) 6.5-4
中的可逆元素各是什么?

5. 证明6.5-4中X元素的谱其按6.5-6定义与按6.1-1定义相一致.

6. 求$x\in C[a, b]$的$\sigma(x)$其中$x(t)=\sin t$
对任意$x\in C[a, b]$求出$\sigma(x)$.

7. 证明一向量空间到自身的所有线性算子所成之集构成一代数

8. 设A为含单位元素的复Banach代数，若对于$x\in A$存在y, $z\in A$，且$yx=e$，$xz=e$，试证x为可逆的且$y=z=x^{-1}$.

9. 若$x\in A$为可逆且与$y\in A$可交换，试证x^{-1}与y亦可交换.

10. 代数A的子集A_1，若将各运算作用于A_1中的元素结果仍在A_1中时，称A_1为A的子代数. 与A中所有元素均能交换的元素所成集C称为A的中心，试给出实例. 并证明C是A的一可交换的子代数.

§6.6 Banach代数的进一步性质

这一章要说明这样一重要事实，就是本章前几节的某些结果可以推广到Banach代数中去.

6.6-1 定理(逆). 设A为含有单位元素e的复Banach代数，若$x\in A$且$\|x\|<1$，则$e-x$为可逆的且

$$(e-x)^{-1}=e+\sum_{i=1}^{\infty}x^i, \tag{1}$$

证明：由上节(6)式得$\|x^i\|\leqslant\|x\|^i$，又因$\|x\|<1$所以级数(1)绝对收敛，再由A是完备的知其收敛. 令S为其和，今证$S=(e-x)^{-1}$

$$\begin{aligned}&(e-x)(e+x+\cdots+x^n)\\=&(e+x+\cdots+x^n)(e-x)=e-x^{n+1}\end{aligned} \tag{2}$$

令$n\to\infty$，由$\|x\|<1$则$x^{n+1}\to 0$，且A中乘法是连续的，故由(2)式得

$$(e-x)S=S(e-x)=e$$

即$S=(e-x)^{-1}$定理得证

若给定一含单位元素e的复Banach代数A，考虑A中所有可逆元素构成的子集G，其所以用G表示，因为其为一群(参看附录1的A.18)

事实上，$e\in G$，若$x\in G$由$(x^{-1})^{-1}=x\in G$知$x^{-1}\in G$又若x、$y\in G$由

$$(xy)(y^{-1}x^{-1})=e=(y^{-1}x^{-1})(xy),$$

知$y^{-1}x^{-1}=(xy)^{-1}$即$xy\in G$.

下面证明G为开集

6.6-2 定理(可逆元素). 设A为一具有单位元素的复

Banach代数，则A之所有可逆元素之集G为A的开子集，即所有不可逆元素之集$M=A-G$为A闭子集.

证明：若$x_0\in G$，则$\|x_0^{-1}\|\neq 0$，今证明对于$x\in A$且满足

$$\|x-x_0\|<\frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$$

之x均在G中.

令$z=e-x_0^{-1}x$　则

$$\|z\|=\|-z\|=\|x_0^{-1}x-x_0^{-1}x_0\|$$
$$=\|x_0^{-1}(x-x_0)\|\leqslant\|x_0^{-1}\|\,\|x-x_0\|<1$$

由6.6-1定理知$e-z=x_0^{-1}x\in G$，又由G为一群故

$$x_0(x_0^{-1}x)=x\in G$$

由x的任意性证得G为开集其余集M为闭集

参照6.5-6定义，$x\in A$的谱半径$r_\sigma(x)$定为

$$r_\sigma(x)=\operatorname*{Sup}_{\lambda\in\sigma(x)}|\lambda| \tag{3}$$

6.6-3　**定理（谱）**. 设A为含单位元素e的复Banach代数，则对于任意$x\in A$，其谱$\sigma(x)$为紧的且其谱半径满足

$$r_\sigma(x)\leqslant\|x\| \tag{4}$$

证明：若$|\lambda|>\|x\|$　则　$\|\lambda^{-1}x\|<1$，根据6.6-1 $e-\lambda^{-1}x$为可逆的，故$-\lambda(e-\lambda^{-1}x)=x-\lambda e$亦为可逆的，即$\lambda\in\rho(x)$，(4)式得证. 且$\sigma(x)$为有界.

若$\lambda_0\in\rho(x)$则$x-\lambda_0 e$由定义知其可逆，根据6.6-2存在$x-\lambda_0 e$为中心一邻域$N\subset A$，其中全为可逆元素. 现对固定的x映射$\lambda\longmapsto x-\lambda e$为连续的，当$\lambda$充分接近$\lambda_0$时，如$|\lambda-\lambda_0|<\delta$其中$\delta>0$相应的$x-\lambda e\in N$，由这些$x-\lambda e$可逆，故$\lambda\in\rho(x)$. 由于$\lambda_0\in\rho(x)$的任意性可知$\rho(x)$为开集，

$\sigma(x)=C-\rho(x)$为闭集.

上述定理也证明了$\rho(x)\neq\phi$，利用解析函数知识还可以证明：在同样假设条件下$\sigma(x)\neq\phi$

在以往的讨论中，单位元素e的存在是必不可少的，在许多应用中的A确具有单位元素，但也要提一下在不存在单位元素时该怎么办？下面是对A提供一单位元素的典型方式

令$\widetilde{A}$为一切有序对(x,α)所成之集，其中$x\in A$，α为数量、并定义

$$(x,\ \alpha)+(y,\ \beta)=(x+y,\ \alpha+\beta)$$
$$\beta(x,\ \alpha)=(\beta x,\ \beta\alpha)$$
$$(x,\ \alpha)(y,\ \beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\ \alpha\beta)$$
$$\|(x,\ \alpha)\|=\|x\|+|\alpha|$$
$$\widetilde{e}=(0,1)$$

则$\widetilde{A}$为一具有单位元素$\widetilde{e}$的Banach代数，事实上6.5节的(1)，(2)，(3)，(6)与(7)很容易验证，$\widetilde{A}$的完备性可从A与C完备中得出.

此外，当A与$\widetilde{A}$均看作作赋范空间时，映射$x\longmapsto(x,\ 0)$为A到$\widetilde{A}$一子空间的同构．该子空间的剩余维数为1．若将x与$(x,0)$看作一样的，则$\widetilde{A}$可简化为A再加上由$\widetilde{e}$生成的一维向量空间.

习 题 6.6

1. 若$\|x-e\|<1$，试证x为可逆的，且

$$x^{-1}=e+\sum_{j=1}^{\infty}(e-x)^{j}$$

2．在定理6.6-1中证明

$$\|(e-x)^{-1}-e-x\|\leqslant\frac{\|x\|^{2}}{1-\|x\|}$$

3．若x为可逆的且y满足$\|yx^{-1}\|<1$
对任意$a\in A$记$a^{0}=e$，试证$x-y$为可逆的且

$$(x-y)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}x^{-1}(yx^{-1})^{j}$$

4．试证一切形如

$$x=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

的复数阵所成之集为由二阶方阵集所成之代数的子代数，并求$\sigma(x)$

5．Banach代数A之元素x的谱$\sigma(x)$要依赖于A.试证明若B为A的子代数，则

$\tilde{\sigma}(x)\supset\sigma(x)$这里$\tilde{\sigma}(x)$为将$x$看作$B$之元素的谱．

6．设λ，$\mu\in\rho(x)$试证预解方程

$$v(\mu)-v(\lambda)=(\mu-\lambda)v(\mu)v(\lambda)$$

成立，其中$v(x)=(x-\lambda e)^{-1}$

7．可除代数为一含有单位元素的代数且对每一非零元素均为可逆的．

若复Banach代数A为可除代数，试证A为单位元素与所有数量乘积所成之集．

8．设G是6.6-2所定义的，试证由

$x\to x^{-1}$确定的映射$G\to G$为连续的．

9．$x\in A$的左逆元素为$y\in A$，即$yx=e$，类似地若$xz=e$　则z为x一右逆元素．若一代数A的每一元素$x\neq0$均有左逆，试证A为一

可除代数

10. 若(x_n)与(y_n)为一赋范代数A中的Cauchy序列，试证$(x_n y_n)$亦为A中的Cauchy序列.此外，若$x_n \to x$和$y_n \to x$.证明$x_n y_n \to xy$.

第七章 赋范空间上的紧线性算子及其谱

紧线性算子有很重要的应用，其在积分方程及众多数学物理问题中均起关键作用，而其性质又近似于有限维空间上的算子. 对于紧线性算子的谱论，可视为线性积分方程中著名的Fredholm理论到含复参数λ的线性泛函方程$Tx-\lambda x=y$上的推广，其一般化即所谓的Riesz-Schauder理论.

重要概念、主要内容的概述

线性算子的紧性（定义7.1-1)其由积分方程抽象而得，且为Fredholm理论中所必需的性质. 在7.1和7.2节中将讨论紧线性算子一般的、重要的性质，7.3和7.4节为其谱的性质，基于此建立了Riesz-Schauder理论. 7.5-7.7节研究有界算子方程的一些结果，并包括其在积分方程上的应用.

§7.1 赋范空间上紧线性算子

紧线性算子定义如下：

7.1-1 定义(紧线性算子). 设X与Y为赋范空间，算子$T: X\to Y$称为紧线性算子（或全连续线性算子）若T为线性的且对X的每一有界子集M，其象$T(M)$为相对紧的（即其闭包$\overline{T(M)}$为紧的）

在分析中很多线性算子是紧的，紧线性算子类的理论是由下列积分方程中引出．

$$(T-\lambda I)x(s)=y(s) \text{ 其中}$$

$$Tx(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt \tag{1}$$

其中$\lambda\in C$为一参数（假定$\lambda\neq 0$则(1)式称为第二类的，若$\lambda=0$称为第一类的，对应这二类的理论有很大差别）y与核K为给定的函数（满足一定的条件），x为未知函数．这类方程在常、偏微分方程中均有一定的位置．D. Hilbert(1912)发现一个使人惊异的事实：关于(1)式的可解性的基本结论（“Fredholm理论”）是：并不依赖于(1)式中T的积分表示式的存在而仅依赖于(1)式中T假设为“紧”线性算子．

术语“紧”是由定义中引出的．旧的辞“全连续”可从下述引理结果中得出，其证明了一紧线性算子必为连续，但反之一般并不成立．

7.1-2 引理(连续性)．设X与Y为赋范空间．则：

(a) 每一紧线性算子$T:X\to Y$为有界的，因而连续．

(b) 若$\dim X=\infty$恒等算子$I:X\to X$（其为连续）不是紧的．

证明 (a) 单位球面$U=\{x\in X\mid \|x\|=1\}$为有界，由T为紧的，则$\overline{T(U)}$为紧集，由2.5-2知其为有界，故

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|<\infty$$

因此T为有界再由定理2.7-10知其为连续．

(b) 闭单位球$M=\{x\in X\mid \|x\|\leqslant 1\}$为有界，若$\dim X=\infty$，由2.5-5知$M$不为紧集，因此$I(M)=M=\overline{M}$不

是相对紧的.

由集的紧性定义，不难得到下面判定算子紧性的规则.

7.1-3 定理(紧性判定准则). 设X与Y为赋范空间且$T:X\to Y$为一线性算子，则T为紧的充分且必要条件是：其将X中的每一有界序列(x_n)映射到Y中的序列(Tx_n)均含有一收敛的子序列.

证明 若T为紧的且(x_n)为有界则Y中的(Tx_n)的闭包是紧的，并由定义2.5-1知(Tx_n)包含一收敛的子序列.

反之，设每一有界序列(x_n)包括一子序列(x_{n_k})使得(Tx_{n_k})在Y中收敛. 今考察任一有界子集$B\subset X$，且设(y_n)为$T(B)$中任一序列，则有某一$x_n\in B$，$y_n=Tx_n$，由B为有界知(x_n)为有界. 由假设(Tx_n)包含一收敛的子序列，根据定义2.5-1及$\{y_n\}$在$T(B)$中为任意知$\overline{T(B)}$为紧的，故T满足紧算子的定义条件.

根据此定理可以得到两紧线性算子$T_j:X\to Y$的和T_1+T_2是紧的（参考习题2）类似地，若α为任一数量则αT_1为紧的. 故有下述结论：

从X射到Y的紧线性算子形成一向量空间.

此外，紧性判定准则在有限维情况下可得到更简单的结果.

7.1-4 定理(定义域或值域为有限维). 设X与Y为赋范空间且T: $X\to Y$为一线性算子，则，

(a) 若T有界且$\dim T(X)<\infty$，则算子T为紧的.

(b) 若$\dim X<\infty$，则算子T是紧的，

证明 (a) 设(x_n)为X中任意有界序列，则由$\|Tx_n\|\leqslant$

$\|T\|\|x_n\|$得知(Tx_n)为有界，因$\dim T(X)<\infty$再根据2.5-3知(Tx_n)为相对紧，由此得(Tx_n)有一收敛的子序列．因(x_n)为X中任意有界序列，由定义7.1-3知算子T为紧的．

(b) 由2.7-8知$\dim X<\infty$推得T为有界．再由2.6-9(b)知$\dim T(X)\leqslant\dim X$，再由(a)得证．

我们常称一算子$T\in B(X, Y)$且$\dim T(X)<\infty$为有限秩算子．

下述定理说明在什么条件下一紧线性算子序列的极限仍为紧的．其重要性在于：为证明给定算子为紧的，定理可提供一方法是：将其表示为一致紧线性算子序列的极限．

7.1-5 定理(紧线性算子序列)．令(T_n)为一从赋范空间X到Banach空间Y的紧线性算子的序列．若(T_n)为一致算子收敛，即$\|T_n-T\|\to 0$（参看4.8节）则其极限算子T为紧的．

证明　利用"对角线法"证明对X中任意有界序列(x_m)其象(Tx_m)存在一收敛的子序列，然后再应用定理7.1-3.

由T_1为紧的，(x_m)存在一子序列$(x_{1,m})$使得$(T_1x_{1,m})$为Cauchy序列，类似地$(x_{1,m})$存在一子序列$(x_{2,m})$使得$(T_2x_{2,m})$为Cauchy序列，继续下去．可以看到"对角线序列"$(y_m)=(x_{m,m})$为(x_m)的一子序列，且对于任意固定的正整数n序列$(T_ny_m)_{m\in N}$为Cauchy序列．由(x_m)为有界即对所有的m，$\|x_m\|\leqslant C$．因此$\|y_m\|\leqslant C$，令$\varepsilon>0$，由$T_n\to T$故存在一$n=p$使得$\|T-T_p\|<\varepsilon/3C$．又$(T_py_m)_{m\in N}$为Cauchy序列，则存在一N使得

$$\|T_py_j-T_py_k\|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(j,k>N)$$

因此对于j，$k>N$均有

$$\|Ty_j-Ty_k\|\leqslant\|Ty_j-T_py_j\|+\|T_py_j-T_py_k\|+\|T_py_k-Ty_k\|$$

$$\leqslant\|T-T_p\|\ \|y_j\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T_p-T\|\ \|y_k\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c=\varepsilon.$$

这就证明(Ty_m)为Cauchy序列，由Y的完备性知其收敛.注意到(y_m)为任意有界序列的子序列，根据7.1-3定理推得算子T为紧的.

注意上述定理条件若用强算子收敛$\|T_nx-Tx\|\to 0$代替一致算子收敛则命题不成立. 这可由下例看出. T_n: $l^2\to l^2$由$T_nx=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$定义，其中$x=(\xi_j)\in l^2$因为$T_n$为线性、有界，由7.1-4(a)知$T_n$为紧的，显然$T_nx\to x=Ix$，但$I$由于$\dim l^2=\infty$知其为非紧的.

下面例子说明如何使用上述定理来证明一给定算子为紧的.

7.1-6 **例(空间l^2)**. 证明$T:l^2\to l^2$由$y=(\eta_j)=Tx$定义(其中$x=(\xi_j)\in l^2$ $\eta_j=\xi_j/j$ $j=1,\ 2,\ \cdots$) 为紧的.

解：T为线性. $x=(\xi_j)\in l^2$显然$y=(\eta_j)\in l^2$. 令T_n: $l^2\to l^2$定义如下：

$$T_nx=\left(\frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{3}\cdots,\ \frac{\xi_n}{n},\ 0,\ 0,\cdots\right)$$

T_n为线性且有界，由7.1-4(a)知其为紧的，且

$$\|(T-T_n)x\|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}|\eta_j|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}|\xi_j|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^2\leqslant\frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}$$

取所有范数为1的x的上确界得：

$$\|T-T_n\|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

因此$T_n\to T$．且由定理7.1-5知T为紧的．

有关紧线性算子其他重要基本性质为：其将弱收敛序列转化为强收敛序列，结果如下：

7.1-7定理（弱收敛）．设X与Y为赋范空间，且$T:X\to Y$为一紧线性算子，设(x_n)在X中为弱收敛，即$x_n\xrightarrow{w}x$．则(Tx_n)在Y中为强收敛且具有极限$y=Tx$．

证明：设$y_n=Tx_n$和$y=Tx$，首先证明

$$y_n\xrightarrow{w}y. \tag{2}$$

再证明

$$y_n\longrightarrow y \tag{3}$$

令g为Y上任意有界线性泛函．现定义X上一泛函f为

$$f(z)=g(Tz) \qquad (z\in X)$$

f为线性．由T为紧的则其为有界故f为有界且

$$|f(z)|=|g(Tz)|\leqslant\|g\|\|Tz\|\leqslant\|g\|\|T\|\|z\|.$$

由定义$x_n\xrightarrow{w}x$蕴涵$f(x_n)\to f(x)$，因此$g(Tx_n)\to g(Tx)$即，$g(y_n)\to g(y)$因g为任意，(2)得证．

现证(3)．设(3)式不成立，则(y_n)存在一子序列(y_{n_k})

使得对某个$\eta > 0$

$$\|y_{n_k} - y\| \geqslant \eta \tag{4}$$

由(x_n)为弱收敛，由4.7-3(c) 知(y_n)为有界，因而(x_{n_k})亦有界，根据7.1-3T的紧性蕴涵(Tx_{n_k})存在一收敛的子序列，如$(\tilde{y}_j)$，设$\tilde{y}_j \to \tilde{y}$.

$\tilde{y}_j \xrightarrow{w} \tilde{y}$ 由(2) 及4.7-3(b)知$\tilde{y} = y$.

因此

$$\|\tilde{y}_j - y\| \to 0$$

但由(4)　$\|\tilde{y}_j - y\| \geqslant \eta > 0$ 矛盾. 则(3) 式必成立

习 题 7.1

1. 证明：任意赋范空间上的零算子为紧的.

2. 若T_1与T_2为从一赋范空间X到一赋范空间Y的紧线性算子，证明$T_1 + T_2$为紧线性算子. 再证明从X到Y的紧线性算子构成$B(X, Y)$的子空间$C(X, Y)$

3. 若Y为Banach空间，证明习题2中的$C(X, Y)$为$B(X, Y)$的闭子集.

4. 若Y为Banach空间，证明习题2中的$C(X, Y)$为一 Banach空间.

5. 在课文已经证得，定理7.1-5中的一致算子收敛条件若用强算子收敛条件代替时，命题不成立. 证明：该反例中的算子T_n为有界.

6. 有意义的是：在7.1-5中的条件能减弱但并不影响紧线性算子的概念. 为此试证明：一线性算子$T: X \to Y$ (X, Y为赋范空间)为紧的充分必要条件是：单位球$M \subset X$的象$T(M)$在Y中为相对紧的.

7. 证明：一线性算子 $T: X \to X$为紧的充分必要条件是对每一个范数不超过1的向量序列其象(Tx_n)序列有收敛的子序列.

8. 若z为赋范空间X中一固定元素且$f\in X^*$，证明：由$Tx = f(x)z$定义的算子$T: X\to X$为紧的.

9. 若X为一内积空间，证明：对固定的y与z由$Tx=\langle x, y\rangle z$定义的算子T为X上的紧线性算子.

10. 设Y为一Banach空间，且$T_n: X\to Y$，$n=1, 2, \cdots$，为有限秩算子.若(T_n)为一致算子收敛，证明其极限算子为紧的.

11. 证明：Hilbert空间H到H的一有限维子空间上的投影算子为紧的.

12. 证明：$T: l^2\to l^2$其由$Tx=y=(\eta_j)$，$x=(\xi_j)$，$\eta_j=\xi_j/2^j$定义为紧的.

13. 证明：$T: l^p\to l^p$，$1\leqslant p<+\infty$，其由$Tx=y=(\eta_j)$，$x=(\xi_j)$ $\eta_j=\xi_j/j$定义为紧的.

14. 证明$T: l^\infty\to l^\infty$其由$Tx=y=(\eta_j)$，$x=(\xi_j)$，$\eta_j=\xi_j/j$定义，为紧的.

15. （连续映射）设$T: X\to Y$为度量空间X到度量空间Y的连续映射，证明相对紧集$A\subset X$的象为Y中的相对紧集.

§7.2 紧线性算子的进一步性质

在这一节我们证明在赋范空间上的紧线性算子的值域为可分的，并且其伴随算子也是紧的，在下一节研究紧算子谱时要用到这些性质. 以上的讨论都基于以下与集的紧性相关的两个重要概念.

7.2-1 **定义**(ε-**网，全有界性**). 设B为一度量空间X的子集，给定$\varepsilon>0$，若存在集$M_\varepsilon\subset X$，使得对每一点$z\in B$，M_ε存在一点其到z的距离小于ε，则称M_ε为B的一个ε-网. 又若对每一$\varepsilon>0$，B都存在着有限ε-网（其中"有限"意味着M_ε为有限元素构成之集），则称B为全有界的.

因此，B的全有界性意味着：对每一$\varepsilon>0$，集B包含在有限多个半径为ε的开球的并之中.

从下面引理中可看出上述定义的重要意义，该引理还是本节各命题证明的关键.

7.2-2 引理(全有界性). 设B为一度量空间X的子集，则：

(a) 若B为相对紧的，则B是全有界的.

(b) 若B是全有界且X为完备则B是相对紧的.

(c) 若B是全有界则对于任一$\varepsilon>0$都相应存在一有限的ε-网$M_\varepsilon\subset B$.

(d) 若B为全有界则B是可分的.

证明：(a) 设B为相对紧的，任意给定$\varepsilon_0>0$，现证明B对应存在一有限ε_0-网. 若$B=\phi$则ϕ就是B的ε_0-网. 若$B\neq\phi$，取一$x_1\in B$，若对所有的$z\in B$ $d(x_1, z)<\varepsilon_0$，则$\{x_1\}$为B的一ε_0-网. 否则取一点$x_2\in B$且$d(x_1, x_2)<\varepsilon_0$，若对所有$z\in B$有

$$d(x_j, z)<\varepsilon_0 \qquad (j=1\text{或}2) \qquad (1)$$

则$\{x_1, x_2\}$为B的一ε_0-网. 否则存在$z=x_3\in B$不满足(1). 此时若对所有的$z\in B$,

$$d(x_j, z)<\varepsilon_0 \qquad (j=1, 2\text{或}3)$$

则$\{x_1, x_2, x_3\}$为B的一ε_0-网. 否则选取一$x_4\in B$，以此类推. 可以断定存在一正整数n，在n步后可使集$\{x_1, \cdots, x_n)\}$为B的一ε_0-网. 事实上，若不存在这样的n，则可构造一序列(x_j)使其满足

$$d(x_j, x_k)\geqslant\varepsilon_0 \qquad \text{对}j\neq k$$

显然，(x_j)不存在一Cauchy子序列，因而(x_j)不存在（在X

中)收敛的子序列，由(x_j)为B中序列．这与B的相对紧性相矛盾．故B必存在一有限的ε_0-网．由$\varepsilon_0>0$为任意，推得B为完全有界的．

(b) 设B为完全有界的且X为完备．考察B中任一序列(x_n)现证明其在X中有收敛的子序列，因而B为相对紧的．

由假设对$\varepsilon=1$，B有一ε-网，因此B包含在有限多个半径为1的开球的并集中，从这些球中取一球B_1，其包括(x_n)的无限多项(重复计数)，并设$(x_{1,n})$为(x_n)在B_1中的子序列．类似地B还可包含在半径为1/2的有限多个开球的并集中，从这些球中选取一球B_2其包含子序列$(x_{1,n})$的一子序列$(x_{2,n})$，连续递推，取$\varepsilon=1/3$，$1/4\cdots$并令$y_n=x_{n,n}$．则对于任意给定$\varepsilon>0$，存在一N(依赖于ε)使得对于$n>N$的y_n均在半径为ε球中．因此(y_n)为Cauchy序列，由X完备故其在X中收敛，如$y_n\to y\in X$，且$y_n\in B$这蕴涵着$y\in\overline{B}$．但还需证明下面结果，由闭包定义，对于$\overline{B}$的任一序列(z_n)相应在B中均存在一序列(x_n)，对每一n均满足$d(x_n,z_n)\leqslant\frac{1}{n}$，由$(x_n)$在$B$中，如上所证其存在一子序列在$\overline{B}$中收敛．再由$d(x_n,z_n)\leqslant\frac{1}{n}$，因而$(z_n)$在$\overline{B}$中同样有一收敛的子序列，则$\overline{B}$是紧的，即$B$是相对紧的．

(c) 在$B=\phi$时显然成立，设$B\neq\phi$由假设对任意给定的$\varepsilon>0$，B存在一有限的ε_1-网$M_{\varepsilon_1}\subset X$，其中$\varepsilon_1=\varepsilon/2$，因而$B$包含于有限多个以$M_{\varepsilon_1}$元素为中心半径为$\varepsilon_1$的开球的并集

中，设B_1，B_2，…B_n为与B相交的球，其中心各为x_1，…，x_n今选一点$z_j \in B \cap B_j$（参看图42）则$M_\varepsilon = \{z_1, \cdots, z_n\} \subset B$为$B$的一$\varepsilon$-网，因为对每一$z \in B$，存在一$B_j$包含$z$且

$$d(z, z_j) \leqslant d(z, x_j) + d(x_j, z_j) < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

(*d*) 设B为全有界，则由(*c*) B包含一个对自身的ε-网$M_{1/n}$，其中$\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n$，$n = 1, 2, \cdots$. 所有这些网的并$M$为可数集，且$M$在$B$中稠密．事实上，对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$n$使得$1/n < \varepsilon$，因此对任意$z \in B$存在$a \in M_{1/n} \subset M$，使得$d(z, a) < \varepsilon$. 这就证明了$B$为可分.

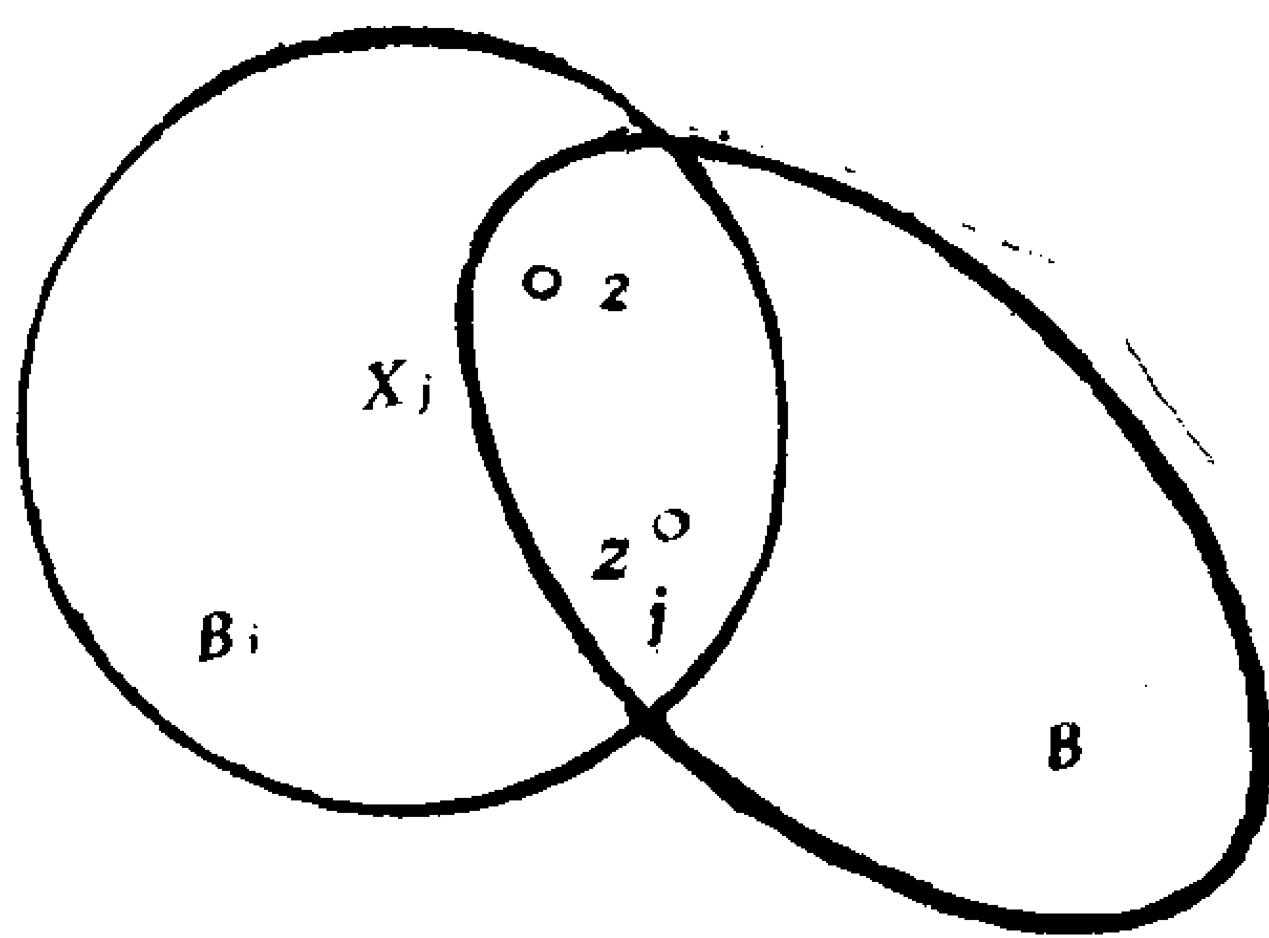


图42 引理7.2-2(c)的证明图示

全有界蕴涵有界，反之一般不成立.

上述命题第一部分较显然. 而后一部分可从下面看出：闭单位球$U = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\} \subset l^2$为有界的但非全有界. 因为$l^2$为无限维且完备，因而$U$非紧的（参看7.5-5），由7.2-2(*b*)知U不能是全有界的.

引理7.2-2包括了进一步研究所需要的性质 而其他虽有意义但本书并不考虑，将在习题2至4中予以介绍.

7.2-3 定理（值域的可分性）. X与Y为赋范空间，紧线性算子$T: X \to Y$的值域$R(T)$为可分的.

证明：考察球$B_n = B(\theta, n) \subset X$，由$T$为紧的，其象$C_n = T(B_n)$为相对紧的，再由引理7.2-2知$C_n$为可分的，对任

意的 $x \in X$ 其范数为有限，即 $\|x\| < n$，因此存在足够大的n，$x \in B_n$，故

$$(a) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad (b) \quad T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{2}$$

因C_n为可分，其有可数的稠密子集D_n且其并

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

为可数．由(26)可知D在值域$R(T)=T(X)$中稠密．

下面定理说明：赋范空间X上紧线性算子可扩张到X的完备化空间上，扩张后算子仍为线性和紧的．

7.2-4 **定理（紧扩张）**．从一赋范空间X到一Banach空间Y的紧线性算子 $T:X \to Y$，有一紧线性扩张$\tilde{T}:\hat{X} \to Y$其中$\hat{X}$为的完备化空间．

证明：参看定理2.3-3可将X作为$\hat{X}$的一个子空间，因T为有界的（参看7.1-2），由2.7-12知其有一有界线性扩张 $\tilde{T}:\hat{X} \to Y$ 现证明：T的紧性蕴涵$\tilde{T}$亦为紧的．为此考察$\hat{X}$中任意有界序列 $(\hat{x}_n)$ 并证明 $\tilde{T}(\hat{x}_n)$ 具有一收敛的子序列．

由X在$\hat{X}$中稠密，则在X中存在一序列使得$\hat{x}_n - x_n \to 0$，显然(x_n)亦有界．根据T为紧的，则 $T(x_n)$ 存在一收敛的子序列(Tx_{n_k})；令

$$Tx_{n_k} \to y_0 \in Y \tag{3}$$

由$\hat{x}_n - x_n \to 0$ 得$\hat{x}_{n_k} - x_{n_k} \to 0$，及$\tilde{T}$为线性有界知其为连续的

（参看1.4-8）

$$\widetilde{T}\hat{x}_{n_k}-Tx_{n_k}=\widetilde{T}(\hat{x}_{n_k}-x_{n_k})\to\widetilde{T}O=O.$$

由(3)知$\widetilde{T}\widetilde{x}_{n_k}\to y_0$，这就证明了任意有界序列$(\hat{x}_n)$有一子序列$(\hat{x}_{n_k})$使得$(\widetilde{T}\hat{x}_{n_k})$收敛．由7.1-3证得$\widetilde{T}$为紧的．

在本章的后面还可以看到：在算子方程中紧线性算子的存在具有重要的理论与实际意义，算子方程可解性的一般理论不可避免的要用到伴随算子，这中间联系的最关键是：紧线性算子的伴随算子为紧的．现予以证明．

7.2-5 定理（伴随算子）．设$T: X\to Y$为一线性算子，若T是紧的则其伴随算子$T^{\times}$: $Y^*\to X^*$亦为紧的．其中X与Y为赋范空间，X^*与Y^*为对应的对偶空间．

证明：考察Y^*中任意有界子集B，即

$$\|g\|\leqslant C \qquad \text{对所有的} g\in B$$

并证明其象$T^{\times}(B)\subset X^*$为全有界的，由X^*为完备（参看2.8-13)从7.2-2(6)可得$T^{\times}(B)$为相对紧的．

照此应证明对任意给定的$\varepsilon_0>0$，象$T^{\times}(B)$存在有限的ε_0-网．因T为紧的，则单位球$U=\{x\in X|\ \|x\|\leqslant 1\}$的象$T(U)$为相对紧的，由7.2-2(a)知$T(U)$为全有界的．再据7.2-2(c)知$T(U)$存在一有限的$\varepsilon_1$-网$M\subset T(U)$，其中$\varepsilon_1=\varepsilon_0/4c$．这意味着$U$包含点$x_1,\cdots,x_n$对$x\in U$均有

$$\|Tx-Tx_j\|<\frac{\varepsilon_0}{4C} \qquad \text{对某个} j \quad (4)$$

今定义一线性算子A: $Y^*\to R^n$其为

$$Ag=[g(Tx_1),g(Tx_2),\cdots,g(Tx_n)] \qquad (5)$$

其中g由假设为有界且T由7.1-2(a) 亦为有界. 由此根据7.1-4知A为紧的. 由于B有界$A(B)$为相对紧，再根据7.2-2(a)知$A(B)$为全有界的. 并由7.2-2(c) 知其本身含一ε-网$\{Ag_1, \cdots, Ag_m\}$其中$\varepsilon_2 = \varepsilon_0/4$. 这意味着对每一$g \in B$满足下式

$$\|Ag - Ag_k\|_0 < \frac{1}{4}\varepsilon_0 \tag{6}$$

对某个k其中$\|\cdot\|_0$为R^n上的范数.假若$\{T^\times g_1, \cdots, T^\times g_m\}$即为所要求的$T^\times(B)$的$\varepsilon_0$-网，证明就完整了.

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$T^\times(B) \subset X' \xleftarrow{T^\times} Y' \supset B$$
$$\downarrow A$$
$$R^n$$

图43　定理7.2-5的图示

从(5)及(6)直接可看出,对每一j与每一$g \in B$均存在一k使得

$$|g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2$$

$$= \|A(g - g_k)\|_0^2 < \left(\frac{1}{4}\varepsilon_0\right)^2 \tag{7}$$

设$x \in D$为任意，则存在一j使(4)式成立. 令$g \in B$为任意，则有一k使得(6)成立，且对该k及任意j(7)式成立. 因此得

$$|g(Tx) - g_k(Tx)| \leqslant |g(Tx) - g(Tx_j)|$$
$$+ |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|$$
$$+ |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)|$$

$$< \|g\| \|Tx - Tx_j\| + \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$+ \|g_k\| \|Tx_j - Tx\|$$

$$\leqslant C\cdot\frac{\varepsilon_0}{4C} + \frac{\varepsilon_0}{4} + C\cdot\frac{\varepsilon_0}{4C} < \varepsilon_0$$

上述结果对任意$x\in U$成立且由$T^\times$定义得

$g(Tx) = (T^\times g)(x)$，等等．最后有：

$$\|T^\times g - T^\times g_k\| = \sup_{\|x\|=1} |(T^\times(g - g_k))(x)|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} |g(Tx) - g_k(Tx)| < \varepsilon_0$$

这就证明了$\{T^\times g_1, \cdots, T^\times g_m\}$为$T^\times(B)$的一$\varepsilon_0$-网．由$\varepsilon_0>0$为任意，$T^\times(B)$为全有界再由7.2-2(b)知其为相对紧，由$B$为$Y^*$的任意为界子集证得$T^\times$为紧的．

习 题 7.2

1．设X为一全有界度量空间．证明：任意无限子集$Y\subset X$均有一直径小于给定$\varepsilon>0$的无限子集．

2．若X为紧度量空间．证明：X为完备的．再证明完备性并不蕴涵紧性．

3．举例说明全有界性为紧性的必要但非充分条件．

4．证明：一度量空间X为紧的充分必要条件是其为完备且全有界．

5．若度量空间(X, d)为紧的．证明对任意$\varepsilon>0$空间X有一有限子集M使得对X中任意点x到M的距离$\delta(x, M) = \inf_{y\in M} d(x, y) < \varepsilon$．

6．算子$T: l^2 \to l^2$由$Tx = y = (\eta_j)$．其中$x = (\xi_j)$且

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk}\xi_k \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty$$

定义，试证明T为紧的（利用7.1-5）

7. 证明习题6中的算子类构成$B(l^2, l^2)$的一子空间. 举例说明习题6的条件是算子T为紧的充分但非必要的条件.

8. 一满射紧线性算子$T: l^\infty \to l^\infty$是否存在?

9. 若$T \in B(X, Y)$是非紧的，T是否能限制在X的一无限维子空间上而使其为紧的?

10. 设(λ_n)为一数列，且当$n\to\infty$，$\lambda_n \to 0$. 算子$T: l^2 \to l^2$由$Tx = y = (\eta_j)$，$\eta_j = \lambda_j \xi_j$定义的其中$x = (\xi_j)$，证明T为紧的.

§7.3 赋范空间上紧线性算子谱的性质

在本节与下一节中，将考察赋范空间X上的紧线性算子谱的性质. 为此仍需利用算子

$$T_\lambda = T - \lambda I \qquad (\lambda \in C) \qquad (1)$$

及与6.2节有同样定义的关于谱论的基本概念.

紧线性算子的谱论是有限维度量空间的特征值理论的较为简单的推广，并且在很多方面类似于有限维的情况. 这可从下面的7.3与7.4节的摘要看出.

摘要：一赋范空间X上的紧线性算子T：$X \to X$具有如下性质：

T的特征值集为可数的（或者有限甚至为空集）（参看7.3-1）

$\lambda = 0$是该集可能存在的唯一聚点（参看7.3-1）

每一谱值$\lambda \neq 0$为一特征值（参看7.4-4）. 若X为无限维则$0 \in \sigma(T)$

对$\lambda \neq 0$ T的任一特征空间的维数为有限（参看7.3-3）

对$\lambda \neq 0$ T_λ，T_λ^2，$T_\lambda^3 \cdots$各自对应的零空间的维数为有

限，且这些算子的值域均为闭的（参看7.3-5，7.3-6）

存在一数r（依赖于λ，其中$\lambda\neq 0$）使得

$$X=N(T_\lambda^r)\oplus T_\lambda^r(X)$$

（参看7.4-5）；

零空间满足

$$N(T_\lambda^r)=N(T_\lambda^{r+1})=N(T_\lambda^{r+2})=\cdots$$

值域满足

$$T_\lambda^r(X)=T_\lambda^{r+1}(X)=T_\lambda^{r+2}(X)=\cdots$$

（参看7.4-3）.

若$r>0$，则成立下面的真包含关系：

$$N(T_\lambda^0)\subset N(T_\lambda)\subset\cdots\subset N(T_\lambda^r)$$

和

$$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset\cdots\supset T_\lambda^r(X)$$

（参看7.4-3）.

下面的第一个定理与特征值有关，将证明紧线性算子的点谱并不复杂. 在下一节还可以看到紧线性算子若存在$\lambda\neq 0$的谱值则其为特征值. 这说明紧线性算子的谱在很大程度上类似于有限空间.

7.3-1 定理（特征值）. 一赋范空间上的紧线性算子$T:X\to X$之特征值集为可数的（或有限甚至为空集）且$\lambda=0$是该集可能存在的唯一聚点.

证明：显然若证得对任一实数$k>0$，使得对所有$\lambda\in\sigma_p(T)$且$|\lambda|\geqslant k$的集均为有限时，命题得证.

反之，若对某一$k_0>0$，假设不成立，则存在一由不同特征值组成的序列(λ_n)使$|\lambda_n|\geqslant k_0$，且存在$x_n\neq 0$有$Tx_n=\lambda_n x_n$. 由定理6.4-3知所有x_n的集为线性无关. 令$M_n=$

$\mathrm{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，则对任意$x \in M_n$有唯一表示式

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

利用$T - \lambda_n I$及$Tx_j = \lambda_j x_j$得

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1}$$

注意等式右边不出现x_n，则

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1} \qquad \text{对所有} x \in M_n \qquad (2)$$

M_n为闭的（参看2.4-3），由 Riesz引理2.5-4，存在一序列(y_n)使得

$$y_n \in M_n \qquad \|y_n\| = 1, \text{ 对所有} x \in M_{n-1}$$

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}$$

下面来证明：

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geqslant \frac{1}{2}k_0 \qquad (n > m) \quad (3)$$

由$k_0 > 0$知(Ty_n)不存在收敛的子序列，再由y_n为有界的，这就与T的紧性相矛盾.

用加减项可得

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \tilde{x} \quad \text{其中} \quad \tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m \qquad (4)$$

令$m < n$. 今证明$\tilde{x} \in M_{n-1}$. 由$m \leqslant n-1$，可以看出$y_m \in M_m \subset M_{n-1} = \mathrm{Span}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$，再由$Tx_j = \lambda_j x_j$知$Ty_m \in M_{n-1}$，根据(2)

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}$$

把两结果合在一起得$\tilde{x} \in M_{n-1}$. 同样可知$x=\lambda_n^{-1}\tilde{x} \in M_{n-1}$，由$|\lambda_n| \geqslant k_0$得

$$\|\lambda_n y_n - \tilde{x}\| = |\lambda_n| \ \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}k_0 \quad (5)$$

根据(4)与(5)可知(3)成立，因此对某一$k_0>0$存在无限多个特征值，且满足$|\lambda_n| \geqslant k_0$的假设不成立，定理由此得证.

此定理证明了一赋范空间上的紧线性算子若存在无限多个特征值则可将其排成一收敛于零的序列.

一紧线性算子与一有界线性算子相乘可得到一紧线性算子. 这一有意义的结果是下面引理的内容，其有多方面的应用，当前用来证明紧线性算子的一个基本性质.

7.3-2 **引理（乘积的紧性）**. 设X为一赋范空间，$T: X \to X$为一紧线性算子且$S: X \to X$为一有界线性算子，则TS与ST均为紧的

证明：设$B \subset X$为任意有界集，由S为有界算子，则$S(B)$为有界集. 再根据T为紧的则集$T[S(B)]=TS(B)$为相对紧的，即TS为紧线性算子.

再证明ST亦为紧的. 设(x_n)为X中任意有界序列，则由7.1-3(Tx_n)含有一收敛的子序列(Tx_{n_k})，另根据1.4-8 (STx_{n_k})收敛，因此由7.1-3知ST为紧的.

在本章开始时曾表明过紧线性算子的谱论几乎与有限维空间上线性算子同样地简单（本质是有限维度量空间的特征值理论）根据之一是下面定理：一紧线性算子其可能存在的（亦可能不存在）非零特征值之特征空间为有限维的.

7.3-3 **定理（零空间）**. 若$T: X \to X$为赋范空间X上

的紧线性算子，则对每一$\lambda\neq 0$ $T_\lambda=T-\lambda I$的零空间$N(T_\lambda)$ 为有限维的.

证明：现证明$N(T_\lambda)$的闭单位球M为紧的然后再使用定理2.5-5

设(x_n)在M中，则(x_n)为有界（$\|x_n\|\leqslant 1$），由7.1-3知(Tx_n)含有一收敛的子序列(Tx_{n_k})，由$x_n\in M\subset N(T_\lambda)$则$T_\lambda x_n=Tx_n-\lambda x_n=0$即$x_n=\lambda^{-1}Tx_n(\lambda\neq 0)$，故$(x_{n_k})=(\lambda^{-1}Tx_{n_k})$亦收敛，根据$M$为闭知其极限在$M$中，因为$(x_n)$为$M$中任意序列由定义2.5-1知$M$为紧的，再由2.5-5证得$\dim N(T_\lambda)<\infty$

7.3-4 系（零空间）．在定理7 3-3中

$$\dim N(T_\lambda^n)<\infty \qquad (n=1,2,\cdots) \quad (6)$$

且

$$\{\theta\}=N(T_\lambda^0)\subset N(T_\lambda)\subset N(T_\lambda^2)\subset\cdots \quad (7)$$

证明：由T_λ为线性的其将0映射到0（参看§2.6）因此$T_\lambda^n x=0$蕴涵$T_\lambda^{n+1}x=0$故(7)式成立.

现证明(6)，由二项式定理

$$T_\lambda^n=(T-\lambda I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(-\lambda)^{n-k}$$

$$=(-\lambda)^n I+T\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}$$

可写成

$$T_\lambda^n=W-\mu I \qquad \mu=-(-\lambda)^n,$$

其中$W=TS=ST$且S表示上式右边中的和，T为紧的且由T有界知S亦有界（由7.1-2(a)）. 因此由引理7.3-2得W为紧的，应用定理7.3-3于$W-\mu I$得$\dim N(T_\lambda^n)<\infty$

下面考察紧线性算子T当$\lambda\neq0$时$T_\lambda, T_\lambda^2, T_\lambda^3\cdots$的值域．为此首先应注意到一线性有界算子其零空间总是闭的，但其值域并不总为闭的（参看2.7-11与2.7节习题2），然而若T为紧的，则T_λ对于$\lambda\neq0$定有闭的值域．且$T_\lambda^2, T_\lambda^3, \cdots$亦有同样的结果．下面首先对$T_\lambda$加以证明，然后可直接推广到对任意的$n\in N$的$T_\lambda^n$上去．

7.3-5 **定理（值域）**．设$T: X\rightarrow X$为一赋范空间X上的紧线性算子，则对每一$\lambda\neq0$的$T_\lambda=T-\lambda I$其值域为闭的．

证明：用反证法．假定值域$T_\lambda(X)$为非闭，并由之导出矛盾．证明过程的思路是

（a）从集$T_\lambda(X)-T_\lambda(X)$中取一元素$y$，并取一序列$(T_\lambda x_n)$收敛于$y$，要证明$x_n\notin N(T_\lambda)$但$N(T_\lambda)$内包含一序列$(z_n)$其使得$\|x_n-z_n\|<2\delta_n$，其中$\delta_n$为$x_n$到$N(T_\lambda)$的距离．

（b）要证明$a_n\rightarrow\infty$，其中$a_n=\|x_n-z_n\|$

（c）考察序列(ω_n)其中$\omega_n=a^{-1}_n(x_n-z_n)$并由之得到预期的矛盾．

详细论证如下：

（a）假设$T_\lambda(X)$为非闭，则存在$y\in T_\lambda(X)$但$y\notin T_\lambda(X)$且在X中存在一序列(X_n)使得

$$y_n=T_\lambda x_n\rightarrow y. \tag{8}$$

由$T_\lambda(X)$为一向量空间，则$\theta\in T_\lambda(X)$，但$y\notin T_\lambda(X)$故$y\neq0$这蕴涵着对于所有充分大的n $y_n\neq0$和$x_n\notin N(T_\lambda)$不失一般性可假设所有的n上述成立．因为$N(T)$是闭的，从x_n到$N(T_\lambda)$的距离为正，即

$$\delta_n = \inf_{z \in N(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0$$

由下确界定义$N(T_\lambda)$存在一序列(z_n)使得

$$a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n \tag{9}$$

(b)现证明

$$a_n = \|x_n - z_n\| \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{10}$$

假定(10)不成立．则$(x_n - z_n)$含有一有界子序列，因为T是紧的，根据7.1-3知$\{T(x_n - z_n)\}$有一收敛的子序列，由$T_\lambda = T - \lambda I$与$\lambda \neq 0$得$I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$利用$T_\lambda z_n = 0$(注意$z_n \in N(T_\lambda)$)可得

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) = \frac{1}{\lambda}[T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n]$$

由$(T(x_n - z_n))$含有一收敛的子序列且由(8)$(T_\lambda x_n)$收敛因此$(x_n - z_n)$有一收敛的子序列，如$x_{n_k} - z_{n_k} \to v$.因T是紧的因而连续，故T_λ亦连续．由1.4-8定理得

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \to T_\lambda v.$$

再由$z_n \in N(T_\lambda)$则$T_\lambda z_{n_k} = 0$，根据(8)还得到

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda x_{n_k} \to y.$$

因而$T_\lambda v = y$.则$y \in T_\lambda(X)$，这与$y \notin T_\lambda(X)$（参看(a)证明之开始部分）矛盾，这就否定了(10)不成立的假设.

(c)再次使用(10)中定义的a_n并设

$$\omega_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n) \tag{11}$$

则$\|\omega_n\| = 1$，因$a_n \to \infty$由$T_\lambda z_n = 0$及$(T_\lambda x_n)$收敛得

$$T_\lambda \omega_n = \frac{1}{a_n} T_\lambda x_n \to 0 \tag{12}$$

再用$I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$得到

$$\omega_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda w_n) \tag{13}$$

因T为紧的且(w_n)有界，则$(T\omega_n)$含有一收敛的子序列，且由(12)知$(T_\lambda w_n)$收敛，则从(13)得知(w_n)有一收敛的子序列，如

$$w_{n_j} \to w \tag{14}$$

与(12)相比较可推出$T_\lambda w = 0$.因此$w \in N(T_\lambda)$同时因$z_n \in N(T_\lambda)$则

$$u_n = z_n + a_n w \in N(T_\lambda)$$

这样从x_n到u_n的距离必有

$$\|x_n - u_n\| \geqslant \delta_n$$

将u_n代入再利用(11)与(9)则得

$$\begin{aligned}\delta_n &\leqslant \|x_n - z_n - a_n w\| = \|a_n w_n - a_n w\| \\ &= a_n \|w_n - w\| < 2\delta_n \|w_n - w\|\end{aligned}$$

除以$2\delta_n > 0$得到 $\frac{1}{2} < \|w_n - w\|$ 这与(14)矛盾，因而定理得证

7.3-6 系（值域）. 在定理7.3-5假设条件下，对任意$n = 0,1,2\cdots$，$T_\lambda^n \cdots$的值域为闭的且

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset T_\lambda^2(X) \supset \cdots$$

证明：命题第一部分可从定理7.3-5得出，注意在7.3-4证明中$T_\lambda^n = W - \mu I$其中的W为紧的.命题的第二部分可归纳证

得，首先$T_\lambda^0(X)=I(X)=X\supset T_\lambda(X)$，再设$T_\lambda^{n-1}(X)\supset T_\lambda^n(X)$得到$T_\lambda^n(X)\supset T_\lambda^{n+1}(X)$

习 题 7.3

1．证明定理7.3-1其中假设条件减弱为对某一正整数p，T^p为一紧线性算子．

2．设X、Y与Z为赋范空间且$T_1:X\to Y$与$T_2:Y\to Z$．若T_1与T_2为紧线算子，试证明：$T_2T_1:X\to Z$为一紧线性算子．

3．若T为一紧线性算子，证明对任意给定的数$k>0$，对应绝对值大于k的T之特征值，至多存在有很多个线性无关特征向量．

4．$T_j:X_j\to X_{j+1}$，$j=1$，2，3为赋范空间上的有界线性算子．若T_2为紧的，证明$T=T_3T_2T_1:X_1\to X_4$为紧的．

5．基于考察有界序列，试给出7.3-2中TS为紧的证明．

6．设H为Hilbert空间，$T:H\to H$为一有界线性算子且T^*为T的Hilbert一伴随算子，试证明T为紧的充分必要条件是T^*T为紧的．

7．在习题6中若T为紧的，试证明T^*为紧的．

8．若在一无限维空间X上的紧线性算子$T:X\to X$，有一定义在全空间X上逆，试证明该逆不可能是有界的．

9．利用Riesz引理2.5-4代替定理2.5-5来证明定理7.3-3．

10．证明定理7.3-3其中假设条件减弱为对一$p\in N$ T^p为一紧线性算子（利用习题9中的证明）．

11．用简单的实例证明定理7.3-3中T为紧的与$\lambda\neq 0$的条件均不可少．

12．若X为Hilbert空间，对定理7.3-3给出一独立的证明．

13．试在较弱条件为：对某一$p\in N$，T^p为一紧线性算子之下，证明系7.3-4．

14．设$T:X\to X$为赋范空间上一紧线性算子．若$\dim X=\infty$，试证

明$0\in\delta(T)$.

15. 设$T:l^2\to l^2$定义为$y=(\eta_j)=Tx$, $x=(\xi_j)$, $\eta_{2k}=\xi_{2k}$且$\eta_{2k-1}=0$ $k=1,2,\cdots$.试求$N(T_\lambda^n)$.且T是否为紧的？

§7.4 紧线性算子谱的进一步性质

从前节得知对一赋范空间X的紧线性算子T当$\lambda\neq 0$时零空间$N(T_\lambda^n)$ $n=1,2,\cdots$为有限维并满足$N(T_\lambda^n)\subset N(T_\lambda^{n+1})$又值域$T_\lambda^n(X)$为闭的并满足$T_\lambda^n(X)\supset T_\lambda^{n+1}(X)$.

下面可进一步得出：到某一$n=r$后所有的零空间均相同（引理7.4-1）；到某一$n=q$后所有的值域均相同（引理7.4-2）；且$q=r$（定理7.4-3，其中q、r为具有该性质的最小整数）

7.4-1 **引理（零空间）**. 设赋范空间X上一紧线性算子$T:X\to X$且$\lambda\neq 0$，则存在一最小整数r（依赖于λ）使得到一某$n=r$后所有零空间$N(T_\lambda^n)$全部相等，且若$r>0$下面均为真包含关系.

$$N(T_\lambda^0)\subset N(T_\lambda)\subset\cdots\subset N(T_\lambda^r).$$

证明：为简单起见，令$N_n=N(T_\lambda^n)$，证明思路如下.

(a)假设不存在$N_m=N_{m+1}$由之引出矛盾，在证明中必需的工具是Riesz引理2.5-4.

(b)证明$N_m=N_{m+1}$蕴涵对所有$n>m$ $N_n=N_{n+1}$. 详细论证如下：

(a)由7.3-4已知$N_m\subset N_{m+1}$. 假设不存在一m使得$N_m=N_{m+1}$，则对每一n N_n为N_{n+1}的真子集，由于这些零空间均为闭的，根据Riesz引理2.5-4则存在一序列(y_n)使得

$$y_n\in N_n,\quad \|y_n\|=1,\quad \text{对所有的}x\in N_{n-1}\ \|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}$$

(1)

下面证明

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \qquad (m<n) \qquad (2)$$

因 $|\lambda|>0$ 故(Ty_n)不含收敛的子序列，再由(y_n)为有界这就与T的紧性矛盾。

从$T_\lambda = T-\lambda I$ 得$T=T_\lambda+\lambda I$且

$Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \tilde{x}$ 其中 $\tilde{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y$

令$m<n$，现证明 $\tilde{x} \in N_{n-1}$，由于$m \leqslant n-1$显然 (3)

$\lambda y_m \in N_m \subset N_{n-1}$. 而$y_m \in N_m$知

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m)$$

即$T_\lambda y_m \in N_{m-1} \subset N_{n-1}$，同理由$y_n \in N_n$知$T_\lambda y_n \in N_{n-1}$，合在一起得$\tilde{x} \in N_{n-1}$，令$x=\lambda^{-1}\tilde{x}$则$x \in N_{n-1}$，故由(1)得

$$\|\lambda y_n - \tilde{x}\| = |\lambda|\ \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$$

结合(3)得出(2). 因此假设不存在m使得$N_m = N_{m+1}$不能成立. 即存在m使得$N_m = N_{m+1}$

(b) 现证对所有的 $n>m$由$N_m = N_{m+1}$蕴涵着$N_n = N_{n+1}$，假设不成立,则对某一$n>m$ N_n为N_{n+1}的真子集今考察 $-x \in N_{n-1} - N_n$，由定义

$$T_\lambda^{n-1}x = 0 \qquad 但 \quad T_\lambda^n x \neq 0$$

因$n>m$则$n-m>0$，设$z=T_\lambda^{n-m}x$，则

$$T_\lambda^{m+1}z = T_\lambda^{n-1}x = 0 \quad 但 \quad T_\lambda^m z = T_\lambda^n x \neq 0$$

故$z\in N_{m+1}$ 但$z\notin N_m$ 所以N_m为N_{m+1}的真子集，这与$N_m=N_{m+1}$矛盾，则定存在最小整数r使得$N_r=N_{r+1}$ 若$r>0$则$N(T_\lambda^0)\subset N(T_\lambda)\subset\cdots\subset N(T_\lambda^r)$为真包含关系.

上面引理证明了紧线性算子T且$\lambda\neq 0$时，T_λ，T_λ^2，…零空间的关系，下面证明其值域存在类似的关系.

7.4-2 **引理（值域）**. 在引理7.4-1的前提下，存在最小的整数q（依赖于λ），使得到某一$n=q$以后值域$T_\lambda^n(X)$全部相等，且若$q>0$下面均为真包含关系

$$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset\cdots\supset T_\lambda^q(X)$$

证明：证明过程与前面相似。令$R_n=T_\lambda^n(X)$，假设不存在s使得$R_s=R_{s+1}$ 则对每一n，R_{n+1}为R_n的真子空间（参看7.3-6），由7.3-6知值域为闭，根据2.5-4Riesz引理定存在一序列(x_n)使得

$$x_n\in R_n,\ \ \|x_n\|=1,\ \text{对所有}x\in R_{n+1}\ \ \|x_n-x\|\geq\frac{1}{2} \qquad (4)$$

令$m<n$，由$T=T_\lambda+\lambda I$ 则

$$Tx_m-Tx_n=\lambda x_m-(-T_\lambda x_m+T_\lambda x_n+\lambda x_n) \qquad (5)$$

在等式右边$\lambda x_m\in R_m$，$x_m\in R_m$，则$T_\lambda x_m\in R_{m+1}$ 且由$n>m$有$T_\lambda x_n+\lambda x_n\in R_n\subset R_{m+1}$，因此(5)可写成下式

$$Tx_m-Tx_n=\lambda(x_m-x) \qquad x\in R_{m+1}$$

再由(4)得

$$\|Tx_m-Tx_n\|=|\lambda|\ \|x_m-x\|\geq\frac{1}{2}|\lambda|>0 \qquad (6)$$

则(6)式与T为紧且(x_n)为有界必含一收敛子序列相矛盾，这就证得定存在某一s使得$R_s=R_{s+1}$，令q为上述关系成

立的最小整数，若$r>0$则$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset\cdots\supset T_\lambda^q(X)$为真包含关系。且$R_{q+1}=R_q$即$T_\lambda$将$R_q$映射为本身，重复使用$T_\lambda$得到：对任意$n>q$ $R_{n+1}=R_n$.

将引理7.4-1与7.4-2结合起来得到下面重要定理。

7.4-3 定理（零空间与值域） 令$T:X\to X$为赋范空间X上紧线性算子且$\lambda\neq 0$，则存在一最小整数$n=r$（依赖于λ）使得

$$N(T_\lambda^r)=N(T_\lambda^{r+1})=N(T_\lambda^{r+2})=\cdots \tag{7}$$

$$T_\lambda^r(X)=T_\lambda^{r+1}(X)=T_\lambda^{r+2}(X)=\cdots \tag{8}$$

并且若$r>0$，下面包含关系是真包含

$$N(T_\lambda^0)\subset N(T_\lambda)\subset\cdots\subset N(T_\lambda^r) \tag{9}$$

$$T_\lambda^0(X)\supset T_\lambda(X)\supset\cdots\supset T_\lambda^r(X) \tag{10}$$

证明：引理7.4-1得到(7)与(9)，引理7.4-2由q代替r得到(8)与(10)，现在必需证明$q=r$. 首先在(a)部分证明$q\geqslant r$，再在(b)部分证明$q\leqslant r$. 与前面类似 令：$N_n=N(T_\lambda^n)$；$R_n=T_\lambda^n(X)$.

(a) 由引理7.4-2知$R_{q+1}=R_q$这表明$T_\lambda(R_q)=R_q$. 因此

$$y\in R_q\Longrightarrow \quad \text{存在}x\in R_q\text{使得}y=T_\lambda x \tag{11}$$

下面证明：

$$T_\lambda x=\theta\text{且}x\in R_q\Longrightarrow \quad x=\theta. \tag{12}$$

假设(12)不成立，则存在非零元素$x_1\in R_q$ $T_\lambda x_1=\theta$. 对$y=x_1$用(11)得$x_2\in R_q$ 有$x_1=T_\lambda x_2$. 类似地存在$x_3\in R_q$使得$x_2=T_\lambda x_3$等等，则对任意n通过代换得

$$\theta\neq x_1=T_\lambda x_2=\cdots T_\lambda^{n-1}x_n \qquad \text{但}\theta=T_\lambda x_1=T_\lambda^n x_n$$

因此$x_n \in N_{n-1}$ 但$x_n \in N_n$，但由7.4-1知$N_{n-1} \subset N_n$，即对任意n均为真包含关系这与7.4-1矛盾故(12)得证。

由7.4-2知$R_{q+1} = R_q$，现在证明$N_{q+1} = N_q$；因r为满足条件的最小整数，这就说明$q \geqslant r$.

已知$N_{q+1} \supset N_q$，再证$N_{q+1} \subset N_q$，即由$T_\lambda^{q+1}x = \theta$蕴涵$T_\lambda^q x = \theta$. 设其不成立，则存在一$-x_0$使得

$$y = T_\lambda^q x_0 \neq \theta \quad 但 \quad T_\lambda y = T_\lambda^{q+1} x_0 = \theta$$

因此$y \neq \theta$且$y \in R_q$ 与$T_\lambda y = \theta$，在(12)式中令$y = x$得出矛盾，这证明$N_{q+1} \subset N_q$，因此$N_{q+1} = N_q$且$q \geqslant r$.

(*b*) 再证明$q \leqslant r$. 若$q = 0$时显然成立。今设$q \geqslant 1$，如证得N_{q-1}为N_q的真子空间，由r是使$N_n = N_{n+1}$最小整数，则$q \leqslant r$.

由7.4-2中q之定义$R_q \subset R_{q-1}$为真包含关系，设$y \in R_{q-1} - R_q$. 则$y \in R_{q-1}$即存在$-x$使$y = {}_\lambda^{q-1}x$. 同时$T_\lambda y \in R_q = R_{q+1}$蕴涵着存在一$z$使得$T_\lambda y = T_\lambda^{q+1}z$. 由于$T_\lambda^q z \in R_q$但$y \notin R_q$得到

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) = y - T_\lambda^q z \neq \theta$$

因此$x - T_\lambda z \notin N_{q-1}$ ，但

$$T_\lambda^q(x - T_\lambda z) = T_\lambda y - T_\lambda y = \theta$$

故$x - T_\lambda q \in R_q$，这就证了$N_{q-1} \neq N_q$，即N_{q-1}为N_q的真子空间，则$q \leqslant r$，但由(*a*)证$q \geqslant r$，故$q = r$得证.

由上述定理几乎可直接推得下面Banach空间上紧线性算子谱的重要特性（在7.6-4中将看到该结论在不完备空间仍可成立）

7.4-4 定理（特征值）. 设$T: X \to X$为一Banach空

间X上的紧线性算子．则T的每一谱值$\lambda\neq 0$（若其存在①）为T的特征值．

证明：若$N(T_\lambda)\neq\{\theta\}$，则$\lambda$为$T$的一特征值．假设$N(T_\lambda)=\{\theta\}$，其中$\lambda\neq 0$，则$T_\lambda x=\theta$蕴涵$x=\theta$由2.6-10知$T_\lambda^{-1}$：$T_\lambda(X)\to X$存在．因

$$\{\theta\}=N(I)=N(T_\lambda^0)=N(T_\lambda)$$

从7.4-3得$r=0$因此$X=T_\lambda^0(X)=T_\lambda(X)$，故$T_\lambda$为双射，因为$X$是完备的；根据4.11-3有界逆算子定理知$T_\lambda^{-1}$为有界的，再由定义得$\lambda\in\rho(T)$.

关于$\lambda=0$：本章中很多定理将其排除，自然要考虑在一复赋范空间X上的紧算子T：$X\to X$对$\lambda=0$时有些什么结果．若X为有限维，则T可由矩阵表示，显然0可以属于或不属于$\sigma(T)=\sigma_p(T)$：即：若$\dim X<\infty$，可能有$\sigma\in\sigma(T)$；则此时$\sigma\in p(T)$．但在$\dim X=\infty$，必有$\sigma\in\sigma(T)$（参看前一节习题14）并且下面三种情况均有可能

$$\sigma\in\sigma_p(T)\qquad\sigma\in\sigma_c(T)\qquad\sigma\in\sigma_r(T)$$

其在本节习题 4 与 5 有所说明

作为定理7.4-3重要的应用；可将X表示为两个闭子空间，也就是T_λ^r的零空间与值域的直和（参看3.3节）．

7.4-5 **定理（直和）**．设X，T，λ与r与定理7.3-4中一致、则②X可表为下述形式

① 习题5证明T可不存在特征值．还可证明一复Hilbert空间$H\neq\{\theta\}$上的伴随紧线性算子T，至少存在一特征值．

② 若X为一向量空间，则对任意子空间$Y\subset X$定存在一子空间$Z\subset X$使得$X=Y\oplus Z$（参看§3.2）若X为一赋范空间（甚至为一$Banach$空间）对$Y\subset X$为一闭子空间，不一定存在一闭子空间$Z\subset X$使得$X=Y\oplus Z$，若X为一Hiebrt空间则对任意闭子空间Y总存在闭子空间$Z=Y^\perp$使得$X=Y\oplus Z$，注意（13）中的子空间均为闭的．

$$X = N(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X) \tag{13}$$

证明：今考虑任意$x \in X$，应证得x有唯一表示式

$$x = y + z \qquad (y \in Nr, z \in Rr)$$

其中$N_n = N(T_\lambda^n)$与$R_n = T_\lambda^n(X)$. 设$z = T_\lambda^r x$则$z \in R_r$，由定理7.4-3知$R_r = R_2$，故$z \in R_{2r}$，且存在$x_1 \in X$　$z = T_r^{2r} x_1$. 令$x_0 = T_\lambda^r x_1$则$x_0 \in R_r$，故

$$T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^{2r} x_1 = z = T_\lambda^r x$$

这说明$T_\lambda^r(x - x_0) = 0$，故而$x - x_0 \in {}_0N_r$，且

$$x = (x - x_0) + x_0 \qquad (x - x_0 \in N_r, x_0 \in R_r) \tag{14}$$

下面证该表达式唯一，设

$$x = (x - \tilde{x}_0) + \tilde{x}_0 \qquad (x - \tilde{x}_0 \in N_r, \tilde{x}_0 \in R_r).$$

令$v_0 = x_0 - \tilde{x}_0$由R_r为一向量空间则$v_0 \in R_r$故存在一$v \in X$使得$v_0 = T_\lambda^r v$. 类似由

$$v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = (x - \tilde{x}_0) - (x - x_0)$$

知$v_0 \in N_r$且$T_\lambda^r v_0 = 0$，合在一起

$$T_\lambda^{2r} v = T_\lambda^r v_0 = 0$$

且$v \in N_{2r} = N_r$(参看7.4-3)这表明

$$v_0 = T_\lambda^r v = 0$$

即$v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = 0$，$x_0 = \tilde{x}_0$，故表示式(14)为唯一，$N_r + R_r$为直和

习　题　7.4

1. 证明引理7.4－1其中假设条件减弱为：对某一正整数p，T^p为一紧线性算子.

2. 在引理7.4-1的证明中，曾指出$N_m = N_{m+1}$蕴涵对所有的

$n>m$ $N_n=N_{n+1}$所用的方法是间接的，试给出一直接的试明．

3．为证明定理7.4-4在一般赋范空间中仍成立，可试用7.2-4中证明的$\widetilde{T}$然后对T作出适当的结论，在这过程中会遇到什么困难？

4．$T: l^2 \to l^2$定义为：

$$Tx=\left(\frac{\xi_2}{1},\ \frac{\xi_3}{2},\ \frac{\xi_4}{3},\ \cdots\right),\quad x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\in l^2$$

证明其为紧的且$\sigma_p(T)=\{0\}$．

5．由于一紧线性算子可能不存在特征值，故在定理7.4-4中含有"若其存在"的语句．而下述算子即其：

$T: l^2 \to l^2$定义为

$$Tx=\left(0,\ \frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{3},\ \cdots\right),\quad x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\in l^2$$

试证明$\sigma(T)=\sigma_r(T)=\{0\}$（注意习题4证明0可属于点谱．其还可属于连续谱）

6．$T_n: R^n \to R^n$定义为

为：$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$

$$T_n x=\left(0,\ \frac{\xi_1}{1},\ \frac{\xi_2}{2},\ \cdots,\ \frac{\xi_{n-1}}{n-1}\right)$$

试求T_n的特征值，并与习题5加以比较且说明当$n\to\infty$时变化之情况

7．设$T: l^2\to l^2$定义为$y=Tx=(\eta_j)$，$\eta_j=\alpha_j\xi_j$，$x=(\xi_j)$

其中$\{\alpha_j\}$在$[0,1]$中稠密，证明T不是紧的．

8．设$T: l^2\to l^2$定义为

$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\to Tx=(\xi_2,\ \xi_3,\ \cdots)$

令$m=m_0$与$n=n_0$为值$N(T^m)=N(T^{m+1})$与$T^{n+1}(X)=T^n(X)$成立的最小整数．试求$N(T^m)$．m_0为有限吗？又n_0为多少？

9．设$T: C[0,1]\to C[0,1]$定义为$Tx=vx$，其中$v(t)=t$．证明T不为紧的，

10． 在线性算子$T: R^2 \to R^2$的矩阵表示式为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

情况下，试求出(13)的具体表示式

§7.5 紧线性算子的算子方程

在I.Fredholm(1903)所研究的线性积分方程之著名成果启发下，人们得到了某类涉及到紧线性算子的方程可解性．下面介绍的有关理论主要由F.Riesz(1918)所发展且包含了J.Schauder(1930)作出的重要结果．

需考察的是：一赋范空间X上紧线性算子$T: X \to X$与其伴随算子$T^{\times}$：$X^* \to X^*$，有关方程是：

$$Tx - \lambda x = y. \quad (y \in X\text{为给定，且}\lambda \neq 0) \tag{1}$$

其对应的齐次方程

$$Tx - \lambda x = 0 \quad (\lambda \neq 0) \tag{2}$$

上述两方程涉及的伴随算子方程为

$$T^{\times} f - \lambda f = g \quad (g \in X^*\text{给定，且}\lambda \neq 0) \tag{3}$$

其对应的齐次方程

$$T^{\times} f - \lambda f = 0 \quad (\lambda \neq 0) \tag{4}$$

其中$\lambda \in C$为任意给定且不为零，要研究的问题是解x与f的存在性．

为什么要同时考察这样四个方程？答案可从下面的摘要中看出端倪，其表明诸方程的相互关系涉及到可解性．

摘要．设$T: X \to X$为赋范空间上的紧线性算子，且$T^{\times}$：$X^* \to X^*$为T的伴随算子，令$\lambda \neq 0$，则：

(Ⅰ)为"正规可解"，即(1)有一解x当且仅当对所有(4)

式的解f，有$f(y)=0$. 因此若$f=0$为(4)的唯一解时，对任一y方程(1)均可解(参看7.5-1)

(3)有一解f当且仅当对所有(2)式的x，有$g(x)=0$，因此$x=0$为(2)的唯一解时，对任一g方程(3)均可解(参看7.5-3)

(1) 对任一$y\in X$有一解x的充分必要条件是$x=0$为(2)的唯一解(参看7.6-1a)

(3) 对任一$g\in X'$有一解f的充分必要条件是$f=0$为(4)的唯一解(参看7.6-1b).

(2) 与(4)具有相同个数的线性无关解(参看7.6-3).

T_λ满足Fredholm择一性(参看7.7-2)

下面的第一个定理给出(1)为可解的充分必要条件.

7.5-1 **定理((1)的解)**. 设$T:X\to X$为赋范空间X上的紧线性算子且令$\lambda\neq 0$.则(1)有一解x的充分必要条件是对所有满足(4)的解$f\in X^*$有

$$f(y)=0. \qquad (5)$$

因此若(4)有唯一平凡解$f=0$，则对任意给定的$y\in X$ (1)均可解.

证明：(a)假设(1)有一解$x=x_0$，即

$$y=Tx_0-\lambda x_0=T_\lambda x_0$$

令f为(4)的任意一解，则可知

$$f(y)=f(Tx_0-\lambda x_0)=f(Tx_0)-\lambda f(x_0)$$

由伴随算子定义$f(Tx_0)=(T^\times f)(x_0)$.因此由(4)

$$f(y)=(T^\times f)(x_0)-\lambda f(x_0)=0.$$

(b)反之，设(1)式中y对(4)中任意解f满足$f(y)=0$现证明(1)有解.

假设(1)无解，则不存在x值$y=T_\lambda x$，即$y\notin T_\lambda(X)$，由7.3-5知$T_\lambda(X)$为闭的，则从y到$T_\lambda(X)$的距离δ为正值，由引理4.5-7存在一$\tilde{f}\in X^*$使得$\tilde{f}(y)=\delta$且对每一$z\in T_\lambda(X)$ $\tilde{f}(z)=0$.因为$z\in T_\lambda(X)$则对某一$x\in X$有$z=T_\lambda x$，故由$\tilde{f}(z)=0$得

$$\tilde{f}(T_\lambda x)=\tilde{f}(Tx)-\lambda\tilde{f}(x)$$

$$=(T^\times\tilde{f})(x)-\lambda\tilde{f}(x)=0$$

根据$z\in T_\lambda(X)$为任意 则上式对任意$x\in X$成立.因而$\tilde{f}$为(4)的解.由假设$\tilde{f}(y)=0$,但这与$\tilde{f}(y)=\delta>0$矛盾.因此(1)式必有解,定理的第一部分得证，第二部分可直接由之推出.

从上述定理的特征中抽象出下述概念：

$$Ax=y \qquad (y\text{为给定}) \tag{6}$$

其中$A:X\to X$为赋范空间X上的有界线性算子，若(6)有一解$x\in X$的充分必要条件为y对方程

$$Axf=0 \tag{7}$$

的任一解$f\in X^*$均满足$f(y)=0$

其中$A^\times$为A的伴随算子，则(6)称为“正规可解”.

定理7.5-1表明具有紧线性算子T的式(1)在$\lambda\neq0$时为正规可解.

引用下面引理的结果对(3)可模拟定理7.5-1来进行处理.引理中的正实数r要依赖于给定的λ.应注意(8)式是对称之为“最小范数解”成立，而并不需要对全部解.因此该引理

并不蕴涵着$R_\lambda = T_\lambda^{-1}$的存在性(根据§2.7的习题3)

7.5-2 引理((1)的某些解的有界性) 设$T: X \to X$为赋范空间上的紧线性算子且给定$\lambda \neq 0$，则存在不依赖于(1)中y的实数$c>0$，对每一使(1)式有解的y，在这些解中至少存在一解为$x = \tilde{x}$，满足

$$\|\tilde{x}\| \leqslant c\|y\| \tag{8}$$

其中$y = T_\lambda \tilde{x}$

证明　将证明分作二步.

(a) 先证明若对一给定的y,(1)只要有解，其解集就包含"最小范数解"称其为$\tilde{x}$.

(b) 再证明存在一$c>0$使得对于满足(1)的任意"最小范数解"$\tilde{x}$及对应的$y = T_\lambda \tilde{x}$，(8)式成立.

详细论证如下：

(a) 设x_0为(1)式的解，若x为(1)的另外解，其差$z = x - x_0$满足(2)，因此(1)式的每一解可写成

$$x = x_0 + z \qquad \text{其中} \quad z \in N(T_\lambda)$$

反之，对每一$z \in N(T_\lambda)$其和$x_0 + z$均为(1)的一解. 令

$$p(z) = \|x_0 + z\| \qquad \text{且} \qquad k = \inf_{z \in N(T_\lambda)} p(z)$$

由下确界定义，$N(T_\lambda)$含一序列(z_n)使得

$$p(z_n) = \|x_0 + z_n\| \to k \qquad (n \to \infty) \tag{9}$$

因$(p(z_n))$收敛故有界. 再由

$$\begin{aligned}\|z_n\| &= \|(x_0 + z_n) - x_0\| \leqslant \|x_0 + z_n\| + \|x_0\| \\ &= p(z_n) + \|x_0\|\end{aligned}$$

知(z_n)亦有界．因T为紧的，故(Tz_n)存在一收敛的子序列，但$z_n \in N(T_\lambda)$意味着$T_\lambda z_n = 0$即$Tz_n = \lambda z_n$　其中$\lambda \neq 0$．因此(z_n)含一收敛的子序列，如：

$$z_{n_j} \to z_0$$

再由2.7-11知$N(T_\lambda)$为闭的　故$z_0 \in N(T_\lambda)$，同时由p是连续，得

$$p(z_{n_j}) \to p(z_0)$$

因此再从(9) 式得到

$$p(z_0) = \|x_0 + z_0\| = k$$

这表明：对给定的y，(1) 若有解，则解集包含一"最小范数解" $\tilde{x} = x_0 + z_0$

(b) 现证明存在一$c>0$（不依赖于y）使得对于满足(1) 的任意"最小范数解" $\tilde{x}$ 及对应的$y = T_\lambda \tilde{x}$，(8) 式成立．

假设论断不成立，则存在一序列(y_n)使得

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \to \infty \qquad (n \to \infty) \qquad (10)$$

其中$\tilde{x}_n$为最小范数且满足$T_\lambda \tilde{x}_n = y_n$，乘以某一$\alpha$后对于$\alpha y_n$其对应的$\alpha \tilde{x}_n$亦为最小范数解且$\dfrac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} = \dfrac{\|2\tilde{x}_n\|}{\|2y_n\|}$因此不失一般性可假设$\|\tilde{x}_n\| = 1$，则(10)式蕴涵$\|y_n\| \to 0$，由$T$为紧的且$(\tilde{x}_n)$为有界，则$(T\tilde{x}_n)$含一收敛的子序列，如

$T\tilde{x}_{n_j}\to v_*$，为方便起见令 $v_*=\lambda\tilde{x}_*$ 则有

$$T\tilde{x}_{n_j}\to\lambda\tilde{x}_* \qquad (j\to\infty) \quad (11)$$

由于 $y_n=T_\lambda\tilde{x}_n=T\tilde{x}_n-\lambda\tilde{x}_n$ 有 $\lambda\tilde{x}_n=T\tilde{x}_n-y_n$. 根据(11)及 $\|y_n\|\to 0$ 且 $\lambda\neq 0$ 得到

$$\tilde{x}_{n_j}=\frac{1}{\lambda}(T\tilde{x}_{n_j}-y_n)\to\tilde{x}_* \qquad (j\to\infty) \quad (12)$$

据此且由 T 为连续得

$$T\tilde{x}_{n_j}\to T\tilde{x}_*$$

由(11)知 $T\tilde{x}_*=\lambda\tilde{x}_*$. 因为 $T_\lambda\tilde{x}_n=y_n$ 可见 $x=\tilde{x}_n-\tilde{x}_*$ 满足 $T_\lambda x=y_n$ 由于 $\tilde{x}_n$ 为“**最小范数解**”，则，

$$\|x\|=\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_*\|\geqslant\|\tilde{x}_n\|=1$$

但这与(12)式的收敛性相矛盾. 因此(10)不能成立. 即(10)式中商的序列必有界，即必有

$$c=\sup_{y\in T_\lambda(X)}\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}<\infty$$

其中 $y=T_\lambda\tilde{x}$. 故(8) 成立得证

用上述引理，类似于定理7.5-1对(1) 的可解性，既可得出(3) 的可解特征.

7.5-3 **定理((3) 的解)**. 设 $T:X\to X$ 为一赋范空间 X 上的紧线性算子且 $\lambda\neq 0$. 则(3) 有解的充分且必要条件是 g 对所有满足(2) 式的 $x\in X$ 有

$$g(x)=0 \quad (13)$$

因此若(2) 仅有平凡解$x=0$，则(3) 式对任意给定的$g\in X^*$均可解.

证明 (a)若(3) 有一解f且x满足(2)，则由

$$g(x)=(T^{\times}f)(x)-\lambda f(x)=f(Tx-\lambda x)=f(0)=0$$

知(13)成立

(b)反之，设对任意(2) 的解x，g满足(13)，现证(3)有一解f. 今考察任意$x\in X$且令$y=T_\lambda x$，则$y\in T_\lambda(X)$. 定义$T_\lambda(X)$上的泛函如下：

$$f_0(y)=f_0(T_\lambda x)=g(x)$$

此定义是很明确的；因为若$T_\lambda x_1=T_\lambda x_2$则$T_\lambda(x_1-x_2)=0$因而$x_1-x_2$为(2) 的解；由假设知$g(x_1-x_2)=0$即$g(x_1)=g(x_2)$.

因为T_λ与g均为线性故f_0为线性，下面证明其为有界. 引理7.5-2保证对每一$y\in T_\lambda(X)$至少对应一x且满足

$$\|x\|\leqslant c\|y\| \qquad (y=T_\lambda x)$$

其中的c不依赖于y. 而f_0的有界性可由下式得知：

$$|f_0(y)|=|g(x)|\leqslant\|g\|\cdot\|x\|\leqslant c\|g\|\cdot\|y\|=\tilde{c}\;\|y\|$$

其中$\tilde{c}=c\|g\|$. 由Hahn-Banach定理4.3-2，泛函f_0在X上有一扩张f，其为定义在全空间X上的有界线性泛函.

$$f(Tx-\lambda x)=f(T_\lambda x)=f_0(T_\lambda x)=g(x)$$

在上式左边，由伴随算子定义，对所有$x\in X$有

$$f(Tx-\lambda x)=f(Tx)-\lambda f(x)=(T^{\times}f)(x)-\lambda f(x)$$

与前一式合在一起证得该f为(3) 的一解，则定理中第一部分得证，从其很容易推出第二部分.

§7.6 Fredholm型的其他定理

至于算子方程可解性，在本节给出进一步结果.

$$Tx-\lambda x=y \qquad (y\text{为给定}) \qquad (1)$$

$$Tx-\lambda x=0 \qquad (2)$$

$$T^{\times}f-\lambda f=g \qquad (g\text{为给定}) \qquad (3)$$

$$T^{\times}f-\lambda f=0 \qquad (4)$$

假设条件与前一节完全一致. 如$T:X\to X$为一赋范空间X上的紧线性算子，$T^{\times}$为T的伴随算子且$\lambda\neq 0$为给定.

上一节与本节定理是Fredholm著名理论的一般化，上一节的主要结果是依(4) 来刻画(1) 的可解性(定理7.5-1)和依(2) 刻画(3) 的可解性 (定理7.5-3)，自然期望在(1)与(2) 之间和(3) 与(4) 之间也会有类似的关系.

7.6-1 定理((1)的解). 设$T:X\to X$为一赋范空间X上的紧线性算子且$\lambda\neq 0$则

(a)方程(1) 对每一$y\in X$有解x的充分必要条件是对应齐次方程(2) 只有平凡解$x=0$，在这种情况下(1)的解是唯一的，且T_λ具有有界的逆.

(b)方程(3) 对每一$g\in X^*$有解f的充分必要条件是(4)只有平凡解$f=0$，此时(3) 的解唯一.

证明 (a)先证明若对每一$y\in X$方程(1)可解，则$x=0$为(2) 的唯一解.

否则(2) 有一解$x_1\neq 0$，因为(1) 对任意y均可解则$T_\lambda x=y=x_1$有解设其为x_2，即$T_\lambda x_2=x_1$，类似地有x_3使$T_\lambda x_3=x_2$，等等. 根据假设对任意$k=2,3\cdots$有

$$0\neq x_1=T_\lambda x_2=T_\lambda^2 x_3=\cdots=T_\lambda^{k-1}x_k,$$

且

$$0 = T_\lambda x_1 = T_\lambda^k x_k,$$

因此$x_k \in N(T_\lambda^k)$但$x_k \notin N(T_\lambda^{k-1})$，这表明对所有的$k$零空间$N(T_\lambda^{k-1})$为$N(T_\lambda^k)$的真子空间，但这与定理7.4-3 矛盾，因此$x = 0$必为(2) 的唯一解.

反之，设$x = 0$是(2) 的唯一解，则由定理7.5-3(3) 式对任意g均有解. 现知$T^\times$为紧的（参看7.2-5）故可对$T^\times$使用证明的前一部分得到$f = 0$为(4)的唯一解. 再从7.5-1推得(1)对于任意y均有解.

唯一性的结论可从(1)的两解的差为(2)的解这一事实中得出。显然此唯一解$x = T_\lambda^{-1}y$为最小范数解，由引理7.5-2

$$\|x\| = \|T_\lambda^{-1}y\| \leqslant c\|y\|$$

得出T_λ^{-1}的有界性.

(b)由$T^\times$为紧的（参看7.2-5）则(b)可作为(a)的推论.

齐次方程(2)与(4)亦有关联，可以看到其具有相同个数的线性无关解。在证明中需要知道下面的X与X^*中与(5)有关的某集类的存在性，这常称作双正交系。

7.6-2 引理（双正交系）. 在赋范空间X的对偶空间X^*中，给定一线性无关集$\{f_1, \cdots, f_m\}$，则在X中存在元素$z_1, \cdots, z_m$使得

$$f_j(z_k) = \sigma_{jk} = \begin{cases} 0, & (j \neq k) \\ 1, & (j = k) \end{cases} \quad (j, k = 1, \cdots, m) \quad (5)$$

证明：由于f_j顺序无关紧要，因而只要证明存在一m使得

$$f_m(z_m) = 1 \quad 且 f_g(z_m) = 0 \quad (j = 1, \cdots, m-1) \quad (6)$$

当$m=1$时由线性无关$f_1\neq 0$，故存在x_0 $f_1(x_0)\neq 0$，令$z_1=\alpha x_0$，其中$\alpha=1/f_1(x_0)$得$f_1(z_1)=1$.

$m>1$时归纳法证明，设引理对$m-1$成立，即X包含$m-1$个元素$z_1,\cdots,z_{m-1}$使得

$$f_k(z_k)=1,\quad f_n(z_k)=0\ n\neq k\quad (k,n=1,\cdots,m-1) \tag{7}$$

今考察集

$$M=\{x\in X\,|\,f_1(x)=0,\cdots,f_{m-1}(x)=0\}$$

现证明M定包含一$\tilde{z}_m$使得$f_m(\tilde{z}_m)=\beta\neq 0$，由此令$z_m=\beta^{-1}\tilde{z}_m$显然可知(b)成立.

否则对所有$x\in M$ $f_m(x)=0$，任意给定$x\in X$与集

$$\tilde{x}=x-\sum_{j=1}^{m-1}f_j(x)z_j, \tag{8}$$

则由(7)知对$k\leqslant m-1$

$$f_k(\tilde{x})=f_k(x)-\sum_{j=1}^{m-1}f_j(x)f_k(z_j)=f_k(x)-f_k(x)=0.$$

这表明$\tilde{x}\in M$，并由假设知$f_m(\tilde{x})=0$. 再从(8)式得

$$\begin{aligned}f_m(x)&=f_m\left(\tilde{x}+\sum_j f_j(x)z_j\right)\\&=f_m(\tilde{x})+\sum_j f_j(x)f_m(z_j)\\&=\sum_j\alpha_j f_j(x),\qquad [\alpha_j=f_m(z_j)]\end{aligned}$$

(对j从1到$m-1$取和)，因$x\in X$为任意，得f_m可由$f_1,\cdots,$

f_{m-1} 线性表示，这与$\{f_1,\cdots,f_m\}$线性无关矛盾，因此对所有$x\in X f_m(x)=0$不可能成立，故M必含一z_m，其使(6)式成立．引理得证．

用此引理可证得$\dim N(T_\lambda)=\dim N(T_\lambda^\times)$其中$T_\lambda^\times=(T-\lambda I)^\times=T^\times-\lambda I$，对于所考察的算子方程，这样的维数相等意味着下述结果.

7.6-3 **定理**（T_λ**与**$T_\lambda^\times$**的零空间**）．设T：$X\to X$为一赋范空间X上的紧线性算子且$\lambda\neq0$，则方程(2)与(4)具有相同数目的线性无关解.

证明：T与$T^\times$为紧的（参看7.2-5），故由7.3-3知$N(T_\lambda)$与$N(T_\lambda^\times)$为有限维的如：

$$\dim N(T_\lambda)=n,\qquad \dim N(T_\lambda^\times)=m.$$

现将证明分成(a)，(b)，(c)三部分，各自的作用是

(a)　对$m=n=0$时加以证明，并对$m>0$与$n>0$作准备

(b)　证明$n<m$为不可能

(c)　证明$n>m$为不可能

详细论证如下

(a)　若$n=0$，则(2)的唯一解为$x=0$，则(3)对任意给定的g均可解（参看7.5-3）．由7.6-1推得$f=0$为(4)的唯一解，因此$m=0$．类似地从$m=0$推得$n=0$.

假设$m>0$且$n>0$、设$\{x_1,\cdots,x_n\}$为$N(T_\lambda)$的一基，显然$x_1\notin Y=\mathrm{Span}\{x_2,\cdots,x_n\}$．由引理4.5-7知存在一$\tilde{g}_1\in X^*$其在$Y_1$上处处为零且$\tilde{g}_1(x_1)=\delta$，其中$\delta>0$为$x_1$到$Y_1$的距离．因此$g_1=\delta^{-1}\tilde{g}_1$满足$g_1(x_1)=1$且$g_1(x_2)=0,\cdots,g_1(x_n)=0$．类似地存在一$g_2$使得$g_2(x_2)=1$且对$j\neq2$ $g_2(x_j)=0$,

等等. 因此X^*包含$g_1, \cdots, g_n$且有

$$g_k(x_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & 若 j \neq k \\ 1, & 若 j = k \end{cases} \quad (j,k = 1,\cdots,n) \quad (9)$$

类似地推得：若$\{f_1, \cdots, f_m\}$为$N(T_\lambda^\times)$的一基，则由引理7.6-2存在X的元素$z_1, \cdots, z_m$使得

$$f_j(z_k) = \sigma_{jk} \qquad (j,k = 1,\cdots,m) \qquad (10)$$

(b)证明$n<m$不可能，令$n<m$且S：$X \to X$定义为：

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) z_j \qquad (11)$$

由7.1-4(a)知$g_j(x)z_j$表示一紧线性算子且紧算子之和仍为紧的故S为紧的. 下面证明

$$(a) \quad S_\lambda x_0 = Sx_0 - \lambda x_0 = 0 \Longrightarrow \quad (b) \quad x_0 = 0 \qquad (12)$$

由$(12a)$得到对$k = 1, \cdots, m$有$f_k(S_\lambda x_0) = f_k(0) = 0$，因此由(11)与(10)得到，

$$0 = f_k(S_\lambda x_0) = f_k\left(T_\lambda x_0 + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_0) z_j\right)$$

$$= f_k(T_\lambda x_0) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_0) f_k(z_j) \qquad (13)$$

$$= (T_\lambda^\times f_k)(x_0) + g_k(x_0)$$

因为$f_k \in N(T_\lambda^\times)$则有$T_\lambda^\times f_k = 0$，故由(13)得到

$$g_k(x_0) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, m) \qquad (14)$$

这蕴涵着$Sx_0 = Tx_0$ (由(11))及$T_\lambda x_0 = S_\lambda x_0 = 0$ (由$(12a)$)

因此$x_0 \in N(T_\lambda)$. 由于$\{x_1, \cdots, x_n\}$为$N(T_\lambda)$的一基到

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

其中α_j为相应的系数，将(14)与(9)用到g_k上得

$$0 = g_k(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j(x_j) = \alpha_k \qquad (k=1,\cdots,n)$$

因此$x_0=0$，(12)得证．又由7.6-1(a)得知对任意y $S_\lambda x=y$有解．选$y=z_{n+1}$并令$x=v$为对应的一解，即$S_\lambda v=z_{n+1}$．与(13)的计算相同，利用(10)与(11)得：

$$\begin{aligned}1 &= f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}(S_\lambda v)\\ &= f_{n+1}\left(T_\lambda v + \sum_{j=1}^{n} g_j(v) z_j\right)\\ &= (T_\lambda^\times f_{n+1})(v) + \sum_{j=1}^{n} g_j(v) f_{n+1}(z_j)\\ &= (T_\lambda^\times f_{n+1})(v)\end{aligned}$$

因为假设$n<m$即$n+1\leqslant m$故$f_{n+1}\in N(T_\lambda^\times)$，因此$T_\lambda^\times f_{n+1}=0$这与上面结果$(T_\lambda^\times f_{n+1})(v)=1$矛盾，故证得$n>m$为不可能．

(c)再证明$n>m$亦不可能、方法与(b)相似．设$n>m$且$\widetilde{S}$：$X^*\to X^*$定义为

$$\widetilde{S} f = T^\times f + \sum_{j=1}^{m} f(z_j) g_j \qquad (15)$$

由7.2-5知$T^\times$为紧的再由7.14(a)知$f(z_j)g_j$表示一紧算子则$\widetilde{S}$为紧的，现证明

$$(a)\quad \widetilde{S}_\lambda f_0 = \widetilde{S} f_0 - \lambda f_0 = 0 \implies (b)\quad f_0 = 0 \qquad (16)$$

利用(16a)及在(15)中$f=f_0$及伴随算子定义与(9)对每一$k=1,\cdots,m$有

$$0 = (\widetilde{S}_\lambda f_0)(x_k) = (T_\lambda^\times f_0)(x_k) + \sum_{j=1}^{m} f_0(z_j) g_j(x_k)$$

$$= f_0(T_\lambda x_k) + f_0(z_k) \tag{17}$$

由假设$m<n$知对$k=1,\cdots,m$ $x_k \in N(T_\lambda)$ [注意$\{x_1,\cdots,x_n\}$为$N(T_\lambda)$的一基]因此$f_0(T_\lambda x_k) = f_0(0) = 0$得

$$f_0(z_k) = 0 \qquad (k=1,\cdots,m). \tag{18}$$

从(15)定有 $\tilde{\tilde{S}} f_0 = T^\times f_0$ 由此及(16a)推得$T_\lambda^\times f_0 = \tilde{S}_\lambda f_0 = 0$ 因而$f_0 \in N(T_\lambda^\times)$.因为$\{f_1,\cdots,f_m\}$为$N(T_\lambda^\times)$的一基. 故

$$f_0 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j,$$

其中β_j为对应系数. 利用(18)与(10)得到对每一$k=1,\cdots,m$

$$0 = f_0(z_k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j(z_k) = \beta_k$$

因此$f_0 = 0$,故(16)得证.根据7.6-1(b)知对任意g $\tilde{S}_\lambda f = g$为可解、现取$g = g_{m+1}$ 并设$f = h$为对应的一解,即 $\tilde{S}_\lambda h = g_{m+1}$. 用(9)、(15)并再一次用(9)得

$$1 = g_{m+1}(x_{m+1}) = (\tilde{S}_\lambda h)(x_{m+1})$$

$$= (T_\lambda^\times h)(x_{m+1}) + \sum_{j=1}^{m} h(z_j) g_j(z_{m+1})$$

$$= (T_\lambda^\times h)(x_{m+1}) = h(T_\lambda x_{m+1}).$$

假设$m<n$即$m+1\leqslant n$, 故$x_{m+1} \in N(T_\lambda)$, 因而$h(T_\lambda x_{n+1}) = h(0) = 0$, 这与上式相矛盾因而证得$m<n$不可能成立.再由(b)知亦不可能$n<m$, 故必有$n=m$.

利用7.6-1(a)还能证明以前的定理7.4-4,其中Banach空间条件可放宽为一般赋范空间.

7.6-4 定理(特征值). 设$T: X\to X$为赋范空间X上的紧线性算子,若T具有非零的谱值则其每一值必为T的特

征值.

证明：若预解式$R_\lambda = T_\lambda^{-1}$不存在，则由定义$\lambda \in \sigma_p(T)$设$\lambda \neq 0$且$R_\lambda = T_\lambda^{-1}$存在.则由2.6-10知$T_\lambda x = 0$蕴涵$x = 0$，这表明(2)式只有平凡解，定理7.6-1($a$)证明(1)对任意$y$均可解，即$R_\lambda$在全$X$上有定义且有界，因此$\lambda \in \rho(T)$.

习 题 7.6

1. 试证：定理7.5-3证明中的泛函f_0为线性的.

2. 定理7.5-1在n个未知量n个线性代数方程组的情况下含义是什么？

3. 考察由n个未知量与n个线性方程组成的方程组$Ax = y$，假设此方程组有一解x.试证明该y必满足条件：第5节中的式(5).

4. 一n个未知量n个线性方程的方程组$Ax = y$，对任意给定的y有（唯一）解的充分必要条件是$Ax = 0$只有平凡解$x = 0$，从目前的定理中如何得到这一结论？

5. 由n个未知量与n个线性方程组成的方程组$Ax = y$，其有一解x的充分必要条件是增广矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \eta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \eta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \eta_n \end{pmatrix}$$

与系数矩阵具有相同的秩数，其中$y = (\eta_i)$试从定理7.5-1中得出相同的准则.

6. 若(2)有$x \neq 0$的解且(1)有解，证明(1)的解不能唯一；类似地若(4)有$f \neq 0$的解且(3)有解，证明(3)的解不能唯一.

7. 试证明：定理7.6-1的第一部分可用下述形式表示：

$R_\lambda(T): X \to X$且$\lambda \neq 0$其存在的充分必要条件是：$Tx = \lambda x$

蕴涵$x=0$.

8. 在赋范空间X上的一序列$(z_1, z_2, \cdots)$与其对偶空间X^*的一序列$(f_1, f_2, \cdots)$若满足$f_j(z_k)=\delta_{jk}$其中$j, k=1,2\cdots$; 参看(5)则称此两序列为双直交系.

试证明：对给定的(z_k)，在X^*中存在双直交系(f_i)的充分必要条件为：对所有$m\in N$ $z_m\in \overline{A_m}$其中

$$A_m=\text{Span}\ \{z_k|k=1, 2, \cdots, k\neq m\}.$$

9. 对有限的双直交系（其定义见课文)习题8所叙条件自然满足. 试证明之.

10. 在一内积空间中两集$\{z_1, \cdots, z_n\}$与$\{y_1, \cdots y_n\}$若满足$\langle z_k, y_j\rangle=\delta_{kj}$，试证其每一集均线性无关.

11. 在Hilbert空间中上述双直交系的条件是什么形式?

12. 若X为一Hilbert空间H，试叙述并证明引理7.6-2.

13. 定理7.6-3在n个未知量和n个线性方程的方程组情况下其具体形式是什么?

14. 若一赋范空间X上的线性算子$T: X\rightarrow Y$具有有限维的值域$R(T)=T(x)$.

试证明T具有下述表达形式

$$Tx=f_1(x_1)y_1+\cdots+f_n(x)y_n$$

其中$\{y_1, y_n\}$与$\{f_1, \cdots f_n\}$分别为Y与X^*（X的对偶空间)的线性无关集.

15. 当$\lambda=0$时，有关定理会有什么使人感到奇异的结果，此时，(1)与(2)式各成为

$$Tx=y \quad 与 \quad Tx=0$$

为此考察$T: C[0, \pi]\rightarrow C[0,\pi]$其定义为

$$Tx(s)=\int_0^\pi K(s, t)x(t)dt, K(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin ns\sin nt.$$

§7.7 Fredholm择一性

前二节主要研究与算子方程的可解性有关的紧线性算子的性能，在其结果启示下得到如下概念.

7.7-1 **定义**(Fredholm**择一性**). 在赋范空间X上的有界线性算子 $A:X\to X$称为满足Fredholm择一性，若A满足(Ⅰ)或者满足(Ⅱ)

(Ⅰ) 非齐次方程

$$Ax=y,\quad A^{\times}f=g$$

($A^{\times}:X^{*}\to X^{*}$为$A$的伴随算子) 对任意给定的$y\in X$与$g\in X^{*}$，均各有解$x$与$f$，且解唯一. 对应齐次方程

$$Ax=0\qquad A^{\times}f=0$$

各只有平凡解$x=0$与$f=0$.

(Ⅱ)齐次方程

$$Ax=0,\quad A^{\times}f=0$$

各有相同数目的线性无关解

$$x_1,\ \cdots,\ x_n与f_1,\ \cdots,\ f_n\qquad(n\geqslant 1)$$

非齐次方程

$$Ax=y,\quad A^{\times}f=g$$

各对任意的y与g并不总有解. 其各有解的充分必要条件是y与g各满足

$$f_k(y)=0,\quad g(x_k)=0.$$

$(k=1,\ \cdots,n)$

我们看到上述概念可用来概括上两节的结果.

7.7-2 **定理**(Fredholm**择一性**). 赋范空间X上的紧线性算子 $T:X\to X$当$\lambda\neq 0$时，$T_\lambda=T-\lambda I$ 满足 Fredholm择

一性.

在应用上排他的择一性论断具有重要的实际意义，因为常来论证更为简单的齐次方程是否仅具有平凡解，以代替直接说明解的存在性.

在§7.5 中已表明：紧线性算子的Riesz理论是在第二类积分方程

$$x(s)-\mu\int_b^a K(s,\ t)x(t)dt=\tilde{y}(s) \qquad (1)$$

的Fredholm理论启发下并将Fredholm著名结果一般化.

下面对形式为(1) 的紧线性算子方程的理论与应用作一简要介绍.

设$\mu=1/\lambda$，且$\tilde{y}(s)=-y(s)/\lambda$，其中$\lambda\neq 0$，得

$$Tx-\lambda x=y \qquad (\lambda\neq 0) \qquad (2)$$

其中T定义为

$$(Tx)(s)=\int_a^b K(s,\ t)x(t)dt \qquad (3)$$

根据一般理论可对(2) 式表述如下

7.7-3 **定理(积分方程的择一性)**. 若(1) 中之K使得(2) 与(3) 中的$T:X\to X$为赋范空间X上一紧线性算子，则对T_λ Fredholm择一性成立；就是(1) 或者对所有$\tilde{y}\in X$均有唯一解或者对应(1) 的齐次方程具有有限多个线性无关解（即$x\neq 0$的解）.

假设(2) 中的T为紧的（此条件将在后面给出），若λ为T的预解集$\rho(T)$中一值，则预解式$R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在，并在全空间$X$上有定义，且有界〔参看7.6-1(a)〕，由(2) 式得出唯一解

$$x = R_\lambda(T)y$$

由于$R_\lambda(T)$为线性，且$R_\lambda(T)0=0$这蕴涵齐次方程$Tx-\lambda x=0$仅有平凡解，因此当$\lambda\in\rho(T)$此时为Fredholm择一性中（Ⅰ）的情况.

设$|\lambda|\geqslant\|T\|$，并且X为复Banach空间，由定理6.3-4知$\lambda\in\rho(T)$，再由6.3节式(9)得

$$R_\lambda(T) = -\lambda^{-1}(I+\lambda^{-1}T+\lambda^{-2}T^2+\cdots) \tag{4}$$

由此知解$x=R_\lambda(T)y$可表示为所谓的Neumann级数：

$$x = -\frac{1}{\lambda}\left(y+\frac{1}{\lambda}Ty+\frac{1}{\lambda^2}T^2y+\cdots\right), \tag{5}$$

若T的谱存在非零$\lambda\in\sigma(T)$，则可有，Fredholm择一性中（Ⅱ）的情况. 定理7.6-4表明λ为一特征值，由定理7.3-3知其对应的特征空间维数有限，并由定理7.6-3还可知等于相应的$T_\lambda^\times$的零空间的维数.

在实际中定理7.7-3所涉及的两个重要空间为：

$$X=L^2[a, b]与X=C[a, b]$$

为了使用定理，(1) 中的核K均应使T满足紧的条件.

若$X=L^2[a, b]$，则该条件要求K在$L^2(J\times J)$内是连续的，其中$J=[a, b]$，其证明需用到测度理论，在本书范围内不予考虑.

在$X=C[a, b]$情况下，同样设K在$J\times J$上为连续时就可保证T是紧的.

为得到这一结果，我们使用下述重要的定理(7.7-4)

在$C[a, b]$中的一序列(x_n)称为等度连续，若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在一依赖于ε的$\delta>0$，使得对所有的x_n及所有

的s_1, $s_2\in[a, b]$并且满足$|s_1-s_2|<\delta$均有

$$|x_n(s_1)-x_n(s_2)|<\varepsilon$$

从此定义中可看出：每一x_n在$[a, b]$上均一致连续，且δ并不依赖于n.

7.7-4 Ascoli**定理(等度连续)**. 在$C[a, b]$上的一有界等度连续序列(x_n)其含有一收敛的（依$C[a, b]$的范数）子序列.

证明：由于(x_n)是等度连续的，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得$[a, b]$中的点$t'$, t，当$|t-t'|<\delta$时，(x_n)中的每个$x_n(t)$必有

$$|x_n(t)-x_n(t')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

利用这个δ，在$[a, b]$上任取m个分点

$$a=t_1<t_2<\cdots<t_m=b$$

使得$|t_k-t_{k+1}|<\delta$.因为(x_n)有界，存在常数$M>0$，使(x_n)中的每个$x_n(t)$均有

$$\|x_n\|=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)|\leqslant M.$$

因此，对于每个固定的j，$(x_n(t_j))$均是有界数列，利用引理2.4-1证明中的方法可以证明，对于所有$j=1,2,\cdots m$，$(x_n(t_j))$有共同的收敛的子序列$(x_{n_k}(t_j))$，因此，对ε存在正整数K，当k, $h>K$时，有

$$|x_{n_k}(t_j)-x_{n_k}(t_j)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad (j=1,2\cdots m)$$

下面证明(x_{n_k})是(x_n)的收敛子序列. 对于任意$t\in[a, b]$，

设其落在$[t_j, t_{j+1}]$上，则当k，$h>K$时.

$$|x_{n_h}(t)-x_{n_k}(t)| \leqslant x_{n_h}(t)-x_{n_h}(t_j)| + |x_{n_h}(t_j) - x_{n_k}(t_n)| + |x_{n_k}(t_j)-x_{n_k}(t)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

于是，$\|x_{n_h}-x_{n_k}\| = \max_{t\in[a\ b]} |x_{n_h}(t)-x_{n_k}(t)| < \varepsilon$.

即(x_{n_k})是$C[a、b]$的Cauchy序列，由$C[a, b]$是完备的. 从而证得(x_{n_k})是(x_n)的收敛子序列.

在$X = C[a、b]$时利用此定理可得预期结果如下：

7.7-5 定理(紧积分算子) 设$J=[a, b]$，且K在$J\times J$上连续，则由(3)式所定义的算子T：$X\to X$，其中$X=C[a, b]$为一紧线性算子.

证明：T为线性，有界性可由下式得出.

$$\|Tx\| = \max_{S\in J} \left|\int_a^b K(s, t)x(t)dt\right| \leqslant \|x\| \max_{S\in J}$$

$$\int_a^b |K(s, t)|\, dt$$

即：$\|Tx\| \leqslant \widetilde{C}\, \|x\|$. 令$(x_n)$为$X$中任意有界序列，如对所有的$n$ $\|x_n\| \leqslant C$. 并设$y_n = Tx_n$. 则$\|y_n\| \leqslant \|T\|\ \|x_n\|$.

因此(y_n)亦有界，现证明(y_n)为等度连续. 因为根据假设核K在$J\times J$上连续，$J\times J$为紧的，K在$J\times J$上一致连续. 因此对任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对所有的$t\in J$及所有的S_1，$S_2\in J$且满足$|S_1-S_2|<\delta$均有

$$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)c}$$

由此，对上述的s_1，s_2及任意的n均有

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)|=\left|\int_a^b[K(s_1,t)-K(s_2,t)]\right.$$

$$\left.x_n(t)dt\right|$$

$$<(b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{(b-a)\cdot c}\cdot c=\varepsilon.$$

这就证明了(y_n)的等度连续性．由Ascoli定理知(y_n)含有一收敛的子序列．因(x_n)为任意有界序列且$y_n=Tx_n$，根据定理7.1-3得出T为紧的．

习 题 7.7

1．试表示Fredholm择一性在n个未知量与n个线性代数方程组时的具体形式．

2．直接证明（1）式可能不总有解．

3．对（3）式中的K给出一个不连续的例子，使得对一连续的x，其象Tx为不连续．

4．(Neumann级数)在(1)式中若$\mu=\frac{1}{\lambda}$与$\tilde{y}=-y(s)/\lambda$证明Neumann级数(5)有下述形式

$$x=\tilde{y}+\mu T\tilde{y}+\mu^2T^2\tilde{y}^2+\cdots$$

在$C[a,b]$中考察(1)，若K在$[a,b]$上连续，即可令$|K(s、t)|<M$，若$|\mu|<1/M(b-a)$，试证Neumann级数收敛

5．解下列积分方程，并将结果与习题4中Neumann级数比较

$$x(s)-\mu\int_0^1 x(t)\,dt=1$$

求出对应齐次方程的所有解并加以说明．

6．解下列方程，并证明：若$|\mu|<1/K_0(b-a)$对应的Neumann级数（参看习题4）收敛．

$$x(s)-\mu\int_a^b K_0 x(t)\,dt=\tilde{y}(s)$$

其中K_0为常数

7．（叠核，预解核）试证在习题4 Neumann级数中的$T^n\tilde{y}$可写为

$$(T_n\tilde{y}(s)=\int_a^b K_{(n)}(s,t)\ \tilde{y}(t)\,dt \qquad n=2,3,\cdots$$

叠核K_n定义为

$$K_{(n)}(t,s)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},t)\,dt_1$$

$\cdots dt_{n-1}$则Neumann级数可写成：

$$x(s)\ =\ \tilde{y}(s)+\mu\int_a^b K(s,t)\ \tilde{y}(t)\,dt+\mu^2\int_a^b K_{(2)}(s,t)$$

$y(t)\,dt+\cdots$再证明：此表达式又可写成积分方程：

$$x(s)\ =\tilde{y}(s)+\mu\int\tilde{K}(s,t\mu,)\ \tilde{y}(t)\,dt$$

其中预解核$\tilde{K}$（注意不要与算子的预解式混淆）定义为

$$\tilde{K}(s,t,\mu)\ =\tilde{\sum_{j=0}}\mu^j K_{(j+1)}(s,t). \qquad [K_{(1)}=K]$$

最后证明：叠核满足

$$K_n(s,t) = \int_a^b K_{(n-1)}(s,u)K(u,t)\,du$$

8. 在(1)式中$a=0$，$b=\pi$且

$$K(s,t)=a_1\sin s\cdot\sin 2t+a_2\sin 2s\cdot\sin 3t$$

试确定其预解核.

9. 利用习题4中的Neumann级数解(1)

其中

$$a=0,\ b=2\pi\text{且}$$

$$K(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin ns\cdot\cos nt \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\right)$$

10. 在(1)式中，令$K(s,t)=s(1+t)$且$a=0,b=1$.试确定特征值与特征函数.当$\lambda=1/\mu$不为特征值时试解此方程.

11. 在(1)式中，令$K(s,t)=2e^{s+t}$且$\tilde{y}(s)=e^s$，及$a=0$，$b=1$，试求特征值与特征函数.

12. 解

$$x(s)-\mu\int_0^{2\pi}\sin s\cos t\cdot x(t)\,dt=\tilde{y}(s)$$

13. *Ascoli*定理7.7-4涉及一子序列在依$C[a,b]$中范数收敛，并且知其在$[a,b]$上一致收敛（参看1.5-6）.试举例说明：一连续函数序列，其在$[a,b]$上每一点收敛但不含在$[a,b]$上一致收敛的子序列.

14.（退化核）一核形如

$$K(s,t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(s)b_j(t)$$

称为退化核.这时不妨假设$\{a_1,\cdots,a_n\}$与$\{b_1,\cdots,b_n\}$各为$[a,b]$上的线性无关集，否则的话可以减少和的项数. 若具有这类核的方程（1）有一解x，试证明其为如下形式：

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\sum_{j=1}^{n}c_j a_j(s)\quad C_j=\int_a^b b_j(t)x(t)dt$$

且未知常数必满足：

$$C_j-\mu\sum_{k=1}^{n}a_{jk}c_k=y_j,\ a_{jk}=\int_a^b b_j(t)a_k(t)dt$$

其中

$$y_j=\int_a^b b_j(t)\tilde{y}(t)dt\qquad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

15．考察．

$$x(s)-\mu\int_0^1(s+t)x(t)dt=\tilde{y}(s)$$

(a)假设$\mu^2+12\mu-12\neq 0$并利用习题14结果解此方程

(b)求其特征值和特征函数．

附录Ⅰ 复习与参考资料

A1.1 集(集合)

常用大写字母A, B, M, X, $Y\cdots$表示集，也可用花括号表示，例如：

$\{a, b, c\}$表示元素a, b, c组成的集.

$\{t \mid f(t)=0\}$表示使f的值等于零的t的集. 集论中的某些记号：

ϕ　　空集（不含任何元素之集）

$a\in A$　　a是A的一个元素.

$b\notin A$　　b不是A的一个元素.

$A=B$　　A与B相等（由相同元素组成的两集）.

$A\neq B$　　A与B为不同的集（不相等）.

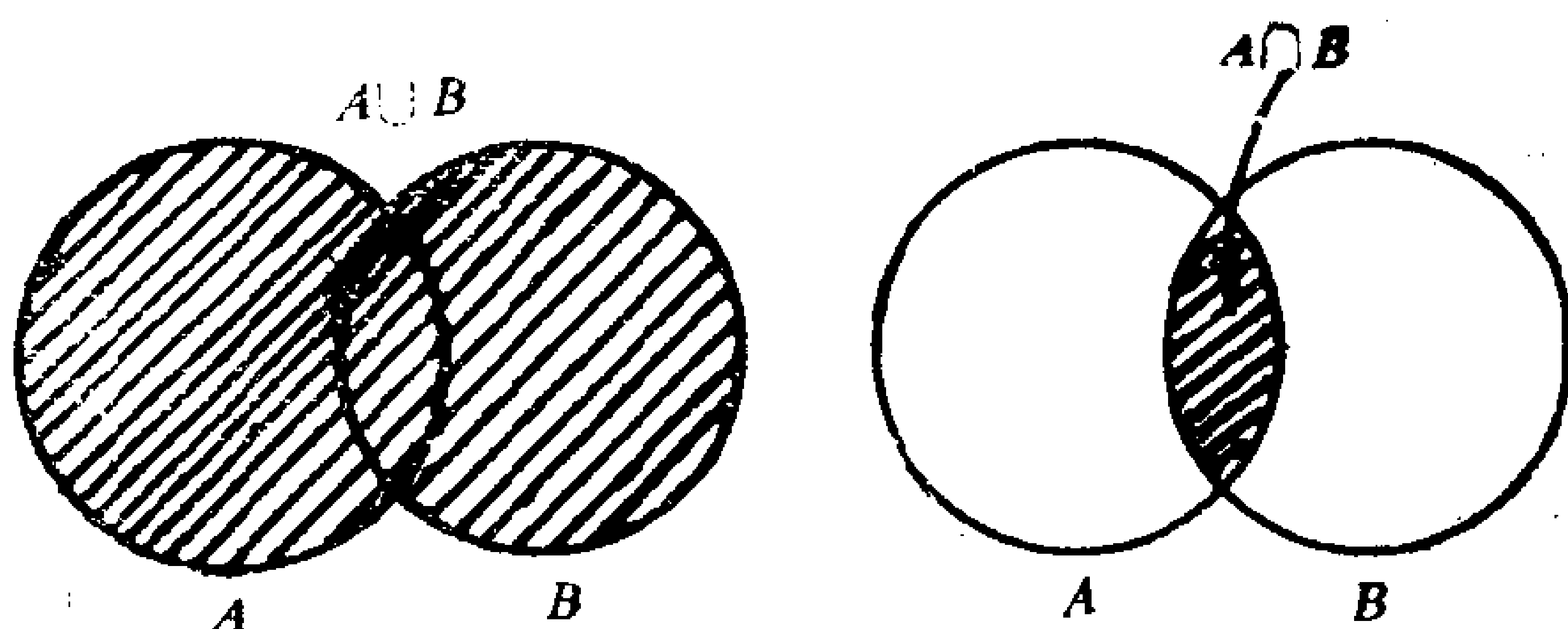
$A\subset B$　　A为B之子集(A中每个元素均为B的元素)，或写作$B\supset A$.

$A\subset B$, $A\neq B$, A是B的真子集（A是B的子集，且B中至少有一元素不在A中）.

$A\bigcup B=\{x \mid x\in A或x\in B\}$　　A与B的并集.（附图1）

$A\bigcap B=\{x \mid x\in A \quad 且 \quad x\in B\}$　　A与B的交集.（附图1）

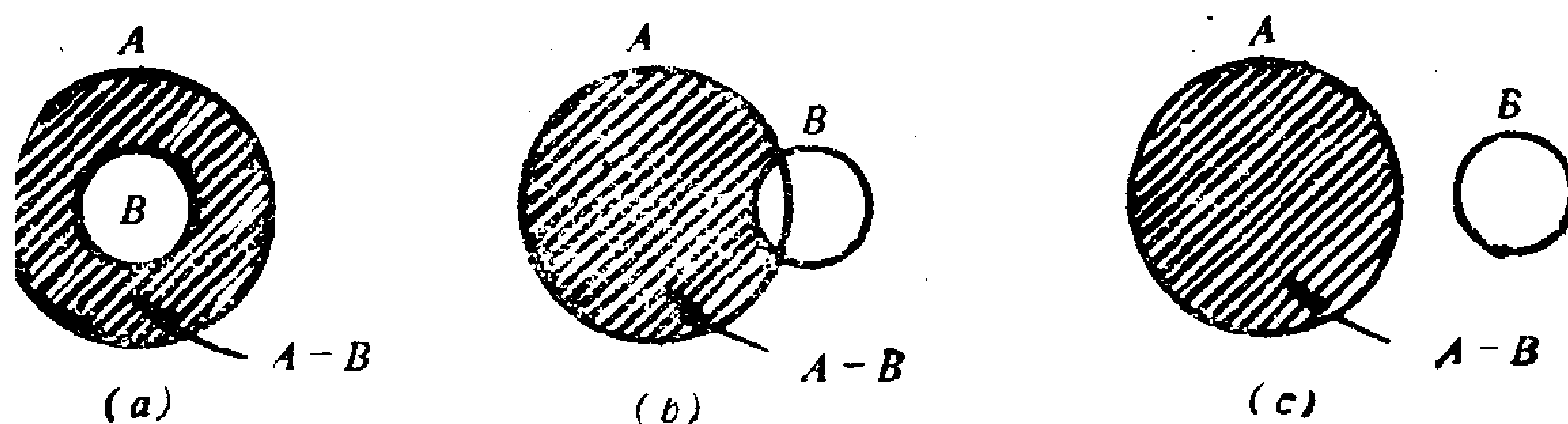
$A\bigcap B=\phi$　A与B为不相交的两集（A与B没有公共元



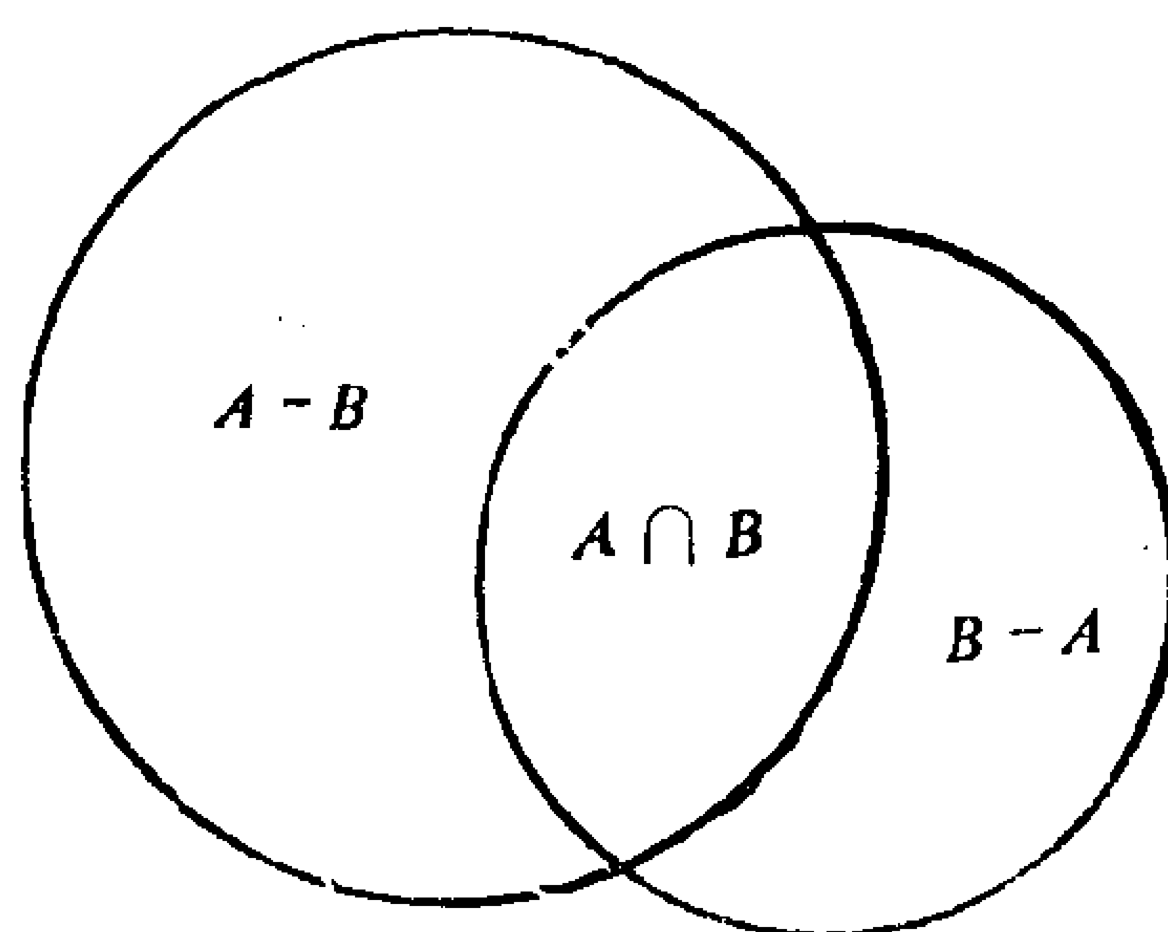
附图 1　集A与B的并$A\cup B$，及交$A\cap B$（阴影部分）

素）

$A-B\quad=\{x\,|x\in A$且$x\notin B\}$，A与B的差集（B可以是A的子集，也可不是.）（附图 2 、 3）



附图 2　集A与B的差集$A-B$（阴影部分）
$(a)B\subset A$　$(b)A\cap B\neq\phi$　$(c)A\cap B=\phi$



附图 3　差集$A-B$与$B-A$及集A与B的交$A\cap B$

$A^c = X - A$为A在X中的余集（这里$A \subset X$，为防止混淆，可用记号$C_X A$）

集合运算满足下列诸公式：

(1a) $A \cup A = A$ $\qquad A \cap A = A$

(1b) $A \cup B = B \cup A$ $\qquad A \cap B = B \cap A$

(1c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ 记作$A \cup B \cup C$

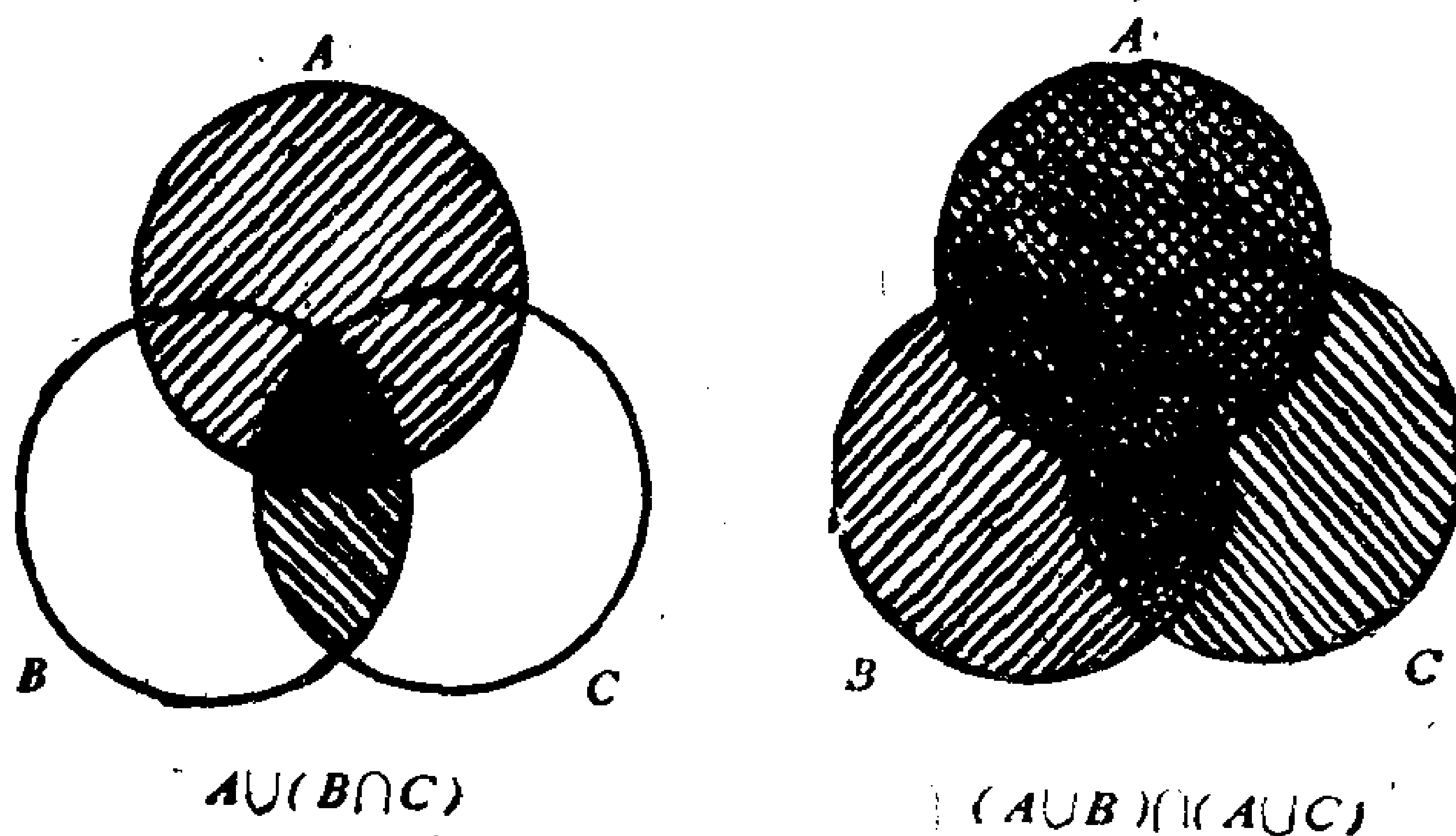
(1d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\qquad$ 记作$A \cap B \cap C$

(1e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ （附图4）

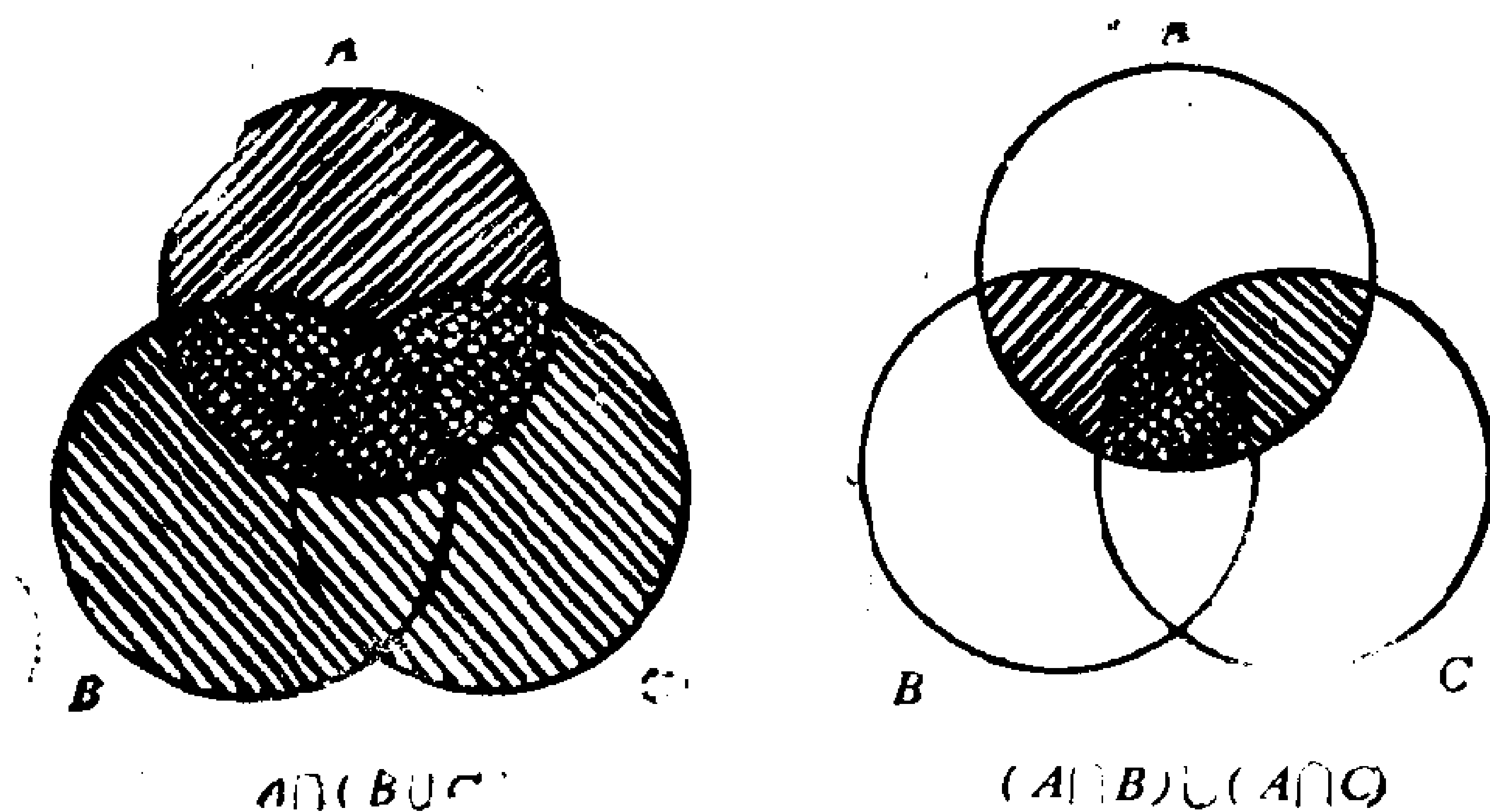
(1f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ （附图5）

(1g) $A \cap B \subset A$ $\qquad A \cap B \subset B$

(1h) $A \cup B \supset A$ $\qquad A \cup B \supset B$



附图4　公式(1e)



附图 5　公式(1f)

因此

$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A$

(2) $A\subset C$且$B\subset C\Longleftrightarrow A\cup B\subset C$

$C\subset A$且$C\subset B\Longleftrightarrow C\subset A\cap B$

(3) $(A^c)^c=A$　　$X^c=\phi$　$\phi^c=X$.

(4) 狄·摩根 (De Morgan) 律 (A与B为X的任意子集)

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

显然

$A\subset B\Longleftrightarrow A^c\supset B^c$

(5) $A\cap B=\phi\Longleftrightarrow A\subset B^c\Longleftrightarrow B\subset A^c$

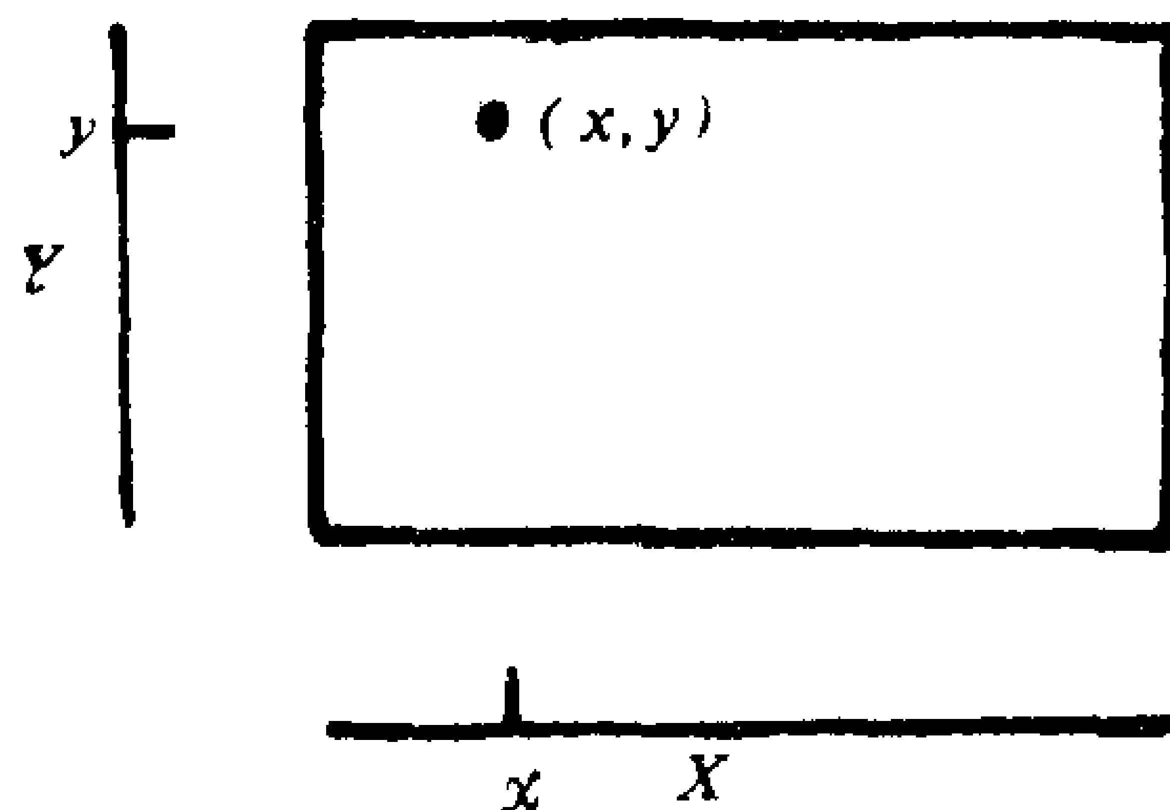
$A\cup B=X\Longleftrightarrow A^c\subset B\Longleftrightarrow B^c\subset A$.

对给定集S其所有子集组成之集，称为S的幂集记作

$P(S)$.

设X，Y为二非空集. $x\in X$ 且 $y\in Y$的所有有序对(x, y)所成之集称为X与Y的笛卡儿乘积，记为$X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x, y)\mid x\in X, y\in Y\}$$ (附图6)



附图6 X与Y的笛卡儿乘积$X\times Y$的图示

集M称为可数的，是指集M含有有限多个元素，或M中的每个元素可对应唯一的正整数，且每一正整数对应唯一的M中元素.

非可数集称为不可数集.

A1.2 映射

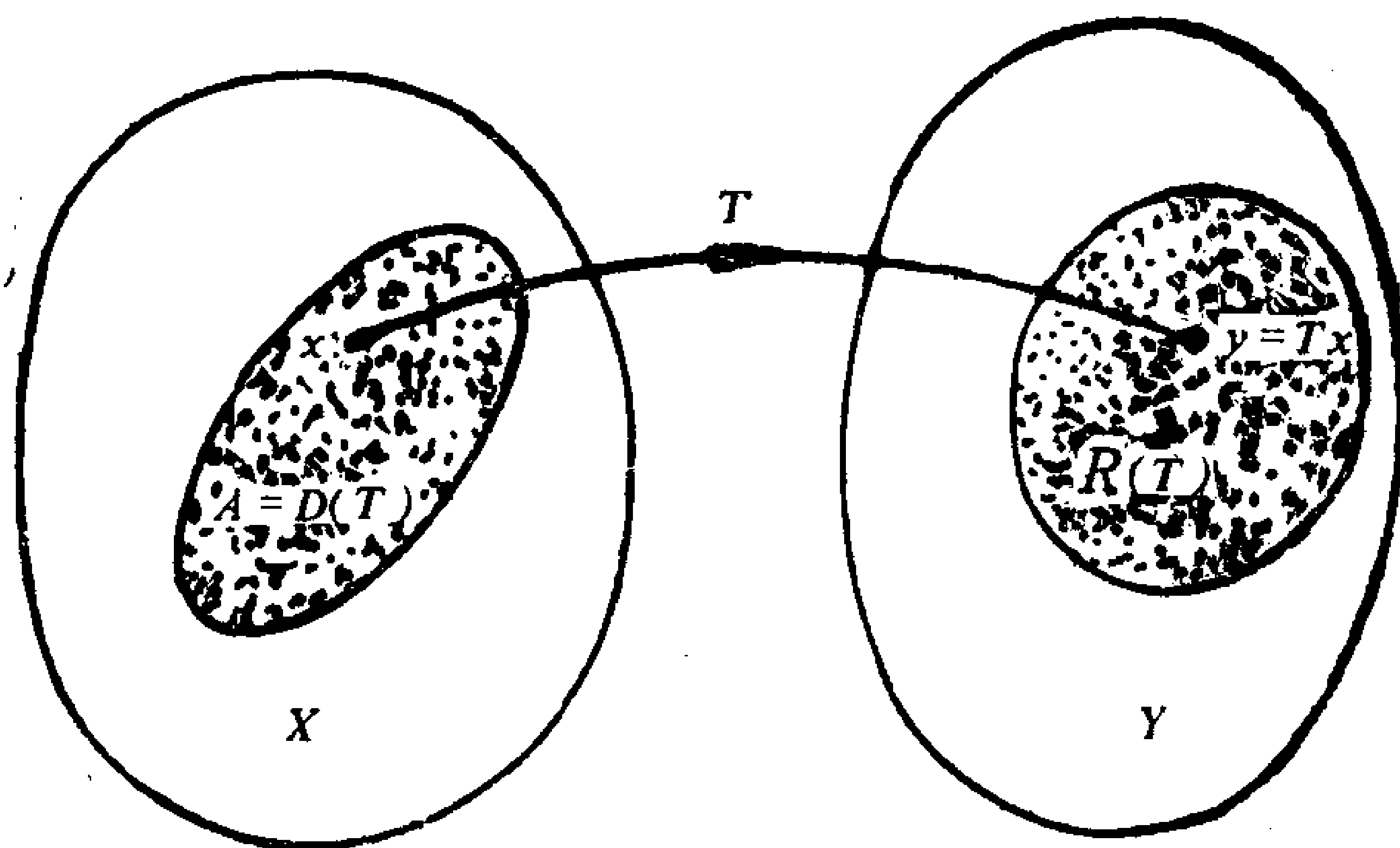
设X，Y为两非空集，且A为X一子集，若对每个$x\in A$，均有一确定的$y\in Y$与之对应，就得到了A到Y里的映射T，记为$y=Tx$，并称y为x关于T的象. 集A叫映射T的定义域，记为$D(T)$，映射T写为

$$T: D(T)\longrightarrow Y$$

$$x\longmapsto Tx$$

T的值域$R(T)$为所有象的集，即

$$R(T)=\{y\in Y|\ y=Tx,\ x\in D(T)\}$$ (附图 7)



附图 7　映射的图示

对于$D(T)$的任意子集M，其象$T(M)$为集：

$$T(M)=\{Tx\ |x\in M\}$$

因此　$T[D(T)]=R(T)$

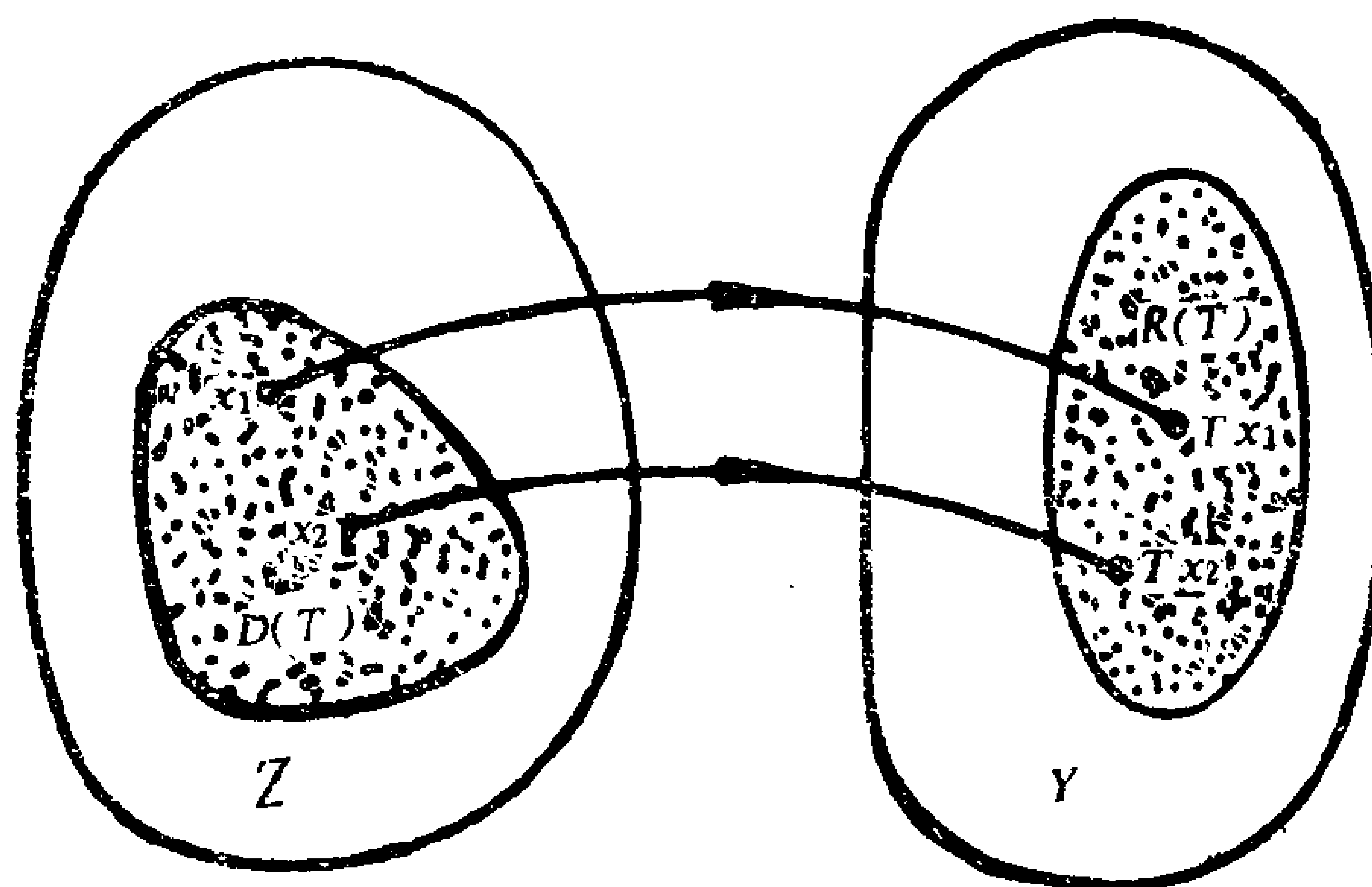
对于某一$y_0\in Y$，使得$Tx=y_0$成立的所有$x\in D(T)$的集称做y_0的原象．类似地，子集$Z\subset Y$的原象是使$Tx\in Z$的所有$x\in D(T)$的集．$y_0\in Y$的原象可能是空集、单点集、或是$D(T)$的子集，这与y_0及T有关．

如果对于任意的x_1，$x_2\in D(T)$

$$x_1\neq x_2\qquad \text{蕴涵}\quad Tx_1\neq Tx_2$$

则称映射T是单射，或称T是一对一映射．也就是说，$D(T)$中不同点有不同的象．因此，$R(T)$中任意点的原象是单一的点（附图 8）

如果$R(T)=Y$则称



附图 8　单射的图示

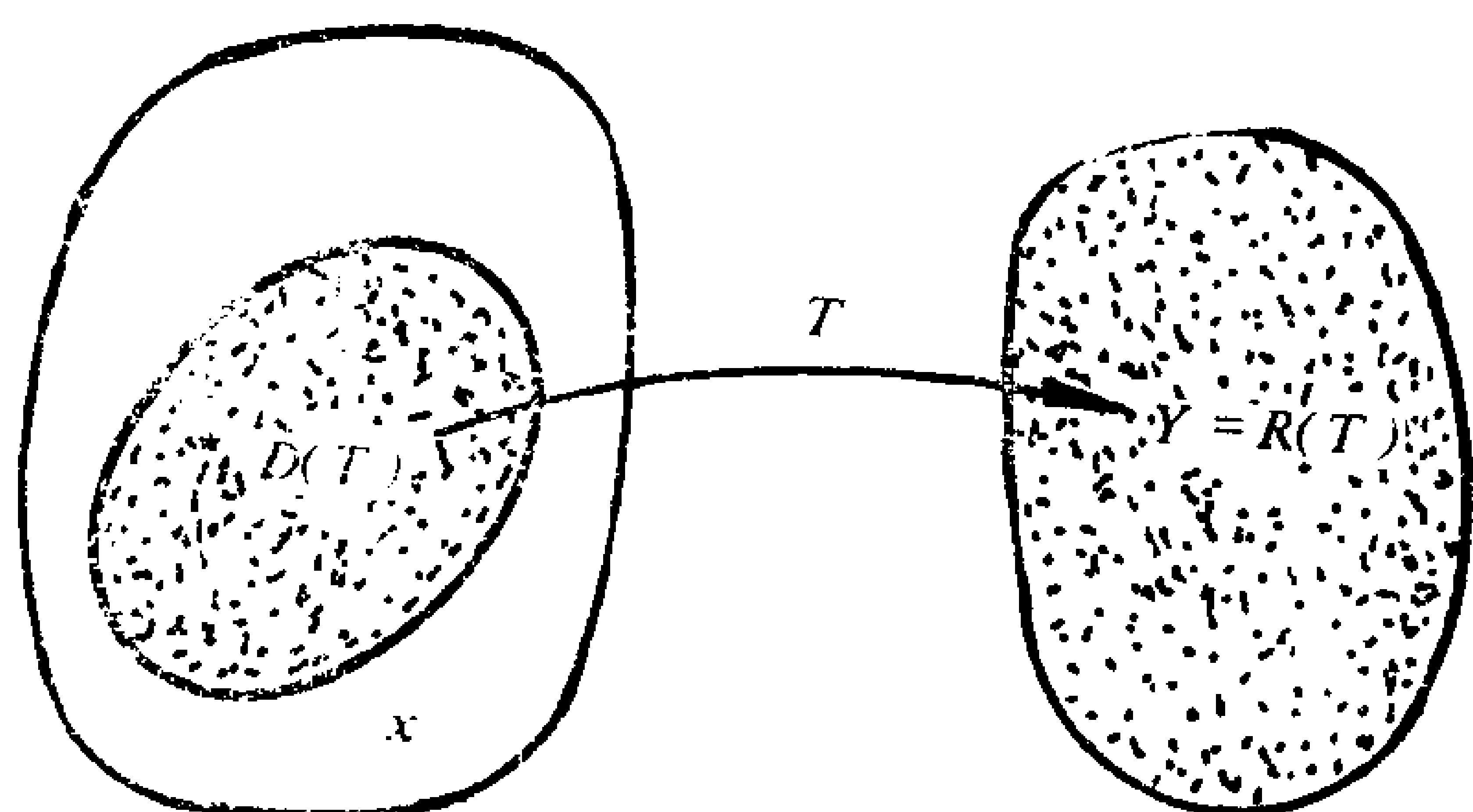
$$T: D(T) \to Y$$

是满射，或称T是$D(T)$到Y上的映射．（附图 9）

显然　$D(T) \longrightarrow R(T)$

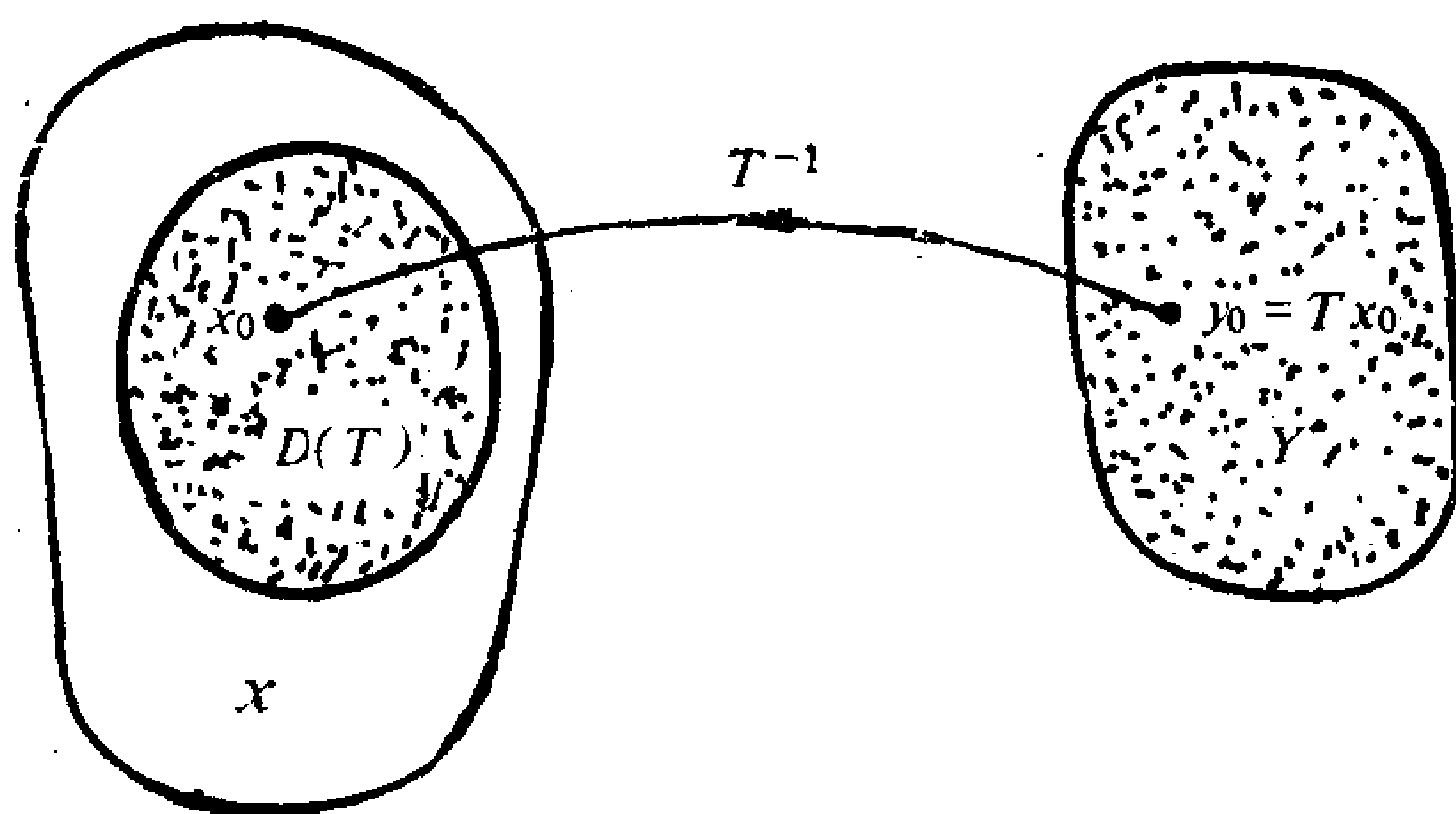
$x \longmapsto Tx$

总是满射的



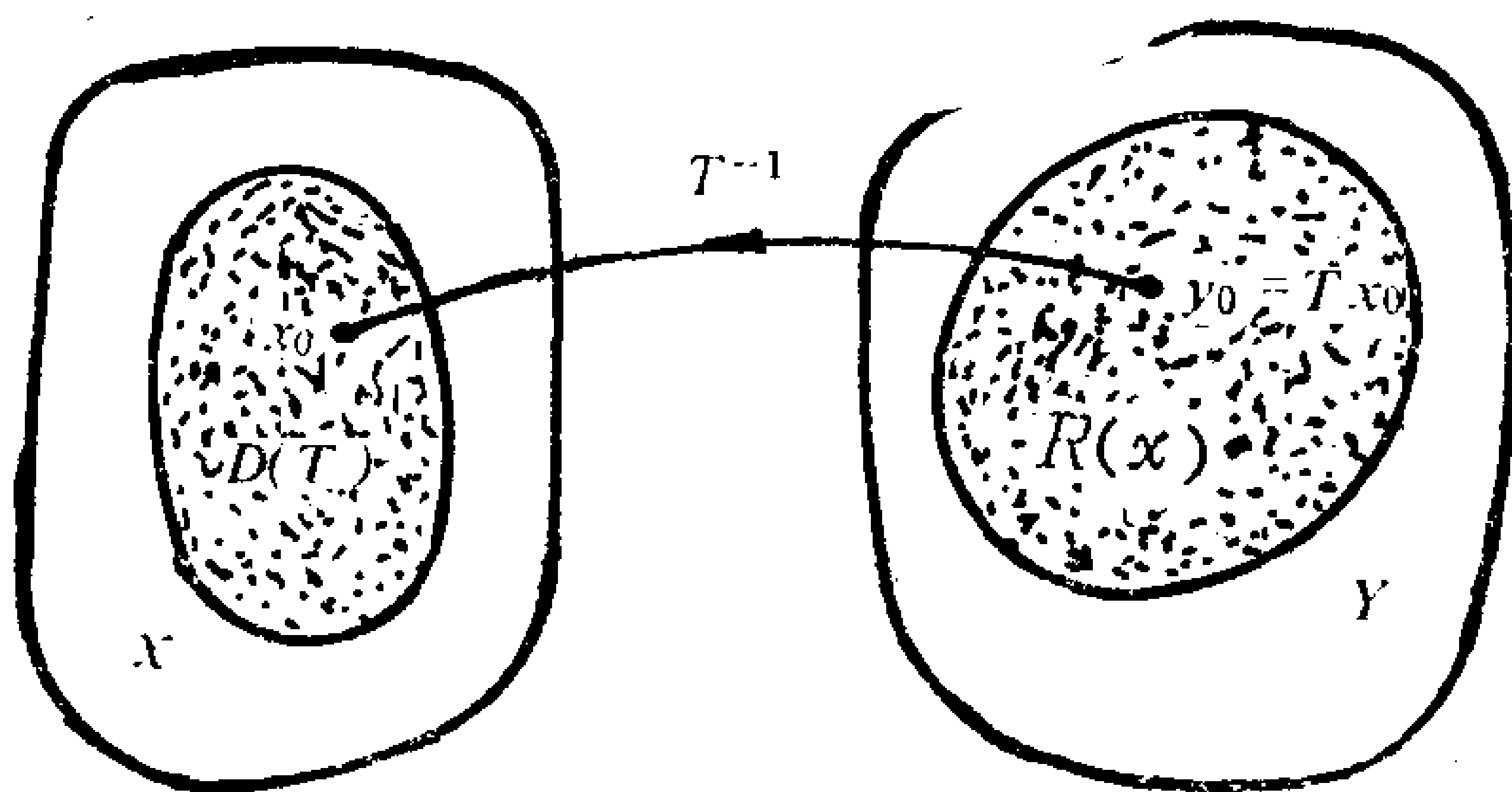
附图 9　满射图示

如果T既是单射又是满射，则称T是双射．此时T：$D(T)\to Y$的逆映射T^{-1}是按$Tx_0\longmapsto x_0$定义的映射$T^{-1}:Y\to D(T)$．即T^{-1}使每个$y_0\in Y$映射成$x_0\in D(T)$，且x_0满足$Tx_0=y_0$(附图10)



附图10　双射T的逆映射T^{-1}：$Y\to D(T)\subset X$

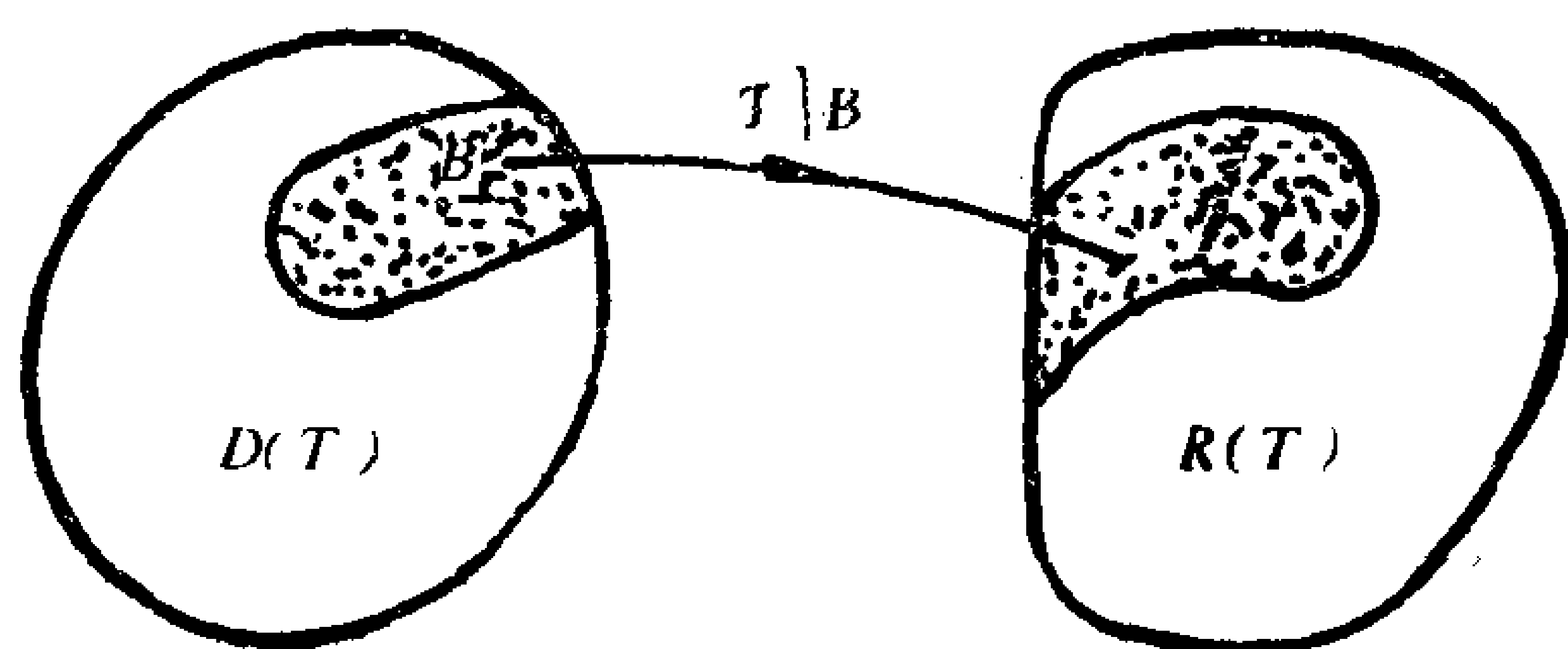
因而对于一单射$T:D(T)\to Y$的逆映射$T^{-1}:R(T)\to D(T)$定义为$y_0\longmapsto x_0$，这里$y_0=Tx_0$（附图11）



附图11　单射T的逆映射T^{-1}：$R(T)\to D(T)\subset X$

设T_1，T_2为两映射，若$D(T_1)=D(T_2)$且对于所有的$x\in D(T_1)=D(T_2)$ 有$T_1x=T_2x$则称T_1与T_2相等.

如果$T:D(T)\to Y$，且$B\subset D(T)$，则对于$x\in B$由$T|_Bx=Tx$所定义的映射$T|_B:B\to Y$称为T在B上的限制(附图12)



附图12 映射T在子集$B\subset D(T)$上的限制$T|_B$

设$\widetilde{T}$: $C\to Y$，$T:D(T)\to Y$ 若$D(T)\subset C$且对于每个$x\in D(T)$有

$$\widetilde{T}x=Tx$$

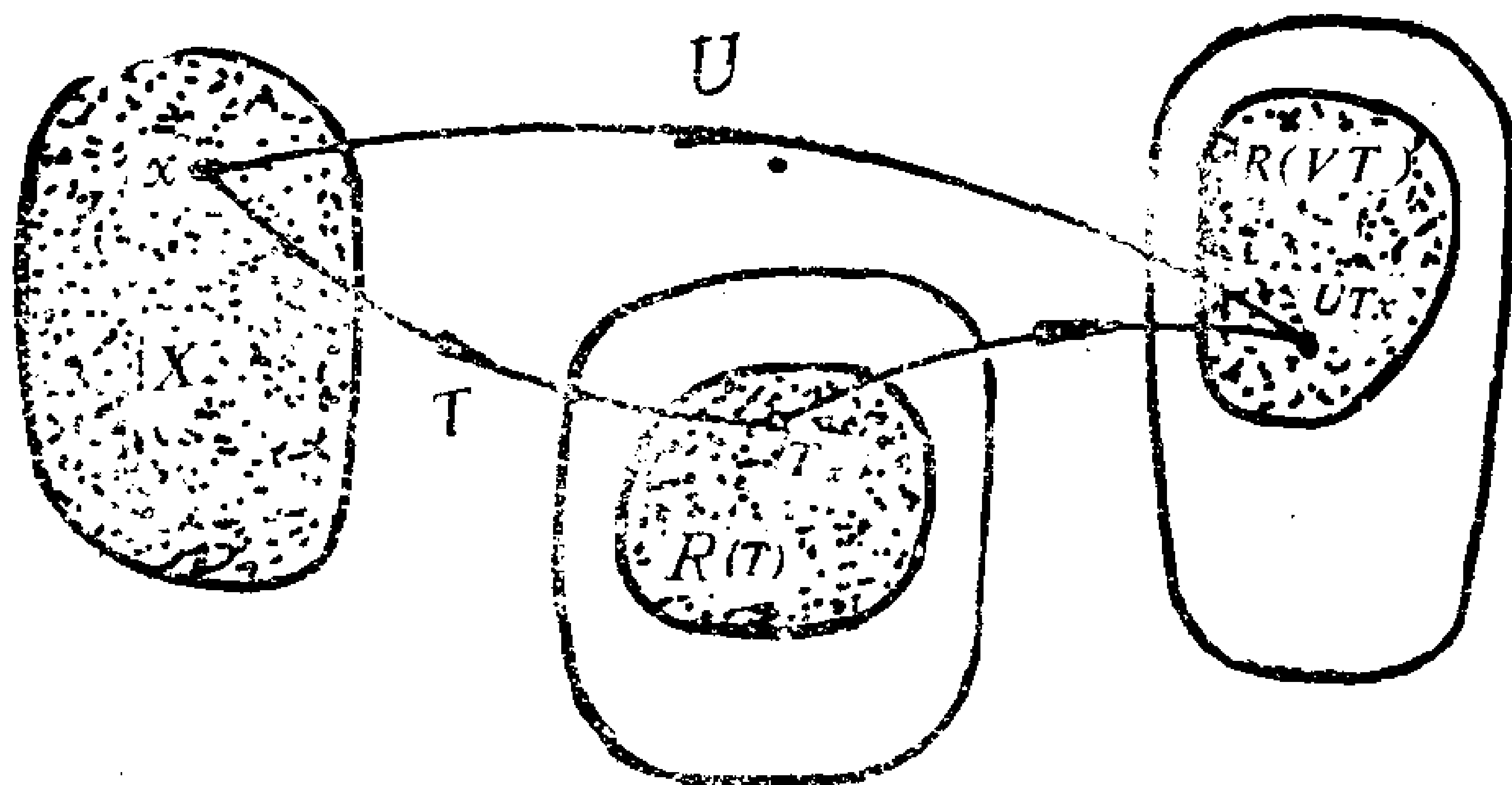
则称$\widetilde{T}$是T在C上的扩张．又若$D(T)$是$D(\widetilde{T})$的真子集，即$D(\widetilde{T})-D(T)\neq\phi$，则称$\widetilde{T}$是$T$的真扩张.

设T: $X\to Y$，$U:Y\to Z$．那么，由

$$x\longmapsto U(Tx) \qquad (x\in X)$$

所定义的X到Z里的映射$X\to Z$称为U与T的复合或乘积，记为UT或$U\circ T$ (附图13)

注意：一般说UT与TU是两不同的映射，有时TU可能没有意义



附图13 两映射的复合

A1.3 族（集 族）

若将每个正整数n对应一实数或复数，就得到一实或复的序列，这可看作$N=\{1, 2, \cdots\}$到实数或复数里的映射．x_n是n的象．集N称作序列的指标集．

将指标集N推广到任意非空集I（有限的、可数的或不可数的）并将I映射到任意给定的非空集X里，这样得到X的元素族，记作$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$或简记为(x_α)．其中$x_\alpha\in X$是$\alpha\in I$的象．注意：对于I里的某些$\alpha\neq\beta$可能有$x_\alpha=x_\beta$．集I称为族的指标集．

如果X的元素均为一已知集的子集，则可得一子集族$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$，其中B_α是α的象．

族(B_α)的并$\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是至少属于某一个$B_\alpha$的元素所组成的集．交$\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$为一集，其元素属于每一$B_\alpha$，$\alpha\in I$．特别在$I=$

N时可记作

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} B_\alpha \quad 及 \quad \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} B_\alpha$$

在$I=\{1, 2\}$时记作$B_1 \cup B_2$及$B_1 \cap B_2$.

对于任意的非空子集$M \subset X$，总可以找到X的一个元素族，这些元素的集为M. 例如：用M到X的自然映射，即X上的恒等映射$x \longmapsto x$并限制在M上得到.

A1.4 等价关系

设X，Y为给定的两非空集，笛卡儿乘积$X \times Y$的任意子集R称做一（二元）关系.$(x, y) \in R$可记作$R(x, y)$.

如果对集X上一关系$R \subset X \times X$满足：

对所有的$x \in X$有$R(x, x)$ （自反性）

$R(x, y)$ 蕴涵$R(y, x)$ （对称性）(1)

$R(x, y)$与$R(y, z)$蕴涵$R(x, z)$ （传递性）

则称R是X上一等价关系. 此时$R(x, y)$通常记作$x \sim y$（读做x等价于y），这样(1)式成为：

$$x \sim x$$

$$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$$

$$x \sim y 且 y \sim z \Longrightarrow x \sim z$$

等价于$x_0 \in X$的一切$y \in X$所成之集称作x_0的等价类，任何这样的y称为这个类的一个代表. 关于R的等价类构成X的一个划分.

由定义可知：非空集X的一个划分是X的一非空子集族，且族中各子集两两不相交，这些子集的并等于X.

A1.5 紧 性

设M是集X的子集，$(B_\alpha)_{\alpha\in I}$为X的一子集族．如果

$$M\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

则称(B_α)是M的一个复盖．

特别是：若(B_α)为X的一复盖，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha=X.$$

如果(B_α)只是由有限多个集B_α组成，则称其为有限复盖．如果$X=(X,J)$为一拓扑空间（例如：度量空间．参看§1.3），当所有B_α均为开集时，称(B_α)为开复盖．

一拓扑空间$X=(X,J)$称作

(a) 紧的，如果X的每个开复盖含有X的一个有限复盖．

(b) 可数紧的：如果X的每个可数开复盖含有X的一个有限子复盖．

(c) 列紧的：如果X的每个序列有一收敛的子序列．

子集$M\subset(X,J)$分别称作紧的（可数紧的，列紧的）是指将M看成一子空间(M,J_M)，而这个子空间是紧的（可数紧的，列紧的）．这里，M上的拓扑J_M是由所有子集$M\cap A$ $(A\in J)$组成的．

对于度量空间，这三种紧性概念是等价的．

A1.6 上确界与下确界

设E是实直线R的子集，若E有一上界（即存在$b\in R$,对所有$x\in E$有$x\leqslant b$）则称E是上有界的．R中每一上有界的非空子集E存在上确界（或最小上界）．记作

$$\sup E$$

即：$\sup E$为E的一个上界，且对于E的每个上界b均有
$\sup E \leqslant b$.
对于任意非空子集$C \subset E$有

$$\sup C \leqslant \sup E$$

类似地，如果E有一下界（即存在$a \in R$，对有所$x \in E$有$x \geqslant a$)则称E是下有界的，R中每一下有界的非空子集E存在下确界（或最大下界）．记作

$$\inf E$$

即：$\inf E$为E的一个下界，且对于E的每个下界a均有$\inf E \geqslant a$，且对任意非空子集$C \subset E$有

$$\inf C \geqslant \inf E$$

如果E既上有界又下有界则E是有界的．当$E \neq \phi$时．

$$\inf E \leqslant \sup E$$

如果映射$T: D(T) \to R$的值域$R(T)$（假定非空）是上有界的，其上确界表示为：

$$\sup_{x \in D(T)} Tx$$

如果$R(T)$是下有界的，其下确界表示为：

$$\inf_{x \in D(T)} Tx$$

A1.7　**柯西(Cauchy)收敛准则**

设(x_n)为一数列（实的或复的），a是一数，若对于每个给定的$\varepsilon > 0$，存在无穷多个n，使得

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则a称做(x_n)的极限点．

Balzano－Weierstrass定理指出：任何有界数列至少存在一个极限点．（这里的数列，必须无穷多项）

数列(x_n)如果存在一数x，对于每个给定的$\varepsilon > 0$，除去有限个n外，均有

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

则称(x_n)为收敛的，x为数列(x_n)的极限.

收敛数列的极限是唯一的，且此极限是该数列的唯一极限点.

柯西(Cauchy)收敛定理. 数列(x_n)为收敛的当且仅当对于每个$\varepsilon > 0$，存在一个N，当m、$n > N$时有：

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \tag{1}$$

证明：(a)若(x_n)收敛，且c是其极限，则对于每个$\varepsilon > 0$，存在一个N，当$n > N$时，有

$$|x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

利用三角不等式，对于m、$n > N$得

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - c| + |c - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b)反之，假定(1)成立，给定$\varepsilon > 0$，选定满足(1)的$n = k > N$，当$m > N$时每个x_m都落在以x_k为中心、ε为半径的邻域D内，因为除去有限多个$x_n \notin D$外，(x_n)中其余各数均在D内，所以数列(x_n)有界. 根据Bolzano-Weierstrass定理(x_n)有一极限点a. 又由(1)成立，对于每个$\varepsilon > 0$存在一N^*当$m, n > N^*$时有$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 今选一固定的$n > N^*$，使得$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 当$m > N^*$时由三角不等式得

$$|x_m - a| \leqslant |x_m - x_n| + |x_n - a| < e$$

这就证明(x_n)收敛且极限为a.

A1.8 群

$G=(G,\cdot)$称做群，是指元素为x，$y\cdots$的集G，与映射

$$G\times G\to G$$

$$(x,y)\to z\in G$$ （通常z写成x与y的乘积形式xy）

且满足下列诸公理：

$(G1)$：结合律：对于所有的$x,y,z\in G$

$$(xy)z=x(yz)$$

$(G2)$：存在单位元e，即存在一元素e，使得对所有$x\in G$，有

$$xe=ex=x$$

$(G3)$：x的逆元存在，对于每个$x\in G$，在G中存在一逆元x^{-1}，使得

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e$$

e是唯一的．对于每个$x\in G$，逆元x^{-1}也是唯一的。

如果G还满足

$(G4)$交换性：对于所有$x,y\in G$

$$xy=yx$$

则称G是可换群或阿贝尔(Abelian)群。

附录Ⅱ 习题答案

习 题 1.1

2．不是度量，三角不等式不成立（例如，取$x=1$，$z=0$，$y=-1$时$(M4)$，不成立．）

3．$(M1)$至$(M3)$显然成立．由

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{\frac{1}{2}}+|z-y|^{\frac{1}{2}})^2,$$

得到$(M4)$．

4．含两个点之集$\{x,y\}$上；其度量d为，$d(x,x)=0$，$d(y,y)=0$．$d(x,y)=k>0$；含一个点之集$\{x\}$上，其度量d为，$d(x\cdot x)=0$。

5．(1)$k>0$；(2)$k=0$．

6．是离散度量（参见例5）

7．$(M1)$与$(M3)$显然成立．因为x,y在$[a,b]$上连续，则$\widetilde{d}(x,y)=0$当且仅当对于所有$t\in[a、b]$，有$|x(t)-y(t)|=0$，即$(M2)$成立．$(M4)$由

$$\widetilde{d}(x,y)=\int_a^b|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|\,dt$$

$$\leqslant\int_a^b|x(t)-z(t)|\,dt+\int_a^b|z(t)-y(t)|\,dt$$

直接得证.

8．$(M1)$至$(M3)$显然成立．下面证明$(M4)$，当x、y、z不全相等时，有$d(x,y)\leqslant 1$，
$d(x,z)+d(z,y)\geqslant 1$，当$x=y=z$时，$(M4)$中等号成立.

9．X中元素的个数为$2^3=8$．d可能取的值是0、1、2、3、易验证$(M1)$至$(M4)$成立.

10．略.

11．$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,w)+d(w,y)$，且.
$d(\omega,y)=d(y,w)$．因此，$d(x,y)-d(z,\omega)\leqslant d(x,z)+d(y,w)$再将$x$与$z$交换，$y$与$w$交换得.

$$d(z,w)-d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,w)$$

两边同乘以-1，$-d(x,z)-d(y,w)\leqslant d(x,y)-d(z,w)$
从而结论得证.

12．因为$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$蕴涵

$$d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y)$$

以及$d(y,z)\leqslant d(y,x)+d(x,z)$蕴涵

$$-d(x,y)\leqslant d(x,z)-d(y,z)$$

13．令$z=y$，则，$d(x,y)\leqslant d(y,x)+0$
再将x与y交换

14．在$(M4)$中，令$y=x$.

习　题　1.2

1．证明的思路和方法与1.2-5中的一样.

2．取$p=q=2$，$\alpha^2=a$，$\beta^2=b$.

3．取

$$\eta_j=\begin{cases}1 & 1\leqslant j\leqslant n\\ 0 & j>n\end{cases}$$

4. $x=(\xi_n), \xi_n=\begin{cases}1, & n=1\\ \dfrac{1}{\ln n}, & n=2,3,\cdots\end{cases}$

对于任意固定的$p\geqslant 1$，从某个n以后.

$(\ln n)^{-p}>\frac{1}{n}$，且调和级数$\sum\frac{1}{n}$发散.

5. $x=(\frac{1}{n})\notin l^1$，但$(\frac{1}{n})\in l^p\ (p>1)$，这是因为当$p>1$时，级数$\sum n^{-p}<\infty$.

6. $\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)\leqslant\sup\limits_{x,y\in B}d(x,y)$

7. 由于$\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)=0$蕴涵$d(x,y)=0$从而，$x=y$. 反之是显然的.

8. $D(A,B)=0$不蕴涵$A=B$. 三角不等式不成立，例如，取A，B，使$D(A,B)>0$，并令$C=A\cup B$.

9. 逆命题不成立.

10. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$蕴涵

$$\begin{aligned}D(x,B)&=\inf_{z\in B}d(x,z)\leqslant\inf_{z\in B}[d(x,y)+d(y,z)]\\&=d(x,y)+\inf_{z\in B}d(y,z)\\&=d(x,y)+D(y,B)\end{aligned}$$

因此，$D(x\ B)-D(y,B)\leqslant d(x,y)$

交换x与y，并两边同乘以-1，于是，

$$-d(x,y)\leqslant D(x,B)-D(y,B)$$

11. 易验证$(M1)$至$(M3)$成立. 由于d满足$(M4)$并利

用1.2-5证明中的方法得

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leqslant\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

即 $\widetilde{d}$ 满足$(M4)$，从$\widetilde{d}(x,y)<1$得出X的有界性。

12. 若$x,y\in A$或$x,y\in B$. 则分别有$d(x,y)\leqslant\delta(A)$或$d(x,y)\leqslant\delta(B)$. 若$x\in A$, $y\in B$.对于固定的$a\in A$, $b\in B$,有.

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leqslant d(x,a)+d(a,b)+d(b,y)\\&\leqslant\delta(A)+d(a,b)+\delta(B)\end{aligned}$$

因此，$\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+d(a,b)+\delta(B)$

13. 略.

14. 对于d_1, d_2利用$p=2$情况下的Minkowski不等式得.

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(x,y)&=\left[\sum_{j=1}^{2}d_j(x_j,y_j)^2\right]^{1/2}\\&\leqslant\left[\sum_{j=1}^{2}(d_j(x_j,z_j)+d_j(z_j,y_j))^2\right]^{1/2}\\&\leqslant\left[\sum_{j=1}^{2}d_j(x_j,z_j)^2\right]^{1/2}\\&\quad+\left[\sum_{j=1}^{2}d_j(z_j,y_j)^2\right]^{1/2}\\&=\widetilde{d}(x,z)+\widetilde{d}(z,y)\end{aligned}$$

15.因为$\approx{d}(x,y)=0$当且仅当$d_1(x_1,y_1)=0$与$d_2(x_2,y_2)=0$，而$d_1(x_1,y_1)=d_2(x_2,y_2)=0$蕴涵$x=y$. 由于

$$\max_{k=1,2}d_k(x_k,y_k)\leqslant\max_{k=1,2}(d_k(x_k,z_k)+d_k(z_k,y_k))$$

$$\leqslant \max_{j=1,2} d_i(x_i, z_i) + \max_{i=1,2} d_j(z_j, y_j)$$

可证得$(M4)$.

习 题 1.3

1. (a)设任意$x \in B(x_0; r)$. 则 $d(x, x_0) = a < r$于是,

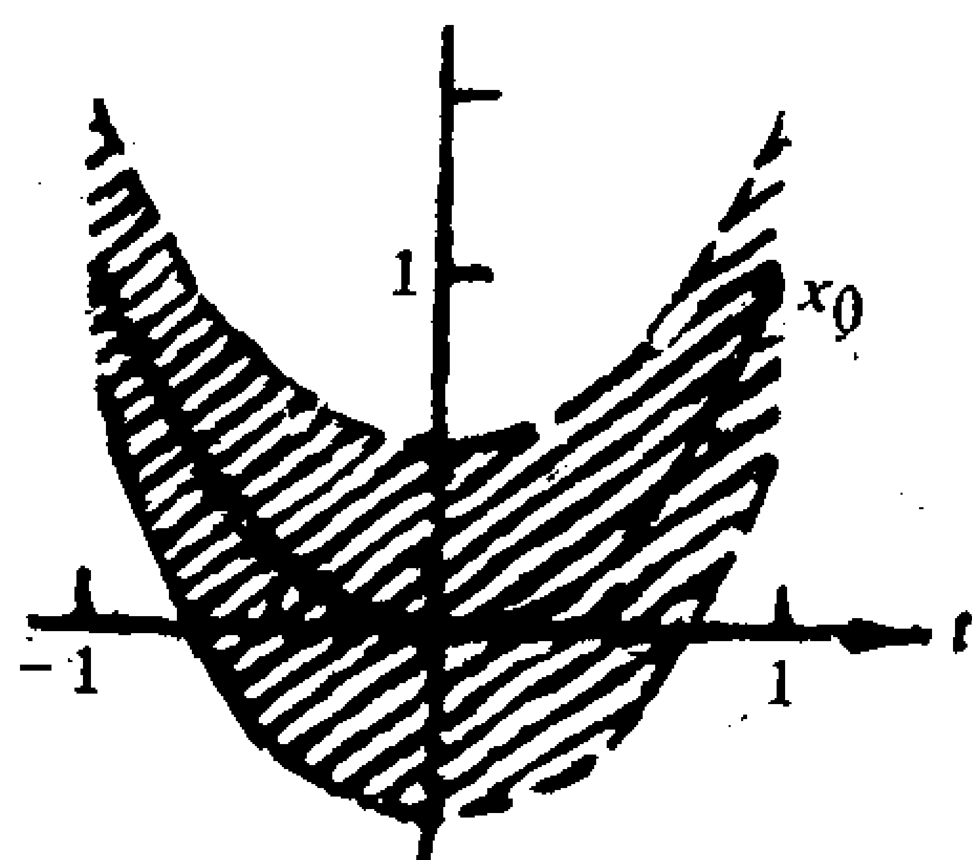
$B\left(x; \frac{r-a}{2}\right) \subset B(x_0; r)$.

(b) 因为任意$y \notin \widetilde{B}(x_0; r)$, 则$d(y, x_0) = a > r$, 所以,

$B\left(y; \frac{a-r}{2}\right) \subset \widetilde{B}(x_0; r)^c$. 即证明了$\widetilde{B}(x_0; r)^c$是开的.

从而证得$\widetilde{B}(x_0; r)$是闭的.

2. R上的开球$B(x_0; 1)$是开区间$(x_0 - 1, x_0 + 1)$, C上的开球$B(x_0; 1) = \{z | d(x_0, z) < 1, z \in C\}$. $C[-1, 1]$上的开球 $B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$, $x_0 = t^2$, 是界于曲线$x_1 = t^2 - \frac{1}{2}$和$x_2 = t^2 + \frac{1}{2}$之间的$[-1, 1]$上的连续函数全体所构成的开区域.



附图14 $C[-1, 1]$上开球$B(x_0, 1)$

3. $r = \sqrt{2}$.

4. 若A是开球B_a的并$A = \bigcup_{a \in I} B_a$, 则每个$a \in A$, 存在开

球B_a，使得$a\in B_a=\{z\,|d(x_a,z)<r_a\}$. 于是$d(x_a,a)=\varepsilon<r_a$，取$\eta=\frac{1}{2}(r_a-\varepsilon)$，$B(a;\eta)\subset B_a\subset A$. 因此，$A$是开集.反过来，若$A$是开集，则对于每个$a\in A$，存在开球$B(a;r)\subset A$，从而，$A$可表示成这些开球之并，即$A=\bigcup\limits_{a\in A}B(a;r)$.

5. 设A是X的任意子集，对于任意$a\in A$，开球$B\left(a;\frac{1}{2}\right)=\{a\}\subset A$. 因此证得$A$是开集. 同理可证$A^c$是开集. 即证得$A$是闭集.

6. 若存在x_0的一个邻域只含A的有限个点$y_1,\cdots,y_n$，令$r=\min\{d(x_0,y_1)\cdots,d(x_0,y_n)\}$则$B(x_0;r/2)$不含$A$中点$y\neq x_0$.

7. (a)整数全体；(b)R；(c)C；(d)$\{z\,|\,|z|\leqslant 1\}\subset C$.

8. 在多于一个点的离散度量空间X中，$\{x_0\}=B(x_0;1)=\overline{B(x_0;1)}\neq\widetilde{B}(x_0;1)=X$.

9. 略

10. 若$x\in\overline{A}$，则$x\in A$，或x的每个邻域含A的点$a\neq x$. 因此$D(x,A)=0$；若，$D(x,A)=0$，则$x\in A$或x的每个邻域必含A的点$a\neq x$. 即$x\in\overline{A}$.

11. (a)$\{-1,1\}$；(b)R；(c)圆$\{z\,|\,|z|=1\}\subset C$.

12. 在$c\in[a,b]$值为1，在$[a,b]-\{c\}$上值为0的函数全体是不可数的，且它们中任何两个函数的距离均为1，因此，$B[a,b]$不可能有稠密的可数子集.

13. 设X是可分的，则X有一可数稠密子集Y. 令$x\in X$，

且$\varepsilon>0$. 因$\overline{Y}=X$，那么，$x\in\overline{Y}$，因此，x的ε一邻域$B(x;\varepsilon)$含一个$y\in Y$，且$d(x,y)<\varepsilon$. 反之，若X有一可数子集Y具有习题中的性质. 则每个$x\in X$，或是Y的点，或是y的聚点. 因此,$\overline{Y}=X$.

14. 设T是连续的，且A是任意闭子集M的原象，则M^c有原象A^c，由定理1.3-6知，A^c是开的.于是证得A是闭的. 反之，若M有闭的原象A，M^c及A^c均是开的. 根据定理1.3-6，则T是连续的.

15. 由$x(t)=\sin t$定义的连续映射$R\to R$,将开集$(0,2\pi)$映射到闭集$[-1,1]$上.

习 题 1.4

1. 因为$d(x_n,x)<\varepsilon(n>N)$蕴涵$d(x_{n_k},x)<\varepsilon(n_k>N)$

3. 若(x_n)是Cauchy序列，存在n_0，对于所有$n>n_0$，有$d(x_n,x_{n_0})<1$，因此，对于所有n,

$$d(x_n,x_{n_0})\leqslant\max\{1,d(x_1,x_{n_0}),\cdots d(x_{n_0-1},x_{n_0})\}$$

6. 利用$\tilde{\tilde{d}}(x,y)\leqslant\tilde{d}(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant 2\tilde{\tilde{d}}(x,y)$. 可证得所要证的结论.

7. 如果(z_n)是C中的任意Cauchy序列，其中$z_n=x_n+iy_n$，则(x_n)和(y_n)是R中的Cauchy序列，这是由于，
$|x_m-x_n|\leqslant|z_m-z_n|$，$|y_m-y_n|\leqslant|z_m-z_n|$
因此，$x_n\to x$，$y_n\to y$. 令$z=x+iy$，那么，因为

$|z_n-z|=|x_n-x+i(y_n-y)|\leqslant|x_n-x|+|y_n-y|\to 0$所以$z_n\to z$.

习 题 1.5

1. 利用定理1.4-8证明之.

2. 设(x_m)是X中任意Cauchy序列，$x_m=(\xi_1^{(m)}\cdots,\xi_n^{(m)})$. 则对于每个$\varepsilon>0$，存在一$N$，当$m,r>N$时，

$$d(x_m;x_r)=\max_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{r}|<\varepsilon\quad \text{于是，}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|$$

$<\varepsilon(j=1,2\cdots n)$对于任意固定的$j$，序列$(\xi_j^{(1)},\xi_j^{(2)}\cdots)$是$R$中的Cauchy序列，知其收敛，令$\xi_j^{(m)}\to\xi_j$定义$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，那么，$x\in X$，在$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|<\varepsilon$中，令$r\to\infty$，得

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon,\text{因此},x_m\to x.$$

即证得X是完备的.

3. 令$x_n=(1,1/2,1/3,\cdots,1/n,0,0\cdots)$. 则$(x_n)\in M$.

因为$d(x_m,x_n)=\dfrac{1}{m+1}(m<n)$. 所以，$(x_n)$是$M$中的Cauchy序列. 但$x_n\to x=(1/n)\in l^\infty$，$x\notin M$.

4. $x=(1/n)\in\overline{M}$，但$x\notin M$.

5. X在R中是闭的，利用定理1.4-8结论得证. 或用定义证明，证X中的Cauchy序列(x_n)从某项起都相等.

6. 设$x_n=n$，(x_n)没有极限. 对于任意正整数m，及$n>m>\mathrm{ctg}\varepsilon$，有

$$\begin{aligned}d(m,n)&=\mathrm{arctg}n-\mathrm{arctg}m\\&=\mathrm{arctg}\frac{n-m}{1+mn}\\&<\mathrm{arctg}\frac{1}{m}<\varepsilon\end{aligned}$$

所以(x_n)是Cauchy序列.

7. $x_n=n$，(x_n)是一不收敛的Cauchy序列.

8. 对于任意$x\in\overline{Y}$，根据定理1.4-7(a)，Y中存在序列(x_n)，使得$x_n\to x$. 因此，$x_n(a)\to x(a)$，$x_n(b)\to x(b)$，于是，

$$0=x_n(a)-x_n(b)\to x(a)-x(b)$$

$x\in Y$，由定理1.4-8知，Y是完备的.

9. 我们证x在任意$t_0\in[a, b]$连续. 因为一致收敛，对于每个$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$，使得对于所有$t\in[a, b]$，有

$$|x(t)-x_N(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由于x_N在t_0连续，存在$\delta>0$，当

$|t-t_0|<\delta$时，

$$|x_N(t)-x_N(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，对于满足$|t-t_0|<\delta$的所有$t\in[a, b]$由三角不等式，有，

$$|x(t)-x(t_0)|\leqslant|x(t)-x_N(t)|+|x_N(t)-x_N(t_0)|+|x_N(t_0)-x(t_0)|<\varepsilon$$

10. 在这个空间中，Cauchy序列从某项起必保持不变并收敛于那个项.

11. 令$x_n\to x$. 取任意固定的j，则，对于每个$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，有

$$\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}\leqslant d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2^j(1+\varepsilon)}$$

因此，当$n>N$时，$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon$.

下面证充分性．对于每个$\varepsilon>0$，由于$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=1$．存在$m$,使，

$\sum_{m+1}^{\infty}1/2^i<\frac{\varepsilon}{2}$，由题设，对于每个$j$，$\xi_j^{(n)}\to\xi_j$．因此，满足

$1\leqslant j\leqslant m$的每个j，存在N_j，当$n>N_j$时，$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\frac{\varepsilon}{2}$，

从而，

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}<\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^j}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

令，$N=\max\{N_1,\ \cdots,.N_m\}$，当$n>N$时，

$$d(x_n,\ x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}$$

$$+\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)}-\xi_j|}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

12．设(x_n)是S中任意Cauchy序列，这里，$x_n=(\xi_j^{(n)})$．则对于任意固定的j及$\varepsilon>0$，存在N，当m，$n>N$时，

$$\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|}{1+|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|}\leqslant d(x_m,\ x_n<\frac{\varepsilon}{2^j(1+\varepsilon)}$$

因此，$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon$ （m，$n>N$时）

对于定固的j，（$\xi_j^{(1)}$，$\xi_j^{(2)}\cdots$） 是Cauchy序列，知其收敛，令$\xi_j^{(n)}\to\xi_j$，由习题11知，$x_n\to x=(\xi_j)$.

13．由直接计算得$d(x_n,\ x_m)=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ （$m<n$）

14．取任意$x\in X$，令$c=\max\{1,\ \max\limits_{t\in J}|x(t)|\}$，这里$J=[0,\ 1]$对于$n\geqslant 2c$.

$$d(x_n x), =\int_0^1|x_n(t)-x(t)|\,dt\geqslant\int_0^{\frac{1}{c^2}}|x_n(t)-x(t)|\,dt$$

$$\geqslant\int_1^{\frac{1}{c^2}}[x_n(t)-c]dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n^2}}(n-c)dt+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{c^2}}(t^{-1/2}-c)dt$$

$$=\frac{1}{c}-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2c}$$

15．对于每个$\varepsilon>0$，存在N，当$n>m>N$时，

$$d(x_n,\ x_m)=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{j^2}<\varepsilon.$$

即(x_n)是Cauchy序列.

但对于任意$x=(\xi_j)\in X$，存在$\widetilde{N}$，当$n>\widetilde{N}$时，$\xi_j=0$，因此，对于$n>\widetilde{N}$，

$$d(x_n,x)=|1-\xi_1|+\left|\frac{1}{2^2}-\xi_2\right|+\cdots+\frac{1}{(\widetilde{N}+1)^2}$$

$$+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(\widetilde{N}+1)^2}$$

因为$\widetilde{N}$是固定的．则$d(x_n, x)\to 0$是不可能的．

习　题　1.6

1．可以证明Y没有聚点，则$\overline{Y}=Y$．即Y是闭子空间，由定理1.4-8知，Y完备．

2．(X, d)的完备化空间是R．

3．离散度量空间X的完备化空间就是其自身X．

4．在等距意义下，X_1和X_2中的Cauchy序列是相互对应的．

5．(*b*) 在同胚$x\longmapsto\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x$作用下，$R$与$(-1, 1)$是同胚的．

6．令$x\in C[0, 1]$，用$x(t)$设$y(\tau)=x\left(\frac{\tau-a}{b-a}\right)$

可以证明按$x\longmapsto y$定义的映射T：$C[0, 1]\to C[a, b]$是等距的双射．

7．若$\widetilde{d}(x_m, x_n)<\varepsilon<\frac{1}{2}$，则，

$$d(x_m, x_n)=\frac{\widetilde{d}(x_m, x_n)}{1-\widetilde{d}(x_m, x_n)}<2\widetilde{d}(x_m, x_n)$$

因此，如果(x_n)是$(X, \widetilde{d})$中的Cauchy序列．那么，它也

是(X, d)中Cauchy序列，且(x_n)在(X, d)中的极限就是在$(X, \tilde{d})$中的极限.

8. 因为$\tilde{d}(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_n)$，所以，$(X, d)$中的Cauchy序列也是$(X, \tilde{d})$中的Cauchy序列. 知其在$(X, \tilde{d})$中收敛，由于，当$\tilde{d}(x, y) < \frac{1}{2}$时，

$$d(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 - \tilde{d}(x, y)} < 2\tilde{d}(x, y)$$

所以在$(X, \tilde{d})$中的极限就是在(X, d)中的极限.

9. $d(x_n', l) \leqslant d(x_n', x_n) + d(x_n, l) \to 0 (n \to \infty)$

10 $d(x_n', x_n) \leqslant d(x_n', l) + d(l, x_n) \to 0 (n \to \infty)$

11. 自反性及对称性是显然的. 若$x_n \sim y_n$，$y_n \sim z_n$，则由

$$d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

得出传递性.

12. 对于每个$\varepsilon > 0$，存在N，当m，$n > N$时，

$$d(x_m', x_m) < \varepsilon/3, d(x_m, x_n) < \varepsilon/3, \quad d(x_n, x_n') < \varepsilon/3$$

因此，对于所有m，$n > N$. 由三角不等式得，

$d(x_m', x_n') < \varepsilon$.

14. (1)d是度量；(2)d是伪度量.

15. 是宽度为2的开"直交带".

习 题 2.1

1. 按通常的加法和数乘运算是封闭的，并满足向量空

间诸公理，因此，R是实向量空间，C是复向量空间.

2．由于，$0x+x=(0+1)x=x=\theta+x$
两边同时加上$-x$就得(1a).

又，$\alpha\theta+\alpha x=\alpha(\theta+x)=\alpha x=\theta+\alpha x$.
两边同时加上$-\alpha x$，于是(1b)得证.

$$x+(-1)x=[1+(-1)]x=0x=\theta$$

从而，$(-1)x=-x$.

3．平面$\xi_1=\xi_2$.

4．(a)及当$k=0$时的(d)均可构成R^3的子空间.

5．设$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=\theta$．$x_i=t^i$，$t$在$[a, b]$中任取$n$个不相同的值$t_1$，…，$t_n$．代入上式，得到一个齐次线性方程组，其系数行列式$D$的转置$D'$是Vandermonde行列式，因$t_1\cdots t_n$互不相同，从而，$D=D'\neq0$．方程组只有零解$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$.

6．由于$\dim X=n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的基，因此，$\{e_1, \cdots, e_n\}$线性无关．$\{e_1, \cdots, e_n, x\}$线性相关．即存在$n+1$个不全为零的数k_1，…，k_{n+1}，使得，$k_1e_1+\cdots+k_ne_n+k_{n+1}x=\theta$．由于$\{e_1\cdots e_n\}$线性无关，所以$k_{n+1}\neq0$，从而$x$可以表示成$e_1$，…，$e_n$的一个线性组合．若$x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_je_j=\sum_{j=1}^{n}\beta_je_j$，则，$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-\beta_j)e_j=\theta$，因为$\{e_1, \cdots, e_n\}$线性无关，所以，$\alpha_j=\beta_j$，$j=1, 2\cdots, n$．即表示式的唯一性得证.

7．使X成为实向量空间的一组基为$\{e_1, \cdots, e_n, ie, \cdots, ie_n\}$．$X$为复向量空间时，其维数为$n$，当$X$变成实向

量空间时，其维数为$2n$.

8. 不一定. 例如，任何$x \neq 0$，集$\{x, ix\}$是复向量空间X的线性相关集，是实向量空间X的线性无关集.

9. $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\} t \in [a, b]$是$\widetilde{X}$的一个基，也是$P[a, b]$的基，$P[a, b]$不是$\widetilde{X}$的子空间，由于数域不同.

10. $x_1, x_2 \in Y \cap Z \Longrightarrow x_1, x_2 \in Y$，$x_1, x_2 \in Z$，$\Longrightarrow \alpha x^1 + \beta x_2 \in Y$；$\alpha x_1 + \beta x_2 \in Z \Longrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in Y \cap Z$. $Y \cup Z$不一定是X的子空间.

11. 因为span$M$关于加法和数乘两个代数运算封闭.

12. X的零向量是零矩阵；$\dim X = 4$；

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是$X$的一个基.

所有对称矩阵能构成一子空间；所有降秩矩阵不能形成一子空间.

13. 因为关于两个代数运算封闭.

14. 显然，所有不同陪集的并等于X. 任何两个不同的陪集都不相交. 事实上，$v \in (x + Y) \cap (w + Y) \Longrightarrow v = x + y_1 + = w + y_2, y_1, y_2 \in Y$，对于任意$y \in Y, x + y = (x + y_1) + (y - y_1) = (w + y_2) + (y - y_1) = w + (y - y_1 + y_2) \in w + Y$. 即$x + Y \subset w + Y$，同理，有$w + Y \subset x + Y$. 因此，$x + Y = w + Y$. 故相交的陪集一定相同，从而证得所有不同的陪集构成X一个划分.

两个代数运算有确定的意义，即与陪集中代表的选择无关. 事实上，用$w + w_0 \in w + Y$代替w，存在$y \in Y$，使$w + w_0 = w$

$+y$，于是$w_0=y\in Y$，因此

$$(x+Y)+(w+w_0+Y)=(x+w)+(w_0+Y)$$
$$=(x+w)+Y.$$

同样对于数乘，$\alpha(w+w_0+Y)=\alpha w+(\alpha w_0+Y)=\alpha w+Y$. 也是确定的.

因为X是向量空间，显然两个运算是封闭的. X/Y的零向量是Y.

15. $X/Y=\{$平行于ξ_1轴的所有直线$\}$.

$X/X=\{\theta\}$. $X/\{\theta\}=X$.

习 题 2.2

1. $\|x\|=\|x-\theta\|=d(x,\theta)$.

3. 因为，$\|y\|=\|(y-x)+x\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|$

同理，$\|x\|\leqslant\|y-x\|+\|y\|$

合起来，$|\ \|y\|-\|x\|\ |\leqslant\|y-x\|$.

4. 由于，$\|\theta\|=\|ox\|=o\|x\|=o$.

5. 略.

6. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$显然满足$(N1)$至$(N3)$. 由于，

$$\|x+y\|_1=|\xi_1+\eta_1|+|\xi_2+\eta_2|$$
$$\leqslant|\xi_1|+|\eta_1|+|\xi_2|+|\eta_2|$$
$$=\|x\|_1+\|y\|_1$$

证得$\|\cdot\|_1$满足$(N4)$，利用Minkowski不等式可证明$\|\cdot\|_2$满足$(N4)$. $\|\cdot\|_\infty$满足$(N4)$可从下列不等式得出.

$$\|x+y\|_\infty=\max\{|\xi_1+\eta_1|,|\xi_2+\eta_2|\}$$
$$\leqslant\max\{|\xi_1|+|\eta_1|,|\xi_2|+|\eta_2|\}$$

$\leqslant \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} + \max\{|\eta_1|, |\eta_2|\}.$

7. 略.

8. 满足$(N1)$至$(N3)$是显然的. $\|\cdot\|_1$满足$(N4)$可利用数的三角不等式. 根据Minkowski不等式可证明$\|\cdot\|_p$满足$N(4)$. $\|\cdot\|_\infty$满足$(N4)$证明类似习题6中的$\|\cdot\|_\infty$.

9. 略.

10. 略.

11. $\|z\| = \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leqslant \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|$

$\leqslant \alpha + (1-\alpha) = 1$

12. 因为集$\{x \mid \varphi(x) \leqslant 1\}$不是凸的, 取$x = (1,0)$ $y = (0,1)$. 则$\varphi(x) = \varphi(y) = 1$, $\varphi\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] = 2$.

13. 因为离散度量不满足8(b).

14. $\tilde{d}$不满足8(b).

15. 设M有界, 则, $\delta_{(M)} = \sup\limits_{x,y\in M}\|x-y\| = b < \infty$, 取一固定$x_0 \in M$, 令$c = b + \|x_0\|$, 对于任意$x \in M$, 有,

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| \leqslant b + \|x_0\| = c.$$

反之, 如果对于每个$x \in M$, $\|x\| \leqslant c$, 那么, 对于所有x, $y \in M$, 有

$$\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2c. \text{ 因此, } \delta_{(M)} \leqslant 2c.$$

习 题 2.3

2. 设$x = (\xi_i) \in \overline{C}_0$, 则有$x_n = (\xi_i^{(n)}) \in C_0$, 使$x_n \to x$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N$, 当$n > N$时, $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$,

对于固定的$N+1$，由于$\lim\limits_{j\to\infty}\xi_j^{(N+1)}=0$，存在$N_1$，当$j>N_1$时，$|\xi_j^{(N+1)}|<\frac{\varepsilon}{2}$因此

$$\begin{aligned}|\xi_j| &\leqslant |\xi_j-\xi_j^{(N+1)}|+|\xi_j^{(N+1)}| \quad (j>N_1)\\ &\leqslant \sup_k |\xi_k-\xi_k^{(N+1)}|+|\xi_j^{N+1}|\\ &=\|x-x_{(N+1)}\|+|\xi_j^{(N+1)}|<\varepsilon\end{aligned}$$

即，$\xi_j\to 0$. 从而$x\in C_0$.

3. 令$x_n=(\xi_j^{(n)})=\begin{cases}\frac{1}{j} & j\leqslant n\\ 0 & j>n\end{cases}$，$x=(\xi_j)=\left(\frac{1}{j}\right)$

显然$x_n\to x$，但$x\in\overline{Y}$，$x\notin Y$.

4. 对于任意x，$y\in l^\infty$，及任意数α,β，存在$x_n\in Y$，$y_n\in Y$，使$x_n\to x$，$y_n\to y$，由于加法和数乘运算的连续性，有，

$$\alpha x_n+\beta y_n\to\alpha x+\beta y \quad \alpha x_n+\beta y_n\in Y.$$

从而，$\alpha x+\beta y\in\overline{Y}$.

5. 设赋范空间为习题3中之Y，令$y_n=(\eta_j^n)$

$=\begin{cases}\frac{1}{j^2} & j=n\\ 0 & j\neq n\end{cases}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|y_n\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但，

$$\sum_{j=1}^{n}y_j=\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{n^2},0,0\cdots\right)\to y\notin Y.$$

6. 设(S_n)是X中任意Cauchy序列，对于每个K，存在

n_k，使得$\|S_n - S_m\| < \frac{1}{2^k}$ （$(n, m > n_k)$对所有K，选$n_{k+1} >$ n_k，则(S_{n_k})是(S_n)的子序列．令$x_1 = S_{n1}$，$x_2 = S_{n2} - S_{n1}$，$\cdots x_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$．那么，$S_{n_k} \sum_{j=1}^{k} x_j$，并且，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|x_1\| + \|x_2\| + 1.$$

于是$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$绝对收敛．根据假设$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$收敛即，$Sn_k \to S \in X$，因为(S_n)是Canchy序列，有，$\|S_n - S\| \leqslant \|S_n - S_{n_k}\| + \|Sn_k - S\| \to 0$，因此，$S_n \to S$．故$X$是完备的．

7．设$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$绝对收敛．令$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$，$m > n$，那么，

$$\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_m\| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \|x_k\|$$

即(S_n)是Canchy序列．

8．基元素的有理系数的线性组合集是可数的并在空间中稠密（对于复系数有理系数是指实部和虚部都是有理数）

9．对于$x = (\xi_i) \in l^p$以及每个$\varepsilon > 0$，存在n，使$\left(\sum_{n+1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$．所以有．

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\| = \left(\sum_{n+1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

10．$P(\theta) = P(ox) = oP(x) = 0$．

$$P(y) = P[(y - x) + x] \leqslant P(y - x) + P(x)$$

于是，$P(y) - P(x) \leqslant P(y - x)$

x与y交换，有

$$P(x)-P(y)\leqslant P(y-x)$$

从而，$P(y)-P(x)\geqslant -P(y-x)$

因此，$|P(y)-P(x)|\leqslant P(y-x)$.

11. 若$P(x)=P(y)=0$. 由$(N1)$，$(N3)$，$(N4)$，有$P(\alpha x+\beta y)=0$. 即N是X的一子空间. $\|\hat{x}\|_0$是由$\hat{x}$唯一确定的：对于任意$v\in N$. $x\in X$，有$P(v)=0$.

$$P(x)\leqslant P(x+v)+P(v)=P(x+v)+0\leqslant P(x).$$

$\|\cdot\|_0$显然满足$(N1)$、$(N3)$、$(N4)$. 只须证$(N2)$成立：当$\hat{x}=N$时，有$\|\hat{x}\|_0=P(x)=0$ $(x\in N)$. 若$\|\hat{x}\|_0=0$，则任意$x\in\hat{x}$. $P(x)=0$. 得$\hat{x}=N$. （由习题2.1-14证明中知）. N是X/N的零元素.

12. $\|\hat{x}\|_0=0$当且仅当$\hat{x}$中有一序列(x_n)，使得$\|x_n\|\to 0$. 因为Y是闭的. 所以$\hat{x}$是闭的. 从而，$\theta\in\hat{x}$，$\hat{x}=Y$. 即，$\|\hat{x}\|_0=0$当且仅当$\hat{x}=Y$. $(N2)$得证. $(N4)$从下式

$$\|\hat{x}+\hat{y}\|_0=\inf_{\substack{x\in\hat{x}\\ y\in\hat{y}}}\|x+y\|\leqslant\inf_{\substack{x\in\hat{x}\\ y\in\hat{y}}}(\|x\|+\|y\|)$$

$$=\inf_{x\in\hat{x}}\|x\|+\inf_{y\in\hat{y}}\|y\|=\|\hat{x}\|_0+\|\hat{y}\|_0$$

得证. 显然，有$(N3)$成立.

$$\|\alpha\hat{x}\|_0=|\alpha|\,\|\hat{x}\|_0$$

13. $\|x\|=0\Longleftrightarrow\|x_1\|_1=\|x_2\|_2=0\Longleftrightarrow x=(0,\ 0)=\theta$.

设$x=(x_1,\ x_2)$，$y=(y_1,\ y_2)$. 则.

$$\|x+y\| = \max(\|x_1+y_1\|_1, \|x_2+y_2\|_2)$$
$$\leqslant \max(\|x_1\|_1+\|y_1\|_1, \|x_2\|_2+\|y_2\|_2)$$
$$\leqslant \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)+\max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_2)$$
$$= \|x\|+\|y\|.$$

习 题 2. 4

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. 中心在θ点的开球，由不等式（3）有，$B(\theta; r)\subset B_0(\theta; r/a)$，$B_0(\theta; r)\subset B(\theta; br)$因为范数产生平移不变的度量. 所以以任何点为中心的球有类似性质，再根据，§ 1.3 中习题 4 立即证得此命题.

6. 因为，$|\xi_j|^2 \leqslant \max\limits_k |\xi_k|^2$，于是

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

7. 令$e_1=(1, 0, 0, \cdots, 0, 0)$ $e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0, 0)$ $\cdots$, $e_n=(0, 0, 0, \cdots, 0, 1)$，根据Cauchy-Schwarz不等式，有，

$$\|x\| \leqslant \sum |\xi_j|\,\|e_j\| \leqslant b\|x\|_2 \text{这里，} b=(\sum \|e_j\|^2)^{1/2}$$

8. 利用Cauchy-Schwarz不等式，取$\eta_j=1$, $j=1, \cdots, n$，有，$\|x\|_1^2=(\sum|\xi_j|)^2 \leqslant n\sum|\xi_j|^2 = n\|x\|_2^2$

9. 因为，$a\|x_n-x\|_0 \leqslant \|x_n-x\| \leqslant b\|x_n-x\|_0$

10. 按矩阵加法和数乘，Z为向量空间，$\dim Z = mn$，因此，所有范数等价（利用2.4-5）.

$$\|A\|_1=\sum_j\sum_k|\alpha_{jk}|; \quad \|A\|_2=(\sum_j\sum_k|\alpha_{jk}|^2)^{1/2};$$

$$\|A\|_\infty = \max_{jk} |\alpha_{kj}|$$

习 题 2.5

1. 例如(n)没有任何收敛的子列.

2. X包含一个无穷序列(x_n)，$x_n \neq x_m (n \neq m)$由于$d(x_n, x_m)=1$，(x_n)不可能有收敛的子序列.

3. 例如：$\xi_1^2+\xi_2^2=1$是紧的；$\xi_1=\xi_2$是非紧的.

4. 如果条件不成立. 存在一个K_0，对于每个n，有$x_n \in M$使得$|\xi_{k0}(x_n)|>n$.
因为$x_{nj} \to x$蕴涵$\xi_{k0}(x_{nj}) \to \xi_{k0}(x)$，而$|\xi_{k0}(x_{nj})|>n_j$. 所以$(x_n)$不可能有收敛的子序列，这与$M$是紧的矛盾.

5. 由定理2.5-3，在这些空间中以每个点为中心半径为1的闭球是这个点的紧邻域. 紧度量空间X本身是它的每个点的紧邻域.

7. 设$\{b_1, \cdots, b_n\}$是Y的一个基，有$y_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl} b_l \in Y$. 使$\|y_k - v\| \to a$，那么$(y_k)$有界. 利用引理2.4-1. $\{\alpha_{kl}\}$有界. 因此，有收敛子序列，$\alpha_{k_j l} \to \alpha_l$ $l=1,2\cdots n$. 于是，(y_k)有收敛的子列(y_{kj}) $y_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{k_j l} b_l$. 令$\tilde{y} = \sum \alpha_l b_l \in Y$，有

$$a \leqslant \|v - \tilde{y}\| \leqslant \|v - y_{kj}\| + \|y_{kj} - \tilde{y}\| \to a$$

即，$\|v - \tilde{y}\| = a$，令$\tilde{z} = \dfrac{v - \tilde{y}}{\|v - \tilde{y}\|}$，对于每个$y \in$

Y. 有，$\|\tilde{z}-y\|=\dfrac{1}{\|v-\tilde{y}\|}\|v-\tilde{y}-\|v-\tilde{y}\|y\|$

$$=\frac{1}{a}\|v-y_1\|\geqslant\frac{1}{a}\cdot a=1$$

8. 通过$h(x)=\|x\|$，$x\in X$定义的h是连续的，根据定理2.5-3，单位球面$M\subset(X,\|\cdot\|_2)$是紧集，利用定理2.5-7，h在M上取得最小值，即，

$$a=h(y_0)=\min_{\|z\|_2=1}h(z)\leqslant h(y)\text{. 对所有}y\in M\text{. 数}a>0\text{.}$$

否则$y_0=0$，推得$y\notin M$. 对于任意$x\neq\theta$. 有，$y=\|x\|^{-1}_2x\in M$. 并且，$a\leqslant h(y)=\|x\|^{-1}_2\|x\|\Longleftrightarrow a\|x\|_2\leqslant\|x\|$.

9. 设(x_n)是M中任意序列，因为X是紧的，(x_n)有一收敛的子序列(x_{n_k})，$x_{n_k}\to x\in X$. 由于M是闭的，根据定理1.4-7(b)，$x\in M$. 故M是紧的.

10. 设M是X的任意闭子集，根据习题9，M是紧的，由定理2.5-6，$T(M)$是紧集，利用定理2.5-2. $T(M)$是闭的. 由§1.3中习题14知，T^{-1}连续，从而T是一同胚.

习 题 2.6

1. 略

2. 分别是到ξ_1轴上的投影；到ξ_2轴上的投影；关于直线$\xi_1=\xi_2$的反射，第四个映射为相似变换.

3. $D(T_i)=R^2$，$R(T_1)=\xi_1$轴，$R(T_2)=\xi_2$轴.
   $R(T_3)=R^2$；$N(T_1)=\xi_2$轴，$N(T_2)=\xi_1$轴，
   $N(T)=$原点.

4. $N(T_4)=\begin{cases} R^1 & r=0 \\ \{\theta\} & r\neq 0 \end{cases}$ $N(T)=\{x|\ x(t)=k=$常数$\}$.

$N(T_1)=\{\theta\}\cup\{$所有垂直于a的向量$\}$.

$N(T_2)=\{\theta\}\cup\{$所有平行于a的向量$\}$.

5. 对于任意$y_1, y_2\in T(V)$,存在$x_1, x_2\in V$.使 $y_1=Tx_1$, $y_2=Tx_2$, 由于V是向量空间, $\alpha x_1+\beta x_2\in V$. 因为$T$是线性的, 所以$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2)\in T(V)$.

对于任意x_1, $x_2\in T^{-1}(W)$,有$Tx_1=y_1\in W$. $Tx_2=y_2\in W$, 因为W是向量空间, T是线性的, 于是, $T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2\in W$. 即, $\alpha x_1+\beta x_2\in T^{-1}(W)$.

6. $ST(\alpha x+\ \ y)=S(\alpha Tx+\beta Ty)=\alpha STx+\beta STy$.

7. 不能交换.

8. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}$

9. $\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j \quad i=1, 2\cdots, r$.

10. T^{-1}存在$\Longleftrightarrow N(T)=\{\theta\}$.即$b$为满秩的时候, T^{-1}存在.

11. 根据定理2.6-10(a)T^{-1}不存在.

12. 由于T是线性的, 设$\alpha_1Tx_1+\cdots+\alpha_nTx_n=\theta$, 则$T(\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx_n)=\theta$,因为$T^{-1}$存在,所以,$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=\theta$, 由$\{x_1, \cdots, x_n\}$线性无关, 于是$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$

13. 设$R(T)=Y$. $\{b_1\cdots, b_n\}$是Y的一个基, 则存在$e_j\in X$, 使$b_j=Te_j$. 令$\sum_{j=1}^{n}\alpha_je_j=\theta$. 因为$T$是线性的. 有

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Te_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = 0$.由$\{b_1,\cdots b_n\}$线性无关,得$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$故$\{e_1,\cdots e_n\}$是$X$的一个基.若$Tx=\theta$.那么,$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$,有,$Tx=\sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i b_i=\theta$ 于是,$\xi_1=\cdots=\xi_n=0$.即$x=\theta$. 由定理 2.6-10(a)知,T^{-1}存在. 反之,由定理2.6-10(c)立即得证.

14. 对于每个$y(t)\in X$,存在

$$x(t)=\int_0^t y(\tau)d\tau$$

使得,$Tx=y$,因此,$R(T)=X$.
由于$N(T)\neq\{\theta\}$. 即对于每个常数函数,$Tx=0$,因此,T^{-1}不存在. 说明习题13中的有穷维条件是必要的.

习 题 2.7

1. $\|T\|=1$

2. 令$y_n=(\eta_j^{(n)})=Tx_n$, $x_n=(\xi_j^{(n)})$. $\xi_j^{(n)}=\frac{n\sqrt{j}}{(n+j)}$

则,$x_n\in l^\infty$,$\xi_j^{(n)}\longrightarrow\xi_j=\sqrt{j}$. $\eta_j^{(n)}=\frac{n}{(n+j)\sqrt{j}}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{j}}=\eta_j$,$y_n\in R(T)$. $y=(\eta_j)\in\overline{R(T)}$,但由于$x=(\xi_j)\notin l^\infty$,于是,$y\notin R(T)$.

3. $Tx=\theta\Longrightarrow b\|x\|\leqslant\|Tx\|=0$、$\Longrightarrow\|x\|=0$、$\Longrightarrow x=\theta$. 根据定理2.6-10($a$). T^{-1}存在. 因为,$R(T)=Y$,对每个

$y\in Y$，有$x\in X$，使得$y=Tx$，则$T^{-1}y=x$. 因此.

$$\|T^{-1}y\|=\|x\|\leqslant\frac{1}{b}\|Tx\|=\frac{1}{b}\|y\|$$

4．取$y_n=(\eta_j^{(n)})$．$\eta_j^{(n)}=n/(n+j)\sqrt{j}$．

$T^{-1}y_n=x_n=(\xi_j^{(n)})=(j\eta_j^{(i)})=\ (n\sqrt{j}/n+j)$

则，$\|y_n\|\leqslant 1$，$\|x_n\|=\dfrac{\sqrt{n}}{2}$．$\dfrac{\|T^{-1}y_n\|}{\|y_n\|}\geqslant\dfrac{\sqrt{n}}{2}\to\infty$

5. $R(T)=\{y\,|[0,\ 1]$上，$y(0)=0$的所有连续可微函数$y\}$，$T^{-1}y=y'(t)$，T^{-1}是线性的，但是无界的.

6. 不可交换，$\|T_1\|=1$，$\|T_2\|=1$，$\|T_1T_2\|=\dfrac{1}{2}$，$\|T_2T_1\|=1$

7. 是线性有界的.

8. 只证第二个论断.由于，

$$\|Ax\|_2=\max_j\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right|\leqslant\max_j\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_{jk}\right|\cdot\max_k\left|\xi_k\right|$$
$$=\|A\|\ \|x\|_1$$

得，$\sup\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}\leqslant\|A\|$．

另一方面，取使得$\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\alpha_{jk}\right|$是最大值的$j=s$．令$x_0=(\xi_k^0)$，

$$\xi_k^0=\begin{cases}|\alpha_{sk}|\,/\alpha_{sk} & \alpha_{sk}\neq 0\\ 0 & \alpha_{sk}=0\end{cases}$$

则$\|x_0\|_1=1$．$\dfrac{\|Ax_0\|_2}{\|x_0\|_1}=\|Ax_0\|_2=\max\limits_j\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k^0\right|$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_{sk}\right|=\|A\|$$

9. 第一个论断从2.7-5中最后一个公式可得证．为证第二个论断，可考虑单位矩阵．

10. $$\|Ax\|_2=\sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\left|\alpha_{jk}\right|\left|\xi_k\right|$$

$$\leqslant\max_k\sum_{j=1}^{r}\left|\alpha_{jk}\right|\cdot\sum_{k=1}^{r}\left|\xi_k\right|=\|A\|\,\|x\|_1$$

11. 令$\|\cdot\|_0$是自然范数，由习题10，有，$\|A\|_0=\sup\limits_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_2\leqslant\|\,\|A\|$．

当$\|A\|=0$时，$\|A\|_0=\|A\|$；若$\|A\|>0$，存在一个$K=s$，使得，

$$\|A\|=\max_k\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{jk}\right|=\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{js}\right|.$$ 选$x=(\xi_j)$，

$$\xi_j=\begin{cases}1 & i=s\\ 0 & i\neq s.\end{cases}$$ 则，$\|x\|_1=1$．

$$\|Ax\|_2=\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{is}\right|=\|A\|.$$ 因此，$\|A\|_0=\|A\|$．

12. $N(T)=\{\alpha x_0|\ \alpha\in R,\ x_0=(2,\ 4-7)\}$．

13. $R(T)=\{x=(\xi_1,\xi_2,\ \xi_3)|\ \xi_1+\xi_2+\xi_3=0\}$．$N(T)$为$\xi_3$轴．$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$．

14. 零算子$0:X\to\{\theta\}\subset Y$；算子$-T$；

15. 设M是给定的球并置于球$\widetilde{B}=\{x\,|\,\|x\|\leqslant r\}$之中，因为$T_n\to T$．那么，对于每个给定的$\varepsilon>0$，存在$N$，使得$\|T_n-T\|<\varepsilon/r\,(n>N)$，因此，对于所有$n>N$，和$x\in\widetilde{B}$，

有，

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\| \|x\| < \varepsilon/r \cdot r = \varepsilon.$$

习 题 2.8

2. $\|f\| = 2.$

3. f有界，且$\|f\| = 1$

4. $\|\cdot\|$满足$(N4)$，这从下式得证.

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \max_{t\in J}|x(t)+y(t)| + \max_{t\in J}|x'(t)+y'(t)| \\ &\leqslant \max_{t\in J}|x(t)| + \max_{t\in J}|y(t)| + \max_{t\in J}|x'(t)| \\ &\quad + \max_{t\in J}|y'(t)| \\ &= \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

f是线性的，在$C'[a, b]$上，有

$$|f(x)| = |x'(c)| \leqslant \max_{t\in J}|x(t)| + \max_{t\in J}|x'(t)| = \|x\|.$$

即f在$C'[a, b]$上有界.

对于每个n，存在一个$x_n \in C[a, b]$，且$x'_n(c) = 1$.

$|x_n(t)| < \frac{1}{n}$，于是有，

$$\sup_x \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{|x'_n(c)|}{\max\limits_{a<t<b}|x_n(t)|} > n.$$

故f在$C[a, b]$上无界.

5. 由于$x_0 \in X - N(f)$，所以$f(x_0) \neq 0$，对于任意$x \in X$.

令$\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. $y = x - \alpha x_0$.

则，$f(y)=f(x)-\dfrac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0$．即$x$有表示式

$$x=\alpha x_0+y \qquad y\in N(f).$$

若 $\tilde{\alpha}x_0+\tilde{y}=\alpha x_0+y$，那么，$\tilde{y}-y=(\alpha-\tilde{\alpha})x_0$．由于 $\tilde{y}-y\in N(f)$，所以，$(\alpha-\tilde{\alpha})f(x_0)=f(\tilde{y}-y)=0$因为 $f(x_0)\neq 0$，于是$\tilde{\alpha}=\alpha$，$\tilde{y}=y$．故唯一性得证．

6．x_1，$x_2\in\hat{x}\in X/N(f)\Longleftrightarrow x_1-x_2\in N(f)$

$$\Longleftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)=0.$$

因为$f\neq 0$，所以，$X/N(f)\neq\{\theta\}$．

$\operatorname{codim}N(f)=\dim X/N(f)>0$．

若$\hat{x}$，$\hat{y}\in X/N(f)$．则，$\hat{x}=x+N(f)$，$\hat{y}=y+N(f)$ 对于$x_0\in X-N(f)$．$x=\alpha_1x_0+z_1$．$y=\alpha_2x_0+z_2$．z_1，$z_2\in N(f)$，从而，$\hat{x}=\alpha_1x_0+N(f)$　$\hat{y}=\alpha_2x_0+N(f)$，所以，$\alpha_2\hat{x}-\alpha_1\hat{y}=N(f)=\hat{\theta}$即$\hat{x}$，$\hat{y}$线性相关，于是，$\dim X/N(f)\leqslant 1$．

7．由习题5，$x=\dfrac{f_1(x)}{f_1(x_0)}x_0+y$．$y\in N(f_1)=N(f_2)$因此，$f_2(x)=f_1(x)\cdot\dfrac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$．

8．根据习题5，若$f(x_0)\neq 0$，那么，每个$x\in H_1$．有$x=\dfrac{1}{f(x_0)}$

$x_0+y, y\in N(f)$，令$z=\dfrac{1}{f(x_0)}x_0$，于是$H_1=\hat{z}\in X/N(f)$.

9. 假定$f(y_0)=r\neq 0$，$y_0\in Y$，那么，对于数域中的每个数α，有

$$\alpha=\alpha\cdot\frac{1}{r}f(x_0)=f\left(\frac{\alpha}{r}x_0\right)\in f(Y).$$

于是与题设产生矛盾.

10. 设$x\in H_1$，则，$1=|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$. 所以，$\|x\|\geqslant\dfrac{1}{\|f\|}$

且，$\tilde{d}\geqslant\dfrac{1}{\|f\|}$.

对于任意$\varepsilon>0$，存在一个$x\in H_1$，使得$\dfrac{|f(x)|}{\|f\|}=\dfrac{1}{\|x\|}$

$>\|f\|-\varepsilon$. 因此，$\|x\|<\dfrac{1}{\|f\|-\varepsilon}$ $\tilde{d}\leqslant\dfrac{1}{\|f\|}$. 于是$\|f\|=\dfrac{1}{\tilde{d}}$.

11. $x=(1,0,0)$可表示成$e_1=(1,1,1)$，$e_2=(1,1,-1)$

$e_3=(1,-1,-1)$的线性组合$x=\dfrac{1}{2}e_1+0\cdot e_2+\dfrac{1}{2}e_3$

$f_1(x)=\dfrac{1}{2}$，$f_2(x)=0$，$f_3(x)=\dfrac{1}{2}$.

12. $N(f)$的维数是n或$n-1$. 一个基是$(\alpha_2, -\alpha_1, 0)$ $(\alpha_3, 0, -\alpha_1)$.

13. Z存在一个基$\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$，使得$\{e_1, \cdots, e_{n-1},$

$e_n\}$是X的一个基．令$\{f_1, \cdots, f_n\}$是$\{e_1\cdots, e_n\}$的对偶基．那么，$f_n(x)=0$当且仅当$x\in Z$.

14．设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基，使得$\{e_1, \cdots, e_q\}$是Z的一个基并且$e_{q+1}=x_0$．令$\{f_1\cdots, f_n\}$是对偶基．那么$f=f_{q+1}$即为所求.

15．因为，$f_j(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\, j=1,\cdots,p.\ \alpha_{ik}=f_i(e_k)$

$\{e_1, \cdots, e_n\}$是X的一个基，$\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k=0\ ,=1\cdots p$，由于$p<n$．有非零解，因此存在$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i\neq 0$使$f_1(x)=\cdots=f_p(x)=0$.

16．设$\{e_1, \cdots, e_n)$是X的一个基，使得$\{e_1, \cdots, e_q\}$是Z的一个基，$\{f_1, \cdots, f_n\}$是对偶基，令$\widetilde{f}=\sum\limits_{i=1}^{q}f(e_i)f_i$

则．$\widetilde{f}(e_k)=f(e_k)$．$(k=1, \cdots, q)$ 因此，$\widetilde{f}|_Z=f$.

17．$\|f\|=\sum\limits_{k=1}^{n}|f(e_k)|$．设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是$X$的一个基任意$x\in X$，有$x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，且

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(e_k)\right|\leqslant\max|\xi_j|\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\,\|x\|.$$

于是$\|f\|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|f(e_k)|$；取$x_0=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j^0 e_j$.

$\xi_j^0=\mathrm{sgn}f(e_j)$则$\|x_0\|=1$，$\xi_j^0 f(e_j)=|f(e_j)|$.因此，$f(x_0)=\sum\limits_{j=1}^{n}|f(e_j)|\,\|x_0\|$．$\|f\|\geqslant\sum\limits_{j=1}^{n}|f(e_j)|$.

18. 利用$e_k=(\delta_{kj})$. 对于$f\in(c_0)^*$，有,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k,\quad \alpha_k=f(e_k).$$

令$x_n=(\xi_k^{(n)})$，$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|\alpha_k|/\alpha_k & K\leqslant n且\alpha_k\neq 0\\ 0 & K>n或\alpha_k=0\end{cases}$

则，$\|x_n\|\leqslant 1$. $f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\geqslant\|x_n\|\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$

令$n\to\infty$，有$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|\leqslant\|f\|$，因此，$(\alpha_k)\in l^1$设$T$：$(C_0)^*\to l^1$

$$f\longmapsto(f(e_1),\ \cdots,\ f(e_n),\ \cdots)$$

那么，T是线性的．对于任意$b=(\beta_j)\in l^1$，通过$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k$　$x=(\xi_k)\in c_0\beta_k=g(e_k)$得到$c_0$上一有界线性泛函$g$. 事实上，$|g(x)|\leqslant\sum|\xi_k\beta_k|\leqslant\sup_j|\xi_j|\sum|\beta_k|=\|b\|\|x\|$．故$T$是满射．由以上可证得，$\|f\|=\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|=\|Tf\|$，于是$T$是保范的，必是一对一的，因此$(c_0)^*$与$l^1$同构，即在同构意义下'$(c_0)^*=l^1$.

19. 若f，$g\in M^a$，则$\alpha f+\beta g\in M^a$．即M^a是向量子空间. 若$f\in\overline{M^a}$，则存在$f_n\in M^a$，使得$f_n\to f$. 对于每个$x\in M^a$有，$f_n(x)=0$，$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\|f_n-f\|\ \|x\|\to 0$．因此，$f\in M^a$．故$M^a$是闭的．$X^a=\{0\}$．$\{\theta\}^a=X^*$

20. 设$\{e_1,\ \cdots,\ e_m\}$是M的一个基，并且$\{e_1,\ \cdots,\ e_m,\ \cdots e_n\}$是$X$的一个基，$\{f_1,\cdots,f_n\}$是对偶基，$Y_1=\mathrm{span}\{f_{m+1},\ \cdots f_n\}$.

对于每个$x\in M$，$x=\sum_{k=1}^{m}\xi_k e_k$，那么，

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k f_j(e_k) = 0 \quad j = m+1, \cdots n \text{即} Y_1 \subset M^a.$$

令$f \in M^a$，则$f \in X^*$.

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

$$0 = f(e_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(e_k) = \alpha_k \quad (K = 1, 2, \cdots m)$$因此，

$f \in Y_1$. 故$M^a \subset Y_1$.

习 题 3.1

1. $$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &\quad + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle \\ &\quad - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

2. 因为$\|x\| = \|y\|$，所以$\langle x,x\rangle = \langle y,y\rangle$. 又由$X$是实的，于是$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle = 0.$$

$X = R^2$时，这表示：若平行四边形的边相等，则对角线互相垂直. 当X是复内积空间时，有$Re\langle x+y, x-y\rangle = 0$.

3. 用直接计算可证明此恒等式. 下面用公式(9)证明.

$$\begin{aligned}\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 &= \frac{1}{2}\Big[\|(z-x)-(z-y)\|^2 \\ &\quad + \|(z-x)+(z-y)\|^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}\|x-y\|^2\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\|2z-(x+y)\|^2$$

$$=\frac{1}{2}\|x-y\|^2$$

$$+2\left\|z-\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2.$$

4．直接计算可得(10)及(11)．

5．由$\langle x,u\rangle=\langle x,v\rangle$，得$\langle x,u-v\rangle=0$．取$x=u-v$就证得$u=v$．

6．易验证满足内积公理($IP1$)至($IP4$)．

7．不能成内积空间．

8．略．

9．不能任意选择r_{ij}，因为

$$r_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle=\overline{\langle e_j,e_i\rangle}=\overline{r_{ji}}$$

10．在R^2和R^3中因为内积是点积$x\cdot y=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$．所以$|x\cdot y|\leqslant\|x\|\,\|y\|$．

11．X的完备性的证明根据定理3.1-9．Y是X的子空间．次数为2的所有$x\in X$不是X的子空间．

12．略．

13．
$$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2&=\langle x_n-x,\ x_n-x\rangle\\&=\|x_n\|^2-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\|x\|^2\\&\to 2\|x\|^2-2\langle x,x\rangle=0\end{aligned}$$

14．利用定理1.4-9及

$$\|x\|_2^2=\int_a^b|x(t)|^2dt\leqslant(b-a)\|x\|_\infty^2$$

15. 由于$\langle Tx, x\rangle=0$，$\langle Ty, y\rangle=0$，因此

$$0=\langle T(x+y),\ (x+y)\rangle=\langle Tx,\ y\rangle+\langle Ty,\ x\rangle$$

在上述等式中以iy代替y并乘以i得，

$$0=i[\langle Tx, iy\rangle+\langle iTy, x\rangle]=\langle Tx, y\rangle-\langle Ty, x\rangle$$

两个等式相加，$\langle Tx, y\rangle=0$，取$y=Tx$，得到$\|Tx\|^2$. 且对于所有$x\in X$，$Tx=0$. 在实内积空间中其结论不成立，例如，在R^2中，旋转角是90°的变换T，有$\langle Tx, x\rangle=0$.
但$T\neq 0$.

习 题 3.2

1. 若$x_i\perp x_j$ $i\neq j$, i, $j=1$, 2, …, m, 则由直接计算可得：$\left\|\sum_{j=1}^{m} x_j\right\|^2=\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2$.

若$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. 则，

$$\begin{aligned}0&=\langle x+y, x+y\rangle-\|x\|^2-\|y\|^2\\&=\langle x, y\rangle+\langle y,\ x\rangle\\&=\langle x,\ y\rangle+\overline{\langle x,\ y\rangle}\\&=2Re\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

2. (a) 若$y=\alpha x$, 则，$0=\langle x,\ y\rangle=\overline{\alpha}\|x\|^2$. 得$\alpha=0$ 或 $x=\theta$，这与题设矛盾.

(b) 设$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j=0$. 则，

$$0=\langle 0, x_k\rangle=\langle\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j,\ x_k\rangle=\alpha_k\|x_k\|^2$$

于是，$\alpha_k=0$，$k=1$，$2\cdots m$.

3. 从

$$\langle x\pm\alpha y,\ x\pm\alpha y\rangle=\|x\|^2\pm\bar{\alpha}\langle x,y\rangle\pm\alpha\langle y,x\rangle$$
$$+|\alpha|^2\|y\|^2$$

中看到，直交蕴涵$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$蕴涵

$$\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle=0.$$

当空间为实的时，取$\alpha=1$；当空间为复的时，取$\alpha=1$及$\alpha=-i$，从而得到$\langle x,y\rangle=0$.

4．如果$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$．且$y\neq\theta$，取$\alpha=-\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$.

于是，

$$0\leqslant\langle x+\alpha y,x+\alpha y\rangle-\|x\|^2$$
$$=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle+|\alpha|^2\|y\|^2$$
$$=-|\langle x,y\rangle|^2\|y\|^{-2}\leqslant 0$$

因此，$x\perp y$．反之是显然的．

5．由假设及§3.1中的平行四边形等式(9)得，

$$\|x_n-x_m\|^2=2\|x_m\|^2+2\|x_n\|^2-\|x_n+x_m\|^2$$
$$\leqslant 2\|x_m\|^2+2\|x_n\|^2-4d^2\to 0.$$

即(x_n)是H中的Cauchy序列．

6．M是闭的，因为对于$w=(w_i)\in\overline{M}$，存在M中的序列(y_m)，使得$y_m=(\eta_1^{(m)},\ \eta_2^{(m)},\ \cdots,\ \eta_n^{(m)})\to w$且$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^{(m)}=1$推出$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，于是$w\in M$．因此根据定理1.4-8$M$是完备的．

M是凸的．事实上，$y\in M$，$z=(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)\in M$与

$\alpha\in[0,1]$蕴涵$\alpha y+(1-\alpha)z\in M$. 因为,

$$\sum_{j=1}^{n}[\alpha\eta_j+(1-\alpha)\zeta_j]=\alpha\sum_{j=1}^{n}\eta_j+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}\zeta_j=1$$

$y=\left(\frac{1}{n},\ \cdots,\ \frac{1}{n}\right)$在$M$中有最小范数.

7. 对于$x(t)$, 令$x_1(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$,

$x_2(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$. $x_1(t)$是奇函数, $x_2(t)$是偶函数, 且$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$.

8. (a) M是凸的, 并由定理1.4-8知M是完备的.

(b) 在§3.1的习题3中, 取$z=x$, $x=y_m$, $y=y_n$, 得,

$$\|y_m-y_n\|^2=2\|x-y_m\|^2+2\|x-y_n\|^2-4\left\|x-\frac{1}{2}\left(y_m+y_n\right)\right\|^2$$

$$\leqslant 2(\sigma_m^2+\sigma_n^2)-4\delta.$$

9. (a) $M^\perp=\{z|\ z=\alpha(\xi_2-\xi_1),\ \alpha\in R\}$.

(b) $M^\perp=\{\theta\}$.

10. $Y^\perp=\{x\in l^2\ |\xi_{2n-1}=0.\ n\in N\}$.

$Y^\perp=\{x\in l^2|\ \xi_j=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$.

11. (a) $x\in B^\perp\Longrightarrow x\perp B\supset A\Longrightarrow x\in A^\perp\Longrightarrow B^\perp\subset A^\perp$

(b) $x\in A\Longrightarrow x\perp A^\perp\Longrightarrow x\in A^{\perp\perp}\Longrightarrow A\subset A^{\perp\perp}$.

因此, $A^\perp\supset(A^{\perp\perp})^\perp$. 且$A^\perp\subset(A^\perp)^{\perp\perp}$.

12. 易验证$M^\perp$是向量空间. $M^\perp$是闭的, 因为对所有

$v\in M$及

$$x\in\overline{M^{\perp}},\ x_n\to x.$$

由引理3.1-10内积的连续性有，

$$\langle x_n,\ v\rangle\to\langle x, v\rangle=0.$$

13. 假设$Y=Y^{\perp\perp}=(Y^{\perp})^{\perp}$. 利用习题 8 得$Y$是闭的.反之，由引理3.2-6可得证.

14. $M\subset M^{\perp\perp}$，由习题12知$M^{\perp\perp}$是闭子空间.其次，任何闭子空间$Y\supset M$，则根据习题11(a)有，$Y^{\perp}\subset M^{\perp}$，$Y^{\perp\perp}\supset M^{\perp\perp}$，由习题13，$Y=Y^{\perp\perp}$.

习　题　3.3

1. 用Gram-Schmidt过程计算可得.

2. 例如，设$e_k=(\delta_{k,\ j-1})$，$x=(\xi_k)$，$\xi_1\neq 0$. 则，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,\ e_k\rangle|^2=\sum\limits_{k=2}^{\infty}|\xi_k|^2<\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2=\|x\|^2$.

3. 由§1.2的Cauchy-Schwarz不等式及本节的Bessel不等式(8)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle|$$
$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x, e_k>|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|y, e_k>|^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\,\|y\|.$$

4. $\frac{1}{2}$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}t$. $\left(\frac{5}{8}\right)^{1/2}(3t^2-1)$.

5. $\left(\frac{5}{2}\right)^{1/2}t^2$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}t$，$\left(\frac{1}{8}\right)^{1/2}(3-5t^2)$.

6. 利用直交性. 有

$$\|S_n\|^2 = \|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

根据引理3.1-10内积的连续性.

$$S_n \to x \text{蕴涵} \|S_n\|^2 = \langle S_n, S_n \rangle \to \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

7. 例如，$x=(1, 1, 1)\in R^3$. $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$ $\{e_1, e_2\}\subset R^3$. 显然$\sum_{k=1}^{2}\langle x, e_k\rangle e_k \neq x$.

8. $(S_n$是柯西序列，因为，不妨令$n>m$

$$\|S_n - S_m\| \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\| \leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j\| \to 0 \quad (m\to\infty)$$

9. 因为$\sum\|x_j\|$收敛蕴涵(S_n)是H中的柯西序列（根据习题 8 ）. 又由H是完备的.

10. 由假设，

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \to x, \quad \widetilde{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \to y.$$

根据引理3.1-10内积的连续性.

$$\langle S_n, \widetilde{S}_n \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\beta}_j = \langle x, y \rangle.$$

11. 由定理3.3-10知级数$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$收敛于$y$，且$\langle y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle$，即$\langle x-y, e_k\rangle = 0$.因 此，$(x-y)\perp e_k$. $(k=1, 2\cdots)$ ，

12. 若x可以表示成$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$，由定理3.3-10知级数收敛. 部分和序列 (x_n). 有$x_n\to x$. 根据定理1.4-7(a). 知$x\in\overline{Y}$.

反之，设$x\in\overline{Y}$，$\widetilde{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$，则$\widetilde{x}\in\overline{Y}$，于是

$v=x-\tilde{x}\in\overline{Y}$. 因此,

$$\langle v,e_m\rangle=\left\langle x-\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,e_m\right\rangle$$
$$=\langle x,e_m\rangle-\langle x,e_m\rangle=0$$

即, $v\perp e_m$. $m=1,2\cdots$, 从而, $v\perp M, v\perp\overline{Y}$

$v\perp v$(因为$v\in\overline{Y}$).$v=0$.所以$x=\tilde{x}$.

13.由习题12知,$e_n\in\overline{Y}_2$的充要条件是(a)成立. $\widetilde{ey}\in\overline{Y}_1$的充要条件是$(b)$成立.$(a)$蕴涵$e_n\in\overline{Y}_2$.$(b)$蕴涵$\widetilde{ey}\in\overline{Y}_1$.

习 题 3.4

1.不一定.

2.根据定理3.4-5可证得:一个有限完全直交集$E=\{e_1,\cdots,e_n\}\subset H$是$H$作为向量空间的一个基.反之,如果向量空间$H$是$n$维的且$B$是含$n$个元素的基, 那么对$B$进行Gram-Schmidt过程就可得到$n$个元素的完全直交集.

3.设H是完备的.由(3)式

$$\|x+\beta y\|^2=\sum|\langle x+\beta y, e_k\rangle|^2=\sum\langle x+\beta y, e_k\rangle\overline{\langle x+\beta y, e_k\rangle}$$
乘开并利用(3)得,

$$\overline{\beta}\langle x, y\rangle+\beta\langle y, x\rangle=\overline{\beta}\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}+\beta\sum\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle y,e_k\rangle$$
取$\beta=1$及$\beta=i$分别得到

$$(I)\quad\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}+\sum\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle y,e_k\rangle$$

$$-i\langle x,y\rangle+i\langle y,x\rangle=-i\sum\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}+i\sum\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle y,e_k\rangle$$

最后的等式乘以 $+i$ 后与(I)式相加就得所求结果．如果 H 是实的，$\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle$，内积是实数．从($I$)直接可得所求结果．

4． 习题3中的关系式蕴涵(3)及收敛性，根据定理3.4-6此结论得证．

5．假设 $\theta\notin M$．因为 M 是可数的．我们可将它排成一序列 (x_n)．从 (x_n) 中能够得到一线性无关子序列 $(y_k)=(x_{n_k})$．具体作法是从 x_1 开始，依次略去是它前面项的线性组合的每一项．注意 (y_k) 可能是有限的．令 $V=\text{Span}(y_k)$．因为任何 $x\in M$ 是 $y_1,\cdots,y_k$(K 充分大)的线性组合，于是 $M\subset V$．V 在 H 中稠密．利用 Gram-Schmidt过程我们从 (y_k) 中得到一标准直交序列 (e_k)，使得对于每个 $m\in N$，

$$\text{Span}\{e_1,\cdots,e_m\}=\text{Span}\{y_1,\cdots,y_m\}.$$

因此，$\text{Span}(e_k)=\text{Span}(y_k)=V$ 在 H 中稠密，根据定义 (e_k) 是完全的．

6．F 在闭子空间 $Y=\overline{\text{Span}F}$ 中是完全的．取 $\widetilde{F}=F\cup F_0$，其中 F_0 是 $Y^\perp$ 中的完全直交序列其存在性是根据习题5，这里 $Y^\perp\neq\{\theta\}$．$Y^\perp=\{\theta\}$ 的情况是显然的．

7．对于所有 $x\in M$ $\langle v-w,\ x\rangle=0$ 蕴涵 $v-w\perp M$ 因此，根据定理3.4-5(a)有，$v=w$．

8．利用定理3.4-5立即得证．

习 题 3.5

1.R^3上的任一线性泛函是有界的，其内积就是点积.

2.从l^2上内积的定义和定理3.5-1立即得证.

3.因为

$$|f(x)| = |\langle x,z\rangle| \leqslant \|z\| \|x\|$$

所以，$\|f\| \leqslant \|z\|$.当$z=\theta$时.$\|f\|=\|z\|$.当$z\neq\theta$时，则$\|f\| \|z\| \geqslant |f(z)| = \langle z,z\rangle = \|z\|^2$. $\|f\| \geqslant \|z\|$.

4.我们记$z \mapsto f_z$.令(z_n)是X中的Cauchy序列.则$\|fz_n\| = \|z_n\|$.证明了(fz_n)是X^*中的Cauchy序列且收敛（参看定理2.8-13)，即，$fz_n \to f$. 满射蕴涵存在z，使得$z \mapsto f$且，

$$\|z_n - z\| = \|fz_n - f\| \to 0, z_n \to z.$$

因此，X是完备的.

5.$(l^2)^*$到l^2上的同构映射是$f \to z_f$.这里z_f(参看定理3.5-1).是由

$$f(x) = \langle x, z_f\rangle$$

定义的.对于实空间l^2，映射是线性的.

6.由(2)，

$$\|f_z - f_v\| = \|f_{z-v}\| = \|z - v\|. \qquad 且$$

$$f_{\alpha z+\beta v}(x) = \langle x, \alpha z + \beta v\rangle = \overline{\alpha}\langle x, z\rangle + \overline{\beta}\langle x, v\rangle$$

$$= \overline{\alpha} f_z(x) + \overline{\beta} f_v(x)$$

7.易验证内积$\langle f_z, f_v\rangle = \langle v, z\rangle$满足公理($IP1$)至($IP4$)，又由定理2.8-13知$H^*$是完备的.

8.习题6中的T是双射且是共轭线性的，因此两个这样等

距映射的复合是H到H^{**}上的一个同构.

9.有界性从Schwarz不等式得证.且当$X\neq\{\theta\}$时，$\|h\|=1$.

11. $|h(x+\triangle x, y+\triangle y)-h(x, y)|$

$$=|h(x, y)+h(x, \triangle y)+h(\triangle x, y)+h(\triangle x, \triangle y)-h(x, y)|$$

$$\leqslant|h(x, \triangle y)|+|h(\triangle x, y)|+|h(\triangle x, \triangle y)|$$

$$\leqslant\|h\|\|x\|\|\triangle y\|+\|h\|\|\triangle x\|\|y\|+\|h\|\|\triangle x\|\|\triangle y\|\to 0$$

(当$\triangle x\to 0, \triangle y\to 0$时).

12.若$K=R$,，最后一个条件是$h(x, y)=h(y, x)$此时称h为对称双线性泛函. h成为X上的内积必附加正定的条件：对所有$x\in X$，$h(x, x)\geqslant 0$,且$x\neq\theta$时，$h(x, x)>0$.

13.若$h(y, y)\neq 0$,则$h(y, y)>0$,由

$$(a)\qquad 0\leqslant h(x-\alpha y, x-\alpha y)=h(x, x)-\bar{\alpha}h(x, y)-\alpha h(y, x)+|\alpha|^2h(y, y)$$

选$\alpha=\dfrac{h(x, y)}{h(y, y)}$得.

$$h(x, x)-\frac{|h(x, n)|^2}{h(y, y)}\geqslant 0$$

若$h_1(x, x)\neq 0$,证明类似.如果$h(x, x)=h(y, y)=0$.则(a)成为.

$$-\bar{\alpha}h(x, y)-\alpha h(y, x)\geqslant 0.$$

选$\alpha=h(x, y)$,得

$$-\alpha|h(x, y)|^2\geqslant 0.$$

因此，$h(x, y)=0$.

14.只证满足三角不等式.

$$[p(x+y)]^2 = h(x+y,x+y)$$
$$\leqslant h(x,x)+2|h(x,y)|+h(y,y)$$
$$\leqslant h(x,x)+2\sqrt{h(x,x)}\sqrt{h(y,y)}+h(y,y)$$
$$=[\sqrt{h(x,x)}+\sqrt{h(y,y)}]^2$$

所以，$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

习 题 3.6

2.由假设T^{-1}有界，根据定理3.6-2知$(T^{-1})^*$存在且有界.因此，对所有x,y.

$$\langle x,y\rangle = \langle T^{-1}Tx,\ y\rangle = \langle Tx,(T^{-1})^*y\rangle$$
$$=\langle x,T^*(T^{-1})^*y\rangle$$
$$\langle x,y\rangle = \langle TT^{-1}x,y\rangle = \langle T^{-1}x,T^*y\rangle$$
$$=\langle x(T^{-1})^*T^*y\rangle$$

于是，$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I$.$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

3.$\|T^*_n - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|\to 0$.($n\to\infty$时)

4.我们考虑任意$z\in M_2^{\perp}$与任意$x\in M_1$,有$z\perp M_2$和$Tx\in T(M_1)\subset M_2$,因此，$\langle z,Tx\rangle = 0,\langle T^*z,x\rangle = 0$.$T^*z\perp x$ $T^*(M_2^{\perp})\subset M_1^{\perp}$.

5.设$T(M_1)\subset M_2$,根据习题4,则$T^*(M_2^{\perp})\subset M_1^{\perp}$,反过来.设$T^*(M_2^{\perp})\subset M_1^{\perp}$.再利用习题4,有$T^{**}(M_1^{\perp\perp})\subset M_2^{\perp\perp}$,由定理3.6-4，$T^{**}=T$.根据引理3.2-6.$M_1^{\perp\perp}=M_1$.$M_2^{\perp\perp}=M_2$.

6.(a)根据习题4,$T(M_1)\subset\{\theta\}$蕴涵$M_1^{\perp}\supset T^*(\{\theta\}^{\perp}) = T^*(H_2)$.

(b) 设$J = T(H_1)$. 则$T(H_1) \subset J$, $T^*(J^\perp) \subset H_1^\perp = \{\theta\}$.|(由习题4). $T^*(J^\perp) = \{\theta\}$. $J^\perp \subset N(T^*)$.

(c) 由(a), $T^*(H_2) \subset M_1^\perp$. 因此, $[T^*(H_2)]^\perp \supset M_1^{\perp\perp} \supset M_1$ 根据(b), 用T^*代替T有, $[T^*(H_2)]^\perp \subset N(T) = M_1$

7. 利用定理3.6-3(b)直接得证.

8. 由Schwarz不等式,

$$\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle T^*T.x, x\rangle$$
$$= \langle Sx.x\rangle \leqslant \|Sx\| \|x\|.$$

因此, $Sx = \theta$蕴涵$\|x\| = 0$. 根据定理2.6-10, $S^{-1}: S(H) \to H$存在.

9. 设$\{b_1, \cdots, b_n\}$是关于$T(H) = R(T)$的一组直交基. 设$x \in H$, $Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) b_i$, 则.

$$\langle Tx, b_k\rangle = \alpha_k(x) = \langle x, T^*b_k\rangle \text{且},$$

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x.v_i\rangle W_i. \text{这里} W_i = b_i.v_i = T^*b_i$$

10. $R(T) = \overline{\text{Span}\{e_2, e_3, \cdots, \}}$, $N(T) = \{\theta\}$. $\|T\| = 1 = \|T^*\|$

习 题 3.7

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^* = \alpha T + \beta S$ (利用定理3.6-4及α, β是实数)

2. 利用定理3.6-4及T是自伴的. 得.

$$(T^n)^* = (T^*)^n = T^n.$$

3. 由定理3.6-4得.

$$T_1^* = \frac{1}{2}(T + T^*)^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**})$$

$$= \frac{1}{2}(T + T^*) = T_1$$

$$T_2^* = -\frac{1}{2i}(T - T^*)^*$$

$$= -\frac{1}{2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = T_2$$

下面证唯一性，假定$T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$．则，

$$T_1^* - iT_2^* = S_1^* - iS_2^*$$

由T_1, T_2, S_1, S_2是自伴的．所以，

$$T_1 - iT_2 = S_1 - iS_2$$

与原假定式相加得$T_1 = S_1$．相减得$T_2 = S_2$．

4．$T^*x = (\xi_1 + \xi_2, i\xi_2 - i\xi_1)$

$$T_1x = (\xi_1 + \frac{1+i}{2}\xi_2,\ \frac{1-i}{2}\xi_1)$$

$$T_2x = (\frac{i+1}{2}\xi_2,\ \frac{1-i}{2}\xi_1 - \xi_2)$$

5．(*a*)对某个$x \in H$，$Tx \neq 0$．因此．

$$0 < \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^2x, x\rangle.$$

即，$T^2 \neq 0$．同理可证$n = 4, 8, 16\cdots$，时$T^n \neq 0$．

(*b*)$T^n = 0$蕴涵对于每个$p > n$，$T^p = T^{p-n}(T^n) = 0$这与$p = 2^k > n$，$T^p \neq 0$矛盾．

6．从$\overline{U}' U = U^{-1}U = I$中得证．

7. §3. 1中的公式(10)及(11)蕴涵T保持内积不变. 因此对所有x, y.

$$0=\langle x, y\rangle \quad \langle Tx, Ty\rangle=\langle x, x\rangle-\langle x, T^*Ty\rangle$$
$$=\langle x, (I-T^*T)y\rangle$$

因而对所有y. $(I-T^*T)y=0$. 即$T^*T=I$.

8. 由定理2.6-9. $R(T)=Y\subset H$是一子空间，对于$y\in \overline{Y}$，存在一序列$(y_n)\subset Y$，使$y_n\to y$. 设$y_n=Tx_n$，则(x_n)是Cauchy序列（因为等距），由H是完备的. 存在$x\in H$，使$x_n\to x$. 所以$\|Tx-y\| = \|(Tx-Tx_n)+(Tx_n-y)\|$

$$\leqslant \|T\| \ \|x-x_n\| + \|y_n-y\|\to 0$$

即 $y=Tx\in Y$. 根据定理1.4-7(b)，Y是闭的. 如果$Y=H$，则T是酉算子.

9. 根据定理2.6-9，$R(T)$是向量空间且，$\dim R(T)\leqslant \dim X$. 由于$T$的等距性. T将X的直交基映成$R(T)$中一直交集，因此$\dim R(T)\geqslant \dim X$合起来，$\dim R(T)=\dim X$. 且$R(T)=X$. 即$T$是酉算子.

10. $S^*=(UTU^*)^*=U^{**}T^*U^*=UTU^*=S$

11. 这从

$$TT^*=(T_1+iT_2)(T_1-iT_2)$$
$$=T_1^2+T_2^2+i(T_2T_1-T_1T_2)$$
$$T^*T=(T_1-iT_2)(T_1+iT_2)$$
$$=T_1^2+T_2^2-i(T_2T_1-T_1T_2)$$

或从等式

$$4iT_1T_2=T^2-T^{*2}+(T^*T-TT^*)$$
$$4iT_2T_1=T^2-T^{*2}-(T^*T \quad TT^*)$$

立即得证.

12. $\|TT^*-T^*T\| \leqslant \|TT^*-T_nT_n^*\|+\|T_nT_n^*-$

$$T_n^*T_n\|+\|T_n^*T-T_n^*T_n\|$$

右边第二项等于零. 根据§ 3.6中习题3. $T_n \to T$蕴涵$T_n^* \to T^*$，所以，右边的另外两项当$n \to \infty$时趋于零.

13. $S+T$的正规性从假设和下式

$$(S+T)(S+T)^*=SS^*+ST^*+TS^*+TT^*$$

$$(S+T)^*(S+T)=S^*S+T^*S+S^*T+T^*T$$

可证得.

ST的正规性从

$$(ST)(ST)^*=STT^*S^*=ST^*TS^*=T^*SS^*T$$

$$=T^*S^*ST=(ST)^*ST$$

可以看出.

14. 根据定理3.6-3(b).

$$\langle T^*x, T^*x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \Longleftrightarrow \langle T^*Tx, x\rangle$$

$$=\langle TT^*x, x\rangle \Longleftrightarrow \langle (T^*T-TT^*)x, x\rangle$$

$$=0 \Longleftrightarrow T^*T=TT^*.$$

由$\|T^*x\|=\|Tx\|$，$\|T^*Tx\|=\|T^2x\|$. 根据§ 3.6中的(6e)，

$$\|T^2\|=\sup_{\|x\|=1}\|T^2x\|=\sup_{\|x\|=1}\|T^*Tx\|=\|T^*T\|=\|T\|^2.$$

习 题 4.1

1. 易验证“$\subset$”满足定义4.1-1中的($PO1$)至($PO3$)

2. 因为X中存在不可比元素，所以X不是全序集. X中也没有极大元.

3. 直接验证“$\leqslant$”满足($PO1$)至($PO3$)，且存在不可比元素.

4. (a) 极大元是3和8；(b)M中的每个元均是极大元.

5. 设半序集A所含元素的个数为n. 当$n=1$时，A有一个极大元. 假设$n=K$时A至少有一个极大元. 当$n=K+1$时，令$A=A_k\cup\{a\}$. 这里a是A中任一元素. $A_k=A-\{a\}$是含K个元素的半序集. 由假设A_k至少有一极大元c_k，则a与a_k之间可能有以下三种情况：或a与a_k不可比，或$a\leqslant a_k$，或$a_k\leqslant a$. 若a与a_k不可比，那么a_k仍是一极大元. 若$a\leqslant a_k$. a_k也是极大元. 若$a_k\leqslant a$，a就是一极大元. 总而言之，当$n=k+1$时，A至少有一个极大元.

6. 设存在a与c，使得对于所有$x\in M$，有$a\leqslant x$且$c\leqslant x$. 于是，$a\leqslant c$且$c\leqslant a$. 根据($PO2$). $c=a$. 第二部分证明与此类似.

7. A的上界是：12、24、36，….

A的下界是：1，2.

8. (a)设x_1和x_2均是A的$g.l.b$. 于是，$x_1\leqq x_2$，$x_2\leqslant x_1$，由($PO2$)得$x_1=x_2$.

(b). $g.l.b\{A,B\}=A\cap B$，$l.a.b\{A,B\}=A\cup B$.

10. $M=\{2,3,4,8\}$的极小元是2、3.

习 题 4.2

4. $P(\theta)=P(0x)=0P(x)=0$.

$$0=P(\theta)=P(-x+x)\leqslant P(-x)+P(x)$$

于是，$-P(x)\leqslant P(-x)$

5. 对于$x,y\in M$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，则

$$P(\alpha x+(1-\alpha)y\leqslant P(\alpha x)+P((1-\alpha)y)$$
$$=\alpha P(x)+(1-\alpha)P(y)$$
$$\leqslant\alpha r+(1-\alpha)r$$
$$=r.$$

即，$\alpha x+(1-\alpha)y\in M$．从而证得$M$是凸集．

6．对于每个$x_0\in X$，$x\in X$，由

$$P(x)-P(x_0)\leqslant P(x-x_0)$$
$$P(x_0)-P(x)\leqslant P(x_0-x)$$

而当$x\to x_0$时，有$(x-x_0)\to\theta$，故由题设知．

$$\lim_{x\to x_0}|P(x)-P(x_0)|=0.$$

因此，P在每个$x_0\in X$是连续的．

7．对于任意$x,y\in X$，$\alpha\geqslant0$，有

$P_i(x+y)\leqslant P_i(x)+P_i(y)$．$P_i(\alpha x)=\alpha P_i(x)$

$i=1,2$.所以，

$$P(x+y)=C_1P_1(x+y)+C_2P_2(x+y)$$
$$\leqslant C_1[P_1(x)+P_1(y)]+C_2[P_2(x)+P_2(y)]$$
$$=[C_1P_1(x)+C_2P_2(x)]+[C_1P_1(y)+C_2P_2(y)]$$
$$=P(x)+P(y)$$
$$P(\alpha x)=C_1P_1(\alpha x)+C_2P_2(\alpha x)$$
$$=C_1\alpha P_1(x)+C_2\alpha P_2(x)$$
$$=\alpha[C_1P_1(x)+C_2P_2(x)]$$
$$=\alpha P(x).$$

8．对于满足$\|x\|\leqslant r$的每个$x\neq\theta$存在一个$n\in N$．使得

$\|nx\| = n\|a\| > r$. 因此，$P(nx) \geqslant 0$. 由(1)有. $P(nx) \leqslant nP(x)$. 于是，$P(x) \geqslant 0$.

对于$x=\theta$, $P(\theta) \leqslant P(\theta)+P(\theta)$. 从而，$P(\theta) \geqslant 0$.

9. 对于$x=\alpha x_0$, $y=\beta x_0$. 有

$$f(x+y)=f[(\alpha+\beta)x_0]=(\alpha+\beta)P(x_0)$$
$$=\alpha P(x_0)+\beta P(x_0)$$
$$=f(x)+f(y).$$
$$f(rx)=f(r\alpha x_0)=r\alpha P(x_0)=rf(x)$$

这里$r \in R$是任意的. 所以，f在Z上是线性的. 下面证$f(x) \leqslant P(x)$. $x \in Z$.

若$\alpha \geqslant 0$,则，$f(x)=\alpha P(x_0)=P(x)$

若$\alpha < 0$. 由习题4.

$$f(x)=\alpha P(x_0) \leqslant -\alpha P(-x_0)=P(\alpha x_0)=p(x).$$

10. 对习题9中的f，利用定理4.2-2，得到一X上的线性泛函$\tilde{f}$且满足$\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$.

由$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x) \leqslant P(-x)$推得$-P(-x) \leqslant \tilde{f}(x)$.

习　题　4.3

1. $P(\theta)=P(ox)=op(x)=0$.这蕴涵

$$0=P(\theta)=P(x+(-x)) \leqslant p(x)+p((-1)x)=2p(x)$$

2. $P(x)=p(x-y+y) \leqslant p(x-y)+P(y)$.

于是. $P(x)-P(y) \leqslant P(x-y)$

同理, $P(y)-P(x) \leqslant P(y-x)=P(-1(x-y))=P(x-y)$

因此，$|P(x)-P(y)| \leqslant P(x-y)$.

3. 由于f_1是线性的，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(ix) &= \tilde{f}_1(ix) - i\,\tilde{f}(-x)\\ &= \tilde{f}_1(ix) + i\tilde{f}_1(x)\\ &= i[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)]\\ &= i\,\tilde{f}(x).\end{aligned}$$

4. 在$Z=\{x\,|x=\alpha x_0\}$上通过

$$f(\alpha x_0)=\alpha P(x_0)$$

定义一个线性泛函f. 则. $f(x_0)$. $=P(x_0)$.
$|f\alpha x_0)|=P(\alpha x_0)$. 利用定理4.3-1，$f$有一从$Z$到$X$的延拓$\tilde{f}$且满足$|\tilde{f}(x)|\leqslant P(x)$.

5. 略.

6. f从R^2到R^3的所有线性延拓$\tilde{f}$为

$$\tilde{f}(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3 \qquad x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

其范数为$\|\tilde{f}\|=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)^{1/2}$ （α_3为任意实数）当且仅当$\alpha_3=0$时. $\|\tilde{f}\|=\|f\|$.

7. 由Riesz定理3.5-1，对于$x_0\neq\theta$，则存在有界线性泛函$\tilde{f}(x)=\langle x,x_0\rangle/\|x_0\|$

8. 因为$X\neq\{\theta\}$，必存在$x_1\in X$，$x_1\neq\theta$，由定理4.3-3，X上存在一有界线性泛函$\tilde{f}$，使得，$\|\tilde{f}\|=1$．$\tilde{f}(x_1)=\|x_1\|$. 因此，$X^*\neq\{0\}$.

9. 设Y是X的可数稠密子集. 若$(X-Z)\cap Y=\varnothing$. 则

$Y\subset Z$. Z是X的稠密集. 由定理2.7-12, 得f到$\overline{Z}=X$上有界线性延拓$\tilde{f}$, $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_z$. 若$(X-Z)\cap Y\neq\phi$. 存在$y_1\in(X-Z)\cap Y$. 令,

$Z_1=\mathrm{Span}(Z\cup\{y_1\})$. $g_1(z+\alpha y_1)=f(z)+\alpha c, z\in Z$这 里$c$是定理4.2-2证明中$(c)$部分所确定的常数$c$. 于是$g_1$是$f$到$Z_1$上的一个线性延拓, 且满足, $g_1(x)\leqslant P(x)=\|f\|_z\|x\|$, 由此, $-g_1(x)=g_1(-x)\leqslant P(-x)=P(x)=\|f\|_z\|x\|$. 所以. $|g_1(x)|\leqslant\|f\|_z\|x\|$. 故$g_1$是$f$到$Z_1$上的一个有界线性延拓. 依此类推, 至多经可数多步, f可有界线性地延拓到X的一个稠密子集上. 由定理2.7-12得f到X上的有界线性延拓$\tilde{f}$. 且$\|\tilde{f}\|_x=\|f\|_z$.

10. 若$x_0\neq\theta$, 则由定理4.3-3. 存在一个$\tilde{f}\in X^*$, 使$\|\tilde{f}\|=1$. $\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|\neq 0$, 这与题设, 任意$f\in X^*$, $f(x_0)=0$矛盾. 于是$x_0=\theta$.

11. 将$x-y$视为习题10中的x_0. 立即得证.

12. 设$x_0=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$. $\alpha_i=\xi_i^{(0)}/\|x_0\|$, 于是, $\tilde{f}(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$. $\|\tilde{f}\|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}=1$, $\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|$.

13. 由定理4.3-3, 存在$\tilde{f}$, $\|\tilde{f}\|=1$. $\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|$. 令$\hat{f}=\frac{1}{\|x_0\|}\tilde{f}$. 则 $\|\hat{f}\|=\frac{1}{\|x_0\|}$. 且$\hat{f}(x_0)=\frac{1}{\|x_0\|}\tilde{f}(x_0)=1$.

14. 由定理4.3-3, 存在一个$\tilde{f}\in X^*$, 使得$\|\tilde{f}\|=1$, $\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|$. 令$H_0=\{x\mid\tilde{f}(x)=r\}$. 则$H_0$是一超平面. $\{x\mid$

$\widetilde{f}(x)\leqslant r\}$是一半空间．对于任意$x\in\widetilde{B}(\theta．r)$．$\|x\|\leqslant r$．因此．

$$\widetilde{f}(x)\leqslant\|\widetilde{f}\|\,\|x\|\leqslant r.$$

即$\widetilde{B}(\theta,r)\subset\{x|\widetilde{f}(x)\leqslant r\}$．且$x_0\in H_0$．

15．由定理4.3-3．若$\|x_0\|>c$．则存在$\widetilde{f}\in X^*$使$\|\widetilde{f}\|=1$，$\widetilde{f}(x_0)=\|x_0\|>c$．与对所有范数为1的$f\in X^*$．$|f(x_0)|\leqslant c$矛盾．从而$\|x_0\|\leqslant c$．

习　题　4.4

1．$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=g(T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2))$

$$=g(\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2)$$

$$=\alpha_1g(Tx_1)+\alpha_2g(Tx_2)$$

$$=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$

2．$O^\times$是Y^*上的零算子．$I^\times$是$Y^*=X^*$上的恒等算子。

3．$((S+T)^\times g)(x)=g((S+T)x)=g(sx)+g(Tx)$

$$=(S^\times g)(x)+(T^\times g)(x)$$

$$=((S^\times+T^\times)g)(x)\text{对所有}x\in X,\ g\in Y^*$$

因此，$(S+T)^\times g=(S^\times+T^\times)g$　对每个$g\in Y^*$

于是，$(S+T)^\times=S^\times+T^\times$

4．我们得到，对于任意$x\in X$，每个$g\in Y^*$

$$((\alpha T)^\times g)(x)=g((\alpha T)x)=g(\alpha Tx)$$

$$=\alpha g(Tx)=\alpha(T^\times g)(x)$$

因此，$(\alpha T)^\times=\alpha T^\times$．

5．$((ST)^{\times}g)(x)=g(STx)=(S^{\times}g)(Tx)$
$$=(T^{\times}(S^{\times}g))(x)$$
从而，$(ST)^{\times}=T^{\times}S^{\times}$.

6．由(11)，当$n=2$时，$(T^2)^{\times}=(T^{\times})^2$.
若当$n=k$时．$(T^k)^{\times}=(T^{\times})^k$，则，
$$(T^{k+1})^{\times}=(T^k\cdot T)^{\times}=T^{\times}(T^k)^{\times}=T^{\times}(T^{\times})^k=$$
$(T^{\times})^{k+1}$从而，对于任何自然数n．$(T^k)^{\times}=(T^{\times})^k$成立.

7．设S和T的表示矩阵分别为A和B，则有，$(AB)^T=B^TA^t$.

8．由$(T^{-1})^{\times}:X^*\to Y^*$存在，和$T^{-1}T=I_X$
推得．$(T^{-1}T)^{\times}=T^{\times}(T^{-1})^{\times}=IX_*$
由，$TT^{-1}=I_Y$ 得，
(a)　　$(T^{-1})^{\times}T^{\times}=I_Y*$
因此，$T^{\times}:Y^*\to X^*$是双射，$(T^{\times})^{-1}$存在，且由(a)得到，
$$(T^{-1})^{\times}=(T^{-1})^{\times}T^{\times}(T^{\times})^{-1}=(T^{\times})^{-1}$$

9．$g\in M^a\Longleftrightarrow(T^{\times}g)(x)=g(Tx)=0$ 对所有$x\in X$，
$$\Longleftrightarrow T^{\times}g=0\Longleftrightarrow g\in N(T^{\times})$$

10．对于任意$y\in R(T)$．存在$x\in X$，使得$y=Tx$．令$g\in N(T^{\times})$．则，$g(y)=g(Tx)=(T^{\times}g)(x)=0$．于是$y\in {}^aN(T^{\times})$．因为$y\in R(T)$是任意的．因此，$R(T)\subset{}^aN(T^{\times})$．
$Tx=y$有解x的必要条件是对于所有 $g\in N(T^{\times})$ 有 $g((y)=0$.

习 题 4.5

1．$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\cdots+\alpha_n\xi_n$，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$
$g_x(f)=\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n$，($\xi_j$是固定的，$j=1,2\cdots n$)

2．由于Y是闭真子空间．x_0可直交分解为$x_0=y_0+z_0$，$y_0\in Y$，$z_0\in Y^{\perp}$．因为$x_0\in X-Y$所以，$z_0\neq\theta$，令$\tilde{f}(x)=\langle x,z_0\rangle/\|z_0\|$，于是，对于所有$y\in Y$，$\tilde{f}(y)=0$.由定理3.2-1和定理3.2-5知，$\delta=\|x_0-y_0\|=\|z_0\|$．由定理3.5-1，$\|\tilde{f}\|=1$.

3．设$h\in X^{***}$．由于X是自反的，存在标准映射J：$X\to X^{**}$是双射．所以，对于每个$g\in X^{**}$，存在一个$x\in X$，使得$g=Jx$．于是通过$h(g)=h(Jx)=f(x)$定义X上一有界线性泛函f．且，$J_1f=h$，这里$J_1:X^*\to X^{***}$是通过$h(g)=g(f)=f(x)$定义的标准映射．(f是固定的而x是任意的)．因此，J_1是满射．故X^*是自反的.

4．(a)若X是自反的，由习题3则X^*是自反的.

(b)设X^*是自反的．由(a)则X^{**}是自反的．根据定理4.5-4，X^{**}是完备的．由于X是完备的且与X^{**}的一子空间同构（参看4.5-2）．因此那个子空间是完备的.利用定理1.4-8，也是闭的．由已给的提示和定理4.5-2，X是自反的.

5．令$h=\tilde{f}/\delta$.由于$\|\tilde{f}\|=1$．所以，$\|h\|=1/\delta$.对于所有$y\in Y$，因为$\tilde{f}(y)=0$，于是$h(y)=0$．且$h(x_0)=\tilde{f}(x_0)/\delta=\delta/\delta=1$.

6．令$x_0\in Y_2$，$x_0\notin Y_1$．则$\delta=\inf\limits_{y\in Y_1}\|y-x_0\|>0$．则存在$\tilde{g}\in X^*$使得，$\tilde{g}|_{Y_1}=0$，$\tilde{g}(x_0)=1$（参看习题5），因此，$\tilde{g}\in Y_1^a$，但，$\tilde{g}\notin Y_2^a$.

7．若$Y\neq X$，存在一个$x_0\in X-Y$．且，$\delta=\inf\limits_{y\in Y}\|y-x_0\|>0$．由于$Y$是闭的．由引理4.5-7，存在$\tilde{f}\in X^*$，$\tilde{f}|_Y=0$，而$\tilde{f}(x_0)=\delta>0$．这与假定矛盾．

8．若$x_0\in A$，则存在序列$(x_n)\subset \mathrm{Span}M$．使得$x_n\to x_0$对于满足$f|_M=0$的每个$f\in X^*$有$f(x_n)=0$．（因为$f$是线性的）．由于$f$是连续的．则$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$．反过来．用反证法．若$x_0\notin A$．根据引理4.5-7，存在$\tilde{f}\in X^*$使得$\tilde{f}|_A=0$．$\tilde{f}(x_0)\neq 0$．这与题设矛盾．

9．若M不是完全的．则$Y=\overline{\mathrm{Span}\,M}\neq X$，存在$x_0\in X-Y$，由引理4.5-7，存在$\tilde{f}\in X^*$使得$\tilde{f}|_Y=0$，因而在$M$上也处处为零．但$\tilde{f}(x_0)\neq 0$这与题设矛盾．从而$M$是完全的．若$M$是完全的，则$X=Y$．显然满足习题中的条件．

10．设$\{x_1,\cdots,x_n\}$是X中线性无关集．根据习题5（是引理4.5-7的一个直接结果），X上存在n个有界线性泛函f_1，$\cdots$，f_n，使得，

$$f_j(x_j)=1．f_j(x_k)=0 \qquad (k\neq j)．$$

下面证明$\{f_1,\cdots f_n\}$是X^*中一线性无关集．若

$$\sum_{j=1}^{n}r_jf_j=0$$

则对于所有$x\in X$．有

$$\sum_{j=1}^{n}r_jf_j(x)=0．$$

分别取$x=x_1,\cdots,x_n$，得$r_j=0$．即证得集$\{f_1,\cdots,f_n\}$在X^*线性无关．

习 题 4.6

1．(a)在R中全体有理数构成的集合是属于瘠集.

(b)在其自身中也是瘠集.

2．(a)整数的全体构成的集合在R中是属于瘠集.

(b)因为整数全体构成一完备度量空间，根据定理4.6-2，在其自身中是非瘠的（第二范畴的）

3．因为离散度量空间X中的每个子集均是开的．所以它没有稀疏集.

4．具有有理坐标的所有点的集合是R^2中一个瘠稠密子集.

5．$(\overline{M})^c$的闭包等于X全体当且仅当对于每个$x\in\overline{M}$均是$(\overline{M})^c$的聚点，即$\overline{M}$没有内点．因此，M在X中是稀疏的当且仅当$(\overline{M})^c$在X中稠密.

6．用反证法证明．若M^c是瘠集，则$X=M\cup M^c$是瘠集．这与定理4.6-2矛盾．因此，M^c是非瘠的.

7．若对于所有$x\in X$．$\sup\|T_n x\|<+\infty$．根据一致有界性定理4.6-3，则$(\|T_n\|)$有界，即存在常数c，使得

$$\|T_n\|\leqslant c. \qquad (n=1,2\cdots)$$

从而，$\sup\limits_n\|T_n\|\leqslant c$.这与$\sup\limits_n\|T_n\|=\infty$矛盾.因此，存在$x_0\in X$，使得$\sup\limits_n\|T_n x_0\|=+\infty$.

8．$X=\{x|\ x=(\xi_i)\ j\geqslant J\in N时.\ \xi_i=0\}.\subset l^\infty$ $f_n(x)=n\xi_n$.对于每个$x\in X$，$f_n(x)\to0(n\to\infty)$但$\|f_n\|=n$，即$(\|f_n\|)$无界．其原因是X为非完备的度量空间.

9．显然，$\|T_n x\| \leqslant \|x\|$. $\lim_{n\to\infty}\|T_n x\|^2 = \lim_{n\to\infty}$

$(\sum_{k=2n-1}^{\infty} |\xi_k|^2) = 0$. $\|T_n\| \leqslant 1$. 取$x_0 = (0, \cdots 0, 1, 0 \cdots)$
则$\|x_0\| = 1$，$\|T_n x_0\| = 1$. $\|T_n\| \geqslant \|T_n x_0\| = 1$，于是，$\|T_n\| = 1$. $\lim_{n\to\infty}\|T_n\| = 1$

10.因为c_0是l^∞的闭子空间，所以c_0是完备的．在c_0上定义有界线性泛函f_n为：

$$f_n(x) = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n,\quad n = 1, 2\cdots,$$

由§ 2.8习题18，我们有：$\|f_n\| = |\eta_1| + \cdots + |\eta_n|$.对于每个$x \in c_0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$ 存在．因此，根据定理4．6-3，$(\|f_n\|)$是有界的.即，$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i| < +\infty$.

11．因为对于每个$x \in X$，$(T_n x)$均是Y中的Cauchy序列，由§ 1.4习题 3．每个Cauchy序列均是有界的，利用定理4.6- 3 证得$(\|T_n\|)$是有界的.

12．因为Y是完备的，有$T_n x \to y \in Y$,定义,$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x = y$．由$T_n$是线性的．$T$是线性的.由于$\|T_n\| \leqslant c$(根据习题11),我们有,

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|\,\|x\| \leqslant c\,\|x\|.$$

利用范数的连续性，得，

$$\|Tx\| \leqslant c\,\|x\|.$$

13．令$g_n(f) = f(x_n)$，则对于每个$f \in X^*$，$(g_n(f))$是有界的，根据定理4.6- 3，$(\|g_n\|)$是有界的．由定理4.5- 1知，$\|x_n\| = \|g_n\|$，因此$(\|x_n\|)$是有界的.

14．因为(c)蕴涵(b)（参看习题13)．根据定理4.6- 3，

(b)蕴涵(a). 由于,

$$|g(T_n x)| \leqslant \|g\| \|T_n\| \|x\|$$

于是, (a)蕴涵(c). 因此,(a)、(b)、(c)三个命题等价.

15. $x(t)$的Fourier级数为.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots)$$

当$t=0$时, 此级数收敛于$\frac{1}{2}$.

习 题 4.7

1. 对于固定的$t_0\in[a,b]$,在$c[a,b]$上定义 有界线性泛函δt_0为.

$$\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$$

由$x_n \xrightarrow{w} x$则$\delta_{t_0}(x_n)\to\delta_{t_0}(x)$.即$x_n(t_0)\to x(t_0)$.因此.$(x_n)$在$[a,b]$上是逐点收敛的.

2. 任意取$h\in Y^*$,定义f为

$$f(x)=h(Tx) \qquad x\in X.$$

显然f是线性的. 由$h\in Y^*$和T是有界的. 有.

$$|f(x)| = |h(Tx)| \leqslant \|h\| \|Tx\| \leqslant \|h\| \|T\| \|x\|$$

因此, $f\in X^*$,因为$x_n \xrightarrow{w} x_0$蕴涵$f(x_n)\to f(x_0)$即, $h(Tx_n)\longrightarrow h(Tx)$, 而$h\in Y^*$是任意的, 这就意味着$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

3. 因为任意$f\in X^*$是线性的. 所以,

$$f(x_n+y_n)=f(x_n)+f(y_n)\longrightarrow f(x)+f(y)$$
$$=f(x+y).$$
$$f(\alpha x_n)=\alpha f(x_n)\longrightarrow \alpha f(x)=f(\alpha x).$$

4．用反证法证．若$x_0 \notin \overline{Y}$．则由引理4.5-7，存在一个$\tilde{f} \in X^*$，使得对于所有$y \in \overline{Y}$．$\tilde{f}(y)=0$ $\tilde{f}(x_0)=\delta=\inf\limits_{y \in \overline{Y}}\|y-x_0\|>0$．显然$(\tilde{f}(x_n))$不收敛于$\tilde{f}(x_0)$．这与$x_n \xrightarrow{w} x_0$矛盾．因此，$x_0 \in \overline{Y}$

5．令$Y=\mathrm{Span}(x_n)$，根据习题4．$x_0 \in \overline{Y}$由定理1.4-7（a），存在Y中的序列(y_m)．使得，$y_m \to x_0$．因为$y_m \in Y=\mathrm{Span}(x_n)$，即$y_m$是$(x_n)$的元素的线性组合．

6．利用习题5直接得证．

7．设(x_n)是弱Cauchy序列，定义$g_n \in X^{**}$为$g_n(f)=f(x_n)$（参看§ 4.5），因为$(f(x_n))$是Cauchy数列，所以它有界，即，

$$|f(x_n)|=|g_n(f)| \leqslant c_f$$

由于X^*是完备的，根据定理4.5-1和4.6-3得$\|x_n\|=\|g_n\| \leqslant c$.

8．用反证法，若A无界，则A包含一无界序列(x_n)，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\infty$．于是对于$(x_n)$的每个子序列$(x_{n_i})$，均有$\lim\limits_{i\to\infty}\|x_{n_i}\|=\infty$．由习题7，$(x_n)$没有弱Cauchy子序列．这与题设矛盾．

9．设(x_n)是X中任意的弱Cauchy序列．则对于每个$f \in X^*$，$(f(x_n))$均收敛．对于$x_n \in X$存在$g_n \in X^{**}$，使得$g_n(f)=f(x_n)$．因此，$(g_n(f))$收敛，即$g_n(f) \to g(f)$．由习题7知(x_n)有界且$\|g_n\|=\|x_n\|$（参看4.5-1）．于是

$$\|g(f)\| \leqslant \|g(f)-g_n(f)\|+\|g_n(f)\| \leqslant \varepsilon+c\|f\|$$ 取$\varepsilon \to$

$\|f\|$. $(n>N)$，则有

$$\|g(f)\|\leqslant(1+c)\|f\|$$

即f有界。由定义$g(f)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(f)$知$g$是线性的．因此，$g\in X^{**}$．由于$X$是自反的．则存在$x\in X$，使得对于每个$f\in X^*$，有

$$g(f)=f(x).$$

从而，$f(x_n)\longrightarrow f(x)$．即$x_n\xrightarrow{w}x$．因为$(x_n)$是$X$中任意弱Cauchy序列．因此，$X$是弱完备的．

习 题 4.8

1．对于每个$x\in X$，有，

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\,\|x\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$$

即一致算子收敛蕴涵强算子收敛．

2．对于每个$x\in X$，有

$$\|(S_n+T_n)x-(S+T)x\|$$
$$\leqslant\|S_nx-Sx\|+\|T_nx-Tx\|\to 0$$

（当$n\to\infty$时）．因此，S_n+T_n强算子收敛于$S+T$．

3．在定理4.7-4(a)中，用$y_n=Tx_n$和$y=Tx$代替x_n和x．利用此定理直接证得此命题．

4．设$(f_n)\subset X^*$，且$f_n\xrightarrow{w}f$．则对于每个$g\in X^{**}$，有$g(f_n)\to g(f)$．对于每个$x\in X$，存在$g_x\in X^{**}$，$f_n(x)=g_x(f_n)\to g_x(f)=f(x)$．即$f_n\xrightarrow{w}f$蕴涵$f_n\xrightarrow{w*}f$．

若X是自反的，对于每个$g\in X^{**}$，存在$x\in X$．使得$f(x)=g(f)$．对于任意$f\in X^*$均成立．因此，弱*收敛：$f_n\xrightarrow{wn}f$蕴涵：

$$g(f_n) - g(f) = f_n(x) - f(x) \to 0$$

5．$f_n(x) = \xi_n$，$x = (\xi_n) \in l^1$．因为$x \in l^1$．所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ 收敛．我们有$f_n(x) = \xi_n \to 0$．$(n \to \infty)$ 即(f_n)强算子收敛于0．但易证$\|f_n\| = 1$．所以(f_n)不一致收敛于0．

6．设$T_n \to T$，且$\|x\| = 1$，则由

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\| \, \|x\| = \|T_n - T\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

可得：对于每个$\varepsilon > 0$，总存在N，使得对于所有$n > N$，和所有范数为1的$x \in X$，有

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon.$$

反过来．若习题中的这些条件成立．则，

$$\|T_n y - Ty\| < \varepsilon \qquad (n > N, \ \|y\| = 1)$$

对于任意固定的$x \neq \theta$，设$y = x/\|x\|$，有

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n y - Ty\| \, \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

因此，对于所有$n > N$，

$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon.$$

7．由假设，对于每个$x \in X$，$(T_n x)$收敛，因此，由引理1.4-2．$(\|T_n x\|)$是有界的．于是$(\|T_n\|)$有界（参看定理4.6-3）．

8．显然，对于闭球K存在一个半径足够大的r，使得$K \subset \widetilde{B}(\theta, r)$．由于$T_n \to T$，对于每个$\varepsilon > 0$，存在$N$，当$n > N$时，有

$$\|T_n - T\| < \varepsilon / r$$

因此，对于所有$x \in K$，当$n > N$时有，

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\| \|x\| < \varepsilon.$$

9．对于M中任意序列(f_n)，由于M有界，所以(f_n)有界，即$\|f_n\| \leqslant r$．因为X是可分的，则X包含一个可数稠密子集V，我们可将V排成一序列(x_m)．由于

$$\left| f_n(x_m) \right| \|f_n\| \|x_m\| \leqslant r \|x_m\|$$

因此，对于固定的m，$\left(f_n(x_m) \right)$是有界的。于是(f_n)有一个子序列A_1使其在x_1点收敛．且A_1有一个子序列A_2使其在x_2点收敛．依此下去，我们可得到在V的每点均收敛的子序列(f_{n_R})因为V在X中稠密，并且X是完备的，根据推论4.8-7．(f_{n_R})弱*收敛于X上一有界线性泛函．

习 题 4.9

1．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

2．将C_1法用于序列$(1, 0, 1, 0, 1, 0 \cdots)$得序列$(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2} \cdots)$ C_1一极限为$\frac{1}{2}$.

将C_1法用于序列$(1,0,-\frac{1}{4}, -\frac{2}{8}, -\frac{3}{16}, -\frac{4}{32}\cdots)$

得序列$(1,\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\cdots)$其$C_1$-极限是0.

3. $\xi_1=\eta_1$, $\xi_2=2\eta_2-\eta_1$, $\xi_3=3\eta_3-2\eta_2\cdots$

$\xi_n=n\eta_n-(n-1)\eta_{n-1}$ 当$(\xi_n)=(1,0,0,\cdots)$时

$(\eta_n)=(^1/_n)$

4. 例如，对于序列$(1,-1,3,-3,5,-5\cdots)$有C_1-变换序列$(1,0,1,0\cdots)$没有极限.

5. 将H_1法用于序列$(1,-3,5,-7,9,-11\cdots)$得序列：$(1,-1,1,-1,1,-1,\cdots)$，将H_2法用于$(1,-3,5,-7\cdots)$即将H_1法用于$(1,-1,1,-1,1,-1,\cdots)$得$(1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\cdots)$

6. 众所周知，

$$S_n=\frac{1}{1-Z}-\frac{Z^{n+1}}{1-Z}$$

因此，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k=\frac{1}{1-z}-\frac{z(1-z^{n+1})}{(n+1)(1-z)^2}\longrightarrow\frac{1}{1-z}$$

7. 关于K用数学归纳法证明：

当$K=1$时，有

$$\sigma_n^{(1)}=\sigma_0^{(0)}+\sigma_1^{(0)}+\cdots+\sigma_n^{(0}$$

$$=\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_n=\sum_{\nu=0}^{n}C_{n-\nu}^{0}\xi_\nu \text{成立.}$$

假如$k=j$时，$\sigma_n^{(j)}=\sum_{\nu=0}^{n}C_{n+j-1-\nu}^{j-1}\xi_\nu$成立.

则当$K=j+1$时，

$$\sigma_n^{(j+1)}=\sigma_0^{(j)}+\sigma_1^{(j)}+\cdots+\sigma_n^{(j)}$$

$$=C_{j-1}^{j-1}\xi_0+\left(\sum_{\nu=0}^{1}C_{j-\nu}^{j-1}\xi_\nu\right)+\cdots+\left(\sum_{\nu=0}^{n}C_{n+j-1-\nu}^{j-1}\xi_\nu\right)$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{n}C_{m+j-1}^{j-1}\right)\xi_0+\left(\sum_{m=0}^{n}C_{m+j-2}^{j-1}\right)\xi_1+\cdots+C_{j-1}^{j-1}\xi_n$$

$$=C_{n+j}^{j}\xi_0+C_{n+j-1}^{j}\xi_1+\cdots+C_{n+j-n}^{j}\xi_n$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}C_{n+j-\nu}^{j}\xi_\nu \text{成立}$$

因此，对于任意正整数K，

$$\sigma_n^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{n}C_{n+k-1-\nu}^{k-1}\xi_\nu \text{均成立.}$$

上面证明过程中，用到下面组合等式：

$$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$$

这个等式用公式：$C_{n+k}^{n}=C_{n+k+1}^{n+1}-C_{n+k}^{n+1}$可证得.

8．取$a_j=\frac{1}{j+1}$时．$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$而$\Delta^n a_0=\frac{1}{n+1}$．所以，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}=$

$$\frac{1}{1.2^1}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots$$

由于两个级数的和相同，因此，

$$\ln 2= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots$$

$$=\frac{1}{1.2^1}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{4.2^4}+\cdots$$

习 题 4.10

1．将区间n等分，每个小区间$[t_i, t_{i+1}]$的长度为$\frac{b-a}{n}=h$．在$[t_j, t_{j+1}]$上以宽度为h、高为$x(t_j^*)$($t_j^*=a+(j-\frac{1}{2})h$)的矩形代替小曲边梯形而得此公式的，其结点$t_k^*=a+(k-\frac{1}{2})h$．$k=1,2\cdots n$，系数$a_k=h$。

2．将$[a、b]n$等分．每个小区间的长度为$\frac{b-a}{n}$，在每个$[t_j, t_{j+1}]$上用上、下底分别为$x(t_j)$和$x(t_{j+1})$的梯形面积代替小曲边梯形面积而得此近似公式．即用结点的x的线性组合来表示积分的近似值．其结点为$t_k=a+kh$。

4．今考察一段如图

设 $\varepsilon_n'(t)=\int_{t_j}^{t} x^*(t)dt-\int_{t_j}^{t} x(t)dt$

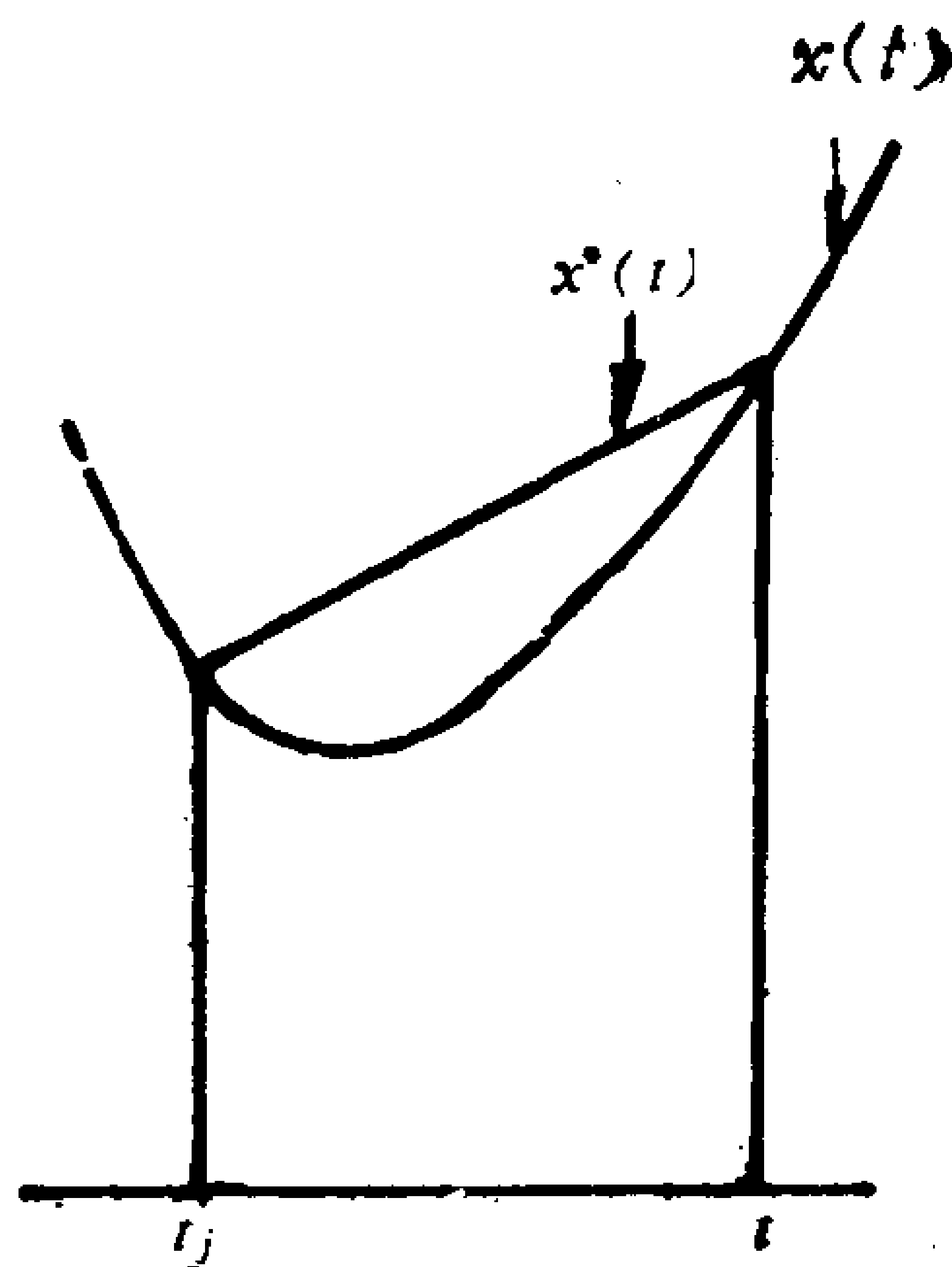
$$= \frac{t - t_i}{2}[x(t_j) + x(t)] -$$

$$\int_{t_j}^{t} x(t)dt$$

对t微分二次得

$$\frac{1}{2}(t - t_j)m_2^* \leqslant$$

$$\left(\varepsilon_n^j(t)\right)'' \leqslant \frac{1}{2}(t - t_j)m_2$$



从 t_j 到 t 求 二 次 积 分后，且令$t = t_j + h$代入得：

$$m_2^* \cdot \frac{h^3}{12} \leqslant \varepsilon_n^j(t_j + h)$$

$$\leqslant m_2 \cdot \frac{h^3}{12}$$

令 $h = \frac{(b - a)}{n}$,

又 $\varepsilon_n(x) = f_n(x) - f(x) = \int_a^b x^*(t)dt - \int_a^b x(t)dt$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^j(t_j + h)$$

所以 $K_n m_2^* \leqslant \varepsilon_n(x) \leqslant K_n m_2$ 且$K_n = \frac{(b - a)^3}{12n^2}$

7. 用拉格朗日补插公式：

$$P_3(t)=\frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}x_0$$

$$+\frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}x_1$$

$$+\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)}x_2$$

$$+\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}x_3$$

在$[t_0, t_3]$上近似$x(t)$. 则直接计算$\int_{t_0}^{t_3}P_3(t)\,dt$.

有 $$\int_{t_0}^{t_3}x(t)\,dt\approx\int_{t_0}^{t_3}P_3(t)\,dt=\frac{3h}{8}\left(x_0+3x_1+3x_2+x_3\right)$$

8. $$|r(x)|=\left|\int_{-h}^{h}x(t)\,dt-2hx(0)\right|$$
$$=\left|\int_{-h}^{h}x(t)-x(0)]\,dt\right|$$
$$=\left|\int_{-h}^{h}\left[\int_{0}^{t}x'(\tau)\,d\tau\right]dt\right|$$
$$\leqslant P(x)\int_{-h}^{h}\left|\int_{0}^{t}d\tau\right|dt$$
$$=P(x)h^2.$$

9. $$\int_{-h}^{h}x(t)\,dt=2h[x(0)+x''(0)\frac{1}{3!}h^2+x^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!}+\cdots]\qquad(1)$$

$$\approx 2h[\alpha_{-1}x(-h)+\alpha_0x(0)+\alpha_1x(h)]\cdots\qquad(2)$$

由$x(\pm h) = x(0) \pm x'(0)h + \frac{x''(0)}{2!}h^2 \pm \frac{x'''(0)}{3!}h^3$

$$+\frac{x^{(4)}(0)}{4!}h^4 \pm \cdots \qquad (3)$$

将(3)代入(2)，比较(1)、(2)系数．得

$$(*)\begin{cases} \alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1 \\ -\alpha_{-1}+\alpha_1=0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{-1}+\frac{1}{2}\alpha_1=\frac{1}{6} \end{cases}$$

于是， $\alpha_{-1}=\alpha_1=\frac{1}{6}$， $\alpha_0=\frac{2}{3}$.

$$(4)\ \int_{-h}^{h} x(t)dt \approx \frac{h}{3}\left[x(-h)+4x(0)+x(h)\right]$$

当用三次多项式近似表达$\alpha_{-1}x(-h)+\alpha_0x(0)+\alpha_1x(h)$时，因为(1)中不含$x'''(0)$．所以$h^3$的系数为0．而前三个方程与上述方程相同．比较$h^3$系级时得：$\frac{1}{6}\alpha_{-1}-\frac{1}{6}\alpha_1=0$．因此，方程组

$$\begin{cases} \alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1 \\ -\alpha_{-1}+\alpha_1=0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_{-1}+\frac{1}{2}\alpha_1=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\alpha_1-\frac{1}{6}\alpha_1=0 \end{cases}$$

与(*)同解. 即此时. $\alpha_1=\alpha_1=\frac{1}{6}$, $\alpha_0=\frac{2}{3}$.

有与(4)一样的表示.

10. 用分部积分直接可证得系数有界.

习 题 4.11

1. $Tx=\xi_1$, $x=(\xi_1, \xi_2)$. T将R^2中的开球映射成R中的开区间. 开区间是R中的开集. 因此, T是开映射. 映射T_1: $(\xi_1, \xi_2)\longmapsto(\xi_1, 0)$将开球映成开区间. 但开区间在$R^2$中不是开集. 所以, T_1不是开映射.

2. 例如, 习题1中的T将闭集$\{(\xi_1, \xi_2)|\xi_1\xi_2=1\}\subset R^2$映成$R-\{0\}$, 而$R-\{0\}$在$R$中不是闭的.

3. $\alpha A=\{\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha\}$.

$A+W=\{1+W, 2+W, 3+W, 4+W\}$

$A+A=\{2, 3, 4, \cdots, 8\}$.

4. 若有$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|=1$, 则: $\sum_{k=2}^{\infty}\|x_k\|=1-\|x_1\|>1-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$.

这与$\sum_{k=2}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}$矛盾.

5. T是线性的:

$T(\alpha x+\beta y)=(\alpha\xi_1+\beta\eta_1), \frac{1}{2}\left(\alpha\xi_2+\beta\eta_2\right), \cdots$

$$=\alpha\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3\cdots\right)+\beta\left(\eta_1, \frac{1}{2}\eta_2, \frac{1}{3}\eta_3\cdots\right)$$

$$=\alpha Tx+\beta Ty. \quad \|Tx\|=\sup_j\left|\frac{1}{j}\xi_j\right|$$

$$\leqslant\sup_j|\xi_j|=\|x\|.$$

即$\|T\|\leqslant 1$. 因此T是有界的. 因为$T^{-1}y=(\eta_1, 2\eta_2, \cdots)$

取$y_k=(K^{-1}\delta_{kj})$, 则$x_k=T^{-1}y_k=(\delta_{kj})$

$1=\|x_k\|=\|T^{-1}y_k\|=K\|y_k\|$. 于是, $\|T^{-1}\|\geqslant K$.

$K=1, 2, \cdots$, 故T^{-1}无界. 这与定理4.11-3不矛盾. 因为这里的X不是完备的.

6. (a) 若$R(T)$在Y中是闭的. 则$R(T)$是完备的. 由定理4.11-3, T^{-1}是有界的.

(b) 假定T^{-1}是有界的. 对于$y\in\overline{R}(T)\subset Y$, 存在$(y_n)\subset R(T)$, 使得$y_n\to y$. 且有$x_n=T^{-1}y_n$, 因为$T^{-1}$是连续的. X是完备的, 由定理1.4-9知(x_n)收敛. 即$x_n\to x\in X$. 因为T是连续的. $y_n=Tx_n\to Tx$. 因此$y=Tx\in R(T)$. 由于$y\in\overline{R(T)}$是任意的, 从而证得$R(T)$是闭的.

7. 因为X和Y是Banach空间. $T: X\to Y$是双射有界性算子. 由定理4.11-3. T^{-1}是有界的. 因为$1=\|TT^{-1}\|\leqslant\|T\|\|T^{-1}\|$. 则 $\|T^{-1}\|>0$. $\|T\|>0$. 令$a=\dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$, $b=\|T\|$. 于是有,

$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|.$$

8. 定义线性算子T: $X_1\to X_2$为$x\longmapsto x$. 由$\|x_n\|_1\to 0$蕴

涵$\|x_n\|_2\to 0$，则T是连续的．因此T是有界的，且为双射的．由定理4.11-3，T^{-1}是有界的．根据习题7，于是有

$$a\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant b\|x\|_1$$

9．定义线性算子T：$X_2\to X_1$，为$x\longmapsto x$．则T是双射连续的．由定理4.11-3，T^{-1}是有界的，令$K=\|T^{-1}\|$，对于所有$x\in X$，有

$$\|x\|_2\leqslant K\|x\|_1$$

10．由$x\longmapsto x$所给出的线性算子：T：$X_1\to X_2$是连续的、双射的．由定理4.11-3．T^{-1}是连续的．并且一个集M在X_1中是开的当且仅当在X_2中是开集．已知，$T_1\supset T_2$．因此，$T_1=T_2$．

习 题 4.12

1．直接可验证满足范数公理（N_1）至（$N4$）．

2．只验证两个范数满足三角不等式．令，$z_j=(x_j, y_j)$，$j=1$、2．则．

$$\begin{aligned}\|z_1+z_2\| &= \max\{\|x_1+x_2\|,\ \|y_1+y_2\|\}.\\ &\leqslant\max\{\|x_1\|+\|x_2\|,\ \|y_1\|+\|y_2\|\}\\ &\leqslant\max\{\|x_1\|,\ \|y_1\|\}+\max\{\|x_2\|,\ \|y_2\|\}\end{aligned}$$

由§1.2中的Cauchy—Schwarz不等式直接可得

$$\|z_1+z_2\|_0\leqslant\|z_1\|_0+\|z_2\|_0$$

3．因为T是线性的．因此关于线性运算：

$$(x_1, Tx_1)+(x_2, Tx_2)=\{x_1+x_2, T(x_1+x_2)\}$$

$$\alpha(x, Tx)=\{\alpha x, T(\alpha x)\}$$

是封闭的．即$G(T)$是$X\times Y$中的一向量子空间．

4．参看闭图象定理的证明中的第一部分．

5. 由于T是线性的，根据定理2.6-10，T^{-1}是线性的．因为$G(T)\subset X\times Y$是闭的，由$(x,y)\longmapsto(y,x)$定义的映射$X\times Y\to Y\times X$是等距的，从而$G(T^{-1})=\{(Tx,x)|x\in D(T)\}\subset Y\times X$是闭的．即$T^{-1}$是闭线性算子．

6. 设$x_n\to x$．$\tilde{x}_n\to x$，$Tx_n\to y$．

$T\tilde{x}_n\to\tilde{y}$．由定理4.12-3知$y=Tx=\tilde{y}$．

7. 因为T：$X\to Y$是线性有界的．且$D(T)=X$是闭的．由定理4.12-5(a)，T是闭的．由于假设T^{-1}：$Y\to X$存在：根据习题5，T^{-1}是闭的．由于，$D(T^{-1})=Y$是闭的，利用闭图象定理．T^{-1}是有界的．

8. (a)考虑任意$a\in\overline{A}$．存在$a_n\in A$，使得$a_n\to a$．令C_n．$\in C$使$a_n=TC_n$、因为C是紧的．(C_n)有收敛的子序列(C_{n_j})即，$C_{n_j}\to C\in C$．也有$TC_{n_j}\to a$．根据定理4.12-3$a=TC\in A$．故A是闭集．

(b)考虑任意$b\in\overline{B}$，存在$b_n\in B$，使得$b_n\to b$．令$k_n=Tb_n$、因为K是紧的，(k_n)中有收敛的子序列(k_{n_j})，即$k_{n_j}\to k\in K$，也有$b_{n_j}\to b$．由定理4.12-3，$Tb=k\in K=T(B)$因此，$b\in B$．于是证得B是闭的．

9. 任意闭子集$K\subset Y$是紧的（参看§2.5习题9）．由本节习题8，K的原象在X中是闭的．因此，T是连续的（参看§1.3习题14）．即T是有界的（根据定理2.7-10）

10. 由于T：$X\to Y$是双射线性算子．所以，T^{-1}存在．由T是闭线性算子，利用习题5，T^{-1}亦是闭线性算子．因为X是紧的，根据习题9，T^{-1}是有界的．

11. 对于任意$x\in\overline{N(T)}$，存在$x_n\in N(T)$，使得，$x_n\to x$. 于是$Tx_n=\theta\to\theta$，因为T是闭线性算子，由定理4.12-3. 得$Tx=\theta$. 因此，$x\in N(T)$. 即$N(T)$是X的闭子空间.

12. 因为$T_2\in B(X,Y)$，X在其自身中是闭的，由引理4.12-5(a)，T_2亦是闭线性算子. 对于任意$x_n\to x$，这里x_n，$x\in X$. 若$T_1x_n\to y$，$T_2x_n\to y_2$，因为T_1、T_2是闭线性算子. 由定理4.12-3，$T_1x=y_1$，$T_2x=y_2$. 于是，$(T_1+T_2)x_n\to y_1+y_2$时，有$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x=y_1+y_2$. 再利用一次定理4.12-3. 因此，$T_1+T_2$是闭的.

13. 由习题 5 知，T^{-1}是闭线性算子. 因为X是完备的. 根据引理4.12-5(b)，则，$D(T^{-1})=R(T)$是闭的.

14. 因为部分和

$$x_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

序列(x_n)一致收敛于x，即在$C[0,1]$上，$x_n\to x$，类似地，$y_n=Tx_n=x_n'=u_1'+\cdots+u_n'$也一致收敛. 即在$C[0,1]$上，$y_n\to y$. 由例题4.12-4知，微分算子$T$是闭的，根据定理4.12-3. $x\in D(T)$，$y=Tx=x'$.

15. (a)若T有闭线性延拓$\widetilde{T}$. 其图象为$\overline{G(T)}$. 因为线性算子$\widetilde{T}$将θ映成θ. 因此，$\overline{G(T)}$不含形如$(\theta,y),y\neq\theta$的元素.

(b) 假定$\overline{G(T)}$不含形如(θ,y)，$y\neq 0$的元素. 若(x,y_1)，$(x,y_2)\in\overline{G(T)}$. 则

$$(x,y_1)-(x,y_2)=(\theta,y_1-y_2)\in\overline{G(T)}$$

由假定，$y_1-y_2=\theta$. 因此，对任意$(x,y)\in\overline{G(T)}$存在映射

$\widetilde{T}$ 为$x\longmapsto y$. 即，$\widetilde{T}x=y$. 显然$\widetilde{T}$是T的延拓. 因为$\overline{G(T)}$是向量空间.（由于$G(T)$是向量空间）. 所以，$\widetilde{T}$是线性的. 由$\overline{G(T)}$是闭的，故$\widetilde{T}$是闭线性算子.

习 题 5.1

1. 利用分析中的Lagrange中值定理. 对于任意x、$y\in X$，有

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{\xi^2}\right|d(x,y)$$

其中ξ位于x与y之间. $|\xi|\geqslant 1$. $\frac{1}{\xi^2}\leqslant 1$.

因此，$\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{\xi^2}\geqslant\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ 即$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{\xi^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$于是使

$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y)$成立的最小$\alpha$为$\frac{1}{2}$.

2. 例如：$X=(0,1)$. 映射T：$X\to X$为$Tx=\frac{1}{2}x$，显然T是压缩映射，但在X中没有不动点.

3. 由Lagrange中值定理

$$|Tx-Ty|=\left|1-\frac{1}{\xi^2}\right|\ |x-y|<|x-y|.$$

（因为$\xi>1$）. 方程$x=x+\frac{1}{x}$在X上无解. 因此映射T没有

不动点.

4. 若x, y是T的两个不动点，则有$x \neq y$且

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

产生矛盾，因此不动点是唯一的.

5. 由于T是压缩映射，则存在$0 \leqslant \alpha < 1$，使得$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y)$. 因此，

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant \alpha^n d(x, y). \quad 0 \leqslant \alpha^n < 1$$

故证得T^n为压缩映射.

$T^n (n>1)$为压缩映射，T不一定是压缩映射，例如映射T: $R^2 \to R^2$为$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_2, 0)$不是压缩映射. 但是$T^2$: $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (0, 0)$是压缩映射.

6. 当$0 < \alpha < 1$时，有$\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} < \frac{\alpha^m}{1-\alpha}$，因此当$x_0$不是$T$的不动点情况下，序列$\left\{\frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)\right\}$是严格的单调减少的.

在(3)式中以$m-1$代替m得，

$$d(x_m, x_{m-1}) \leqslant \alpha^{m-1} d(x_0, x_1)$$

所以(6)蕴涵(5).

7. 根据微积分中Lagrange中值定理有

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| \ |x - y| \leqslant \alpha \ |x - y|$$

即g是R上的一压缩映射. 由定理5.1-3知迭代$x_n = g(x_{n-1})$收敛.

8. 根据微分中值定理.

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| \ |x - y| \leqslant \alpha \ |x - y|$$

ξ位于x与y之间，又$|g(x_0)-x_0|<(1-\alpha)r$. 由定理5.1-5，g在J上存在唯一不动点x. 即$x=g(x)$. 有唯一解x. 且迭代序列(x_m)收敛于此解x由(5)式和(7)式得，

$$d(x,x_m)\leqslant\frac{\alpha_m}{1-\alpha}d(x_0,x_1)<\alpha^m r.$$

即 $|x \quad x_m|<\alpha^m r.$

由(6) 式得

$$|x-x_m|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_m-x_{m-1}|$$

9. 由于$g'(x)=1-\lambda f'(x) \quad 0<K_1\leqslant f'(x)\leqslant K_2$,

取$\lambda=\frac{1}{2K_2}$时，$\frac{1}{2}\leqslant g'(x)\leqslant 1-\frac{K_1}{2K_2}<1$，根据微分中值定理. $|g(x)-g(y)|=|g'(\xi)|\ |x-y|\leqslant\left(1-\frac{K_1}{2K_2}\right)|x-y|$

因此g是压缩映射，由定理5.1-3，$x_{n+1}=g(x_n)$收敛到g的唯一不动点x，此x即是$f(x)=0$的解.

10. (a) $x_1=g(x_0)=\frac{1}{1+1^2}=0.500$,

$$x_2=g(x_1)=\frac{1}{1+(0.5)^2}=0.800$$

$$x_3=g(x_2)=\frac{1}{1+(0.8)^2}=0.610$$

$$|g'(x)|=\frac{2|x|}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$$

$$<1 \quad (x\neq 0)$$

当$x=0$时，$|g'(0)|=0$. 所以$|g'(x)|<1$.

(b) $Tx=1-x^3$, $x_0=1$, $Tx_0=1-x_0^3=0=x_1$, $x_2=Tx^1=1-0^3=1$, …迭代序列0,1,0,1…不收敛. $x_0=0.5$时，$x_1=0.8750$, $x_2=0.3301$, $x_3=0.9640$, $x_4=0.1042$, $x_5=0.9887$…不收敛. 这是因为在根(0.682328)附近，$1-x^3$的导数的绝对值大于1，T不是压缩映射.

11. 将方程$x^3+x-1=0$变形为

$$x=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$$

令$g(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$. 其导数在1点为0，而且在根的附近导数值很小. 因此迭代

$$x_n=g(x_{n-1})$$

收敛的速度快. 当取$x_0=1$时，$x_1=0.707107$, $x_2=0.686589$, $x_3=0.683097$

12. 因为$f(\hat{x})=0$. 由微分中值定理.

$$|f(x)|=|f(x)-f(\hat{x})|=|f'(\xi)|\ |x-\hat{x}|$$

$\leqslant K_1|x-\hat{x}|$ 由$\hat{x}$是一级零点，存在$\hat{x}$的某闭邻域$N_1\subset(a,b)$使得$f'(x)\neq 0$. 而且$f''(x)$连续. 因此，$\frac{f''(x)}{f'(x)^2}$在N_1上有界. 于是对于任意$x\in N_1$,

$$|g'(x)|=\frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2}\leqslant K_2|f(x)|$$

$$\leqslant K_1K_2|x-\hat{x}|$$

当 $|x-\hat{x}|<\dfrac{1}{2K_1K_2}$时，$|g'(x)|<\dfrac{1}{2}$

令$N_2=\left\{x\middle|\ |x-\hat{x}|<\dfrac{1}{2K_1K_2}\right\}$，$N=N_1\cap N_2$.

所以在$\hat{x}$的邻域N中g为一压缩映射.

13. 令 $x=\sqrt{C}$，$f(x)=x^2-C=0$. 则，$f'(x)=2x$利用习题12中的Newton法得计算平方根的迭代过程.

$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{C}{x_n}\right).$$

直接计算知，当 $x>\sqrt{\dfrac{C}{3}}$时，$|g'(x)|<1$. 迭代序列才收敛.

当 $x_0=1$时，求得$\sqrt{2}$的近似值$x_1=1.500000$，$x_2=1.416667$，$x_3=1.414216$，$x_4=1.414214$.

14. (1)当$K<1$时，T是一压缩映射.

(2) 由微分中值定理.

$$|Tx-Ty|=|T'\xi|\ |x-y|$$

ξ位于x与y之间. $T'x$连续. 则在$[a,b]$上必有界，因此，T满足Lipschitz条件.

习 题 5.2

1. (a)准确解 $x=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

(b) $C=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{10} & 0\end{pmatrix}$ 满足条件(5)

从 $x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$开始用Jacobi迭代得

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ \frac{27}{10}\end{pmatrix},\quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{97}{50}\\ \frac{144}{50}\end{pmatrix}$$

$$\alpha=\frac{3}{10},\quad d(x^{(0)},x^{(1)})=\frac{17}{10}$$

误差界为$d(x^{(2)},x)\leqslant\frac{(0.3)^2}{1-0.3}\cdot\frac{17}{10}=0.2185$

实际误差为$d(x^{(2)},x)=0.1200$

(c) 从$x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$开始用Gauss-Seidel迭代

得， $x_1^{(1)}=\begin{bmatrix}1.600\\2.880\end{bmatrix}$， $x^{(2)}=\begin{bmatrix}1.976\\2.993\end{bmatrix}$

$\alpha=0.2$，误差界为$d(x^{(2)},x)\leqslant\frac{0.2^2}{1-0.2}\times1.88=0.094$ 实际误差$d(x^{(2)},x)=0.024$

2. 因为λ是C的特征值，则$(C-\lambda I)x=0$有非零解. 若对于所有的j有

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{k}|C_{jk}|<|C_{jj}-\lambda|$$

由5.2-2知，方程组$(C-\lambda I)x=0$有唯一零解．这就产生矛盾．因此至少存在一个$j(1\leqslant j\leqslant n)$使得

$$|C_{jj}-\lambda|\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|C_{jk}|$$

(a)若0是K的特征值．由$K=I-C$及Greshgorin定理，至少存在一个$j(1\leqslant j\leqslant n)$使得

$$1-|C_{jj}|\leqslant|1-C_{jj}|\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|C_{jk}|$$

因此，$\sum_{k=1}^{n}|C_{jk}|\geqslant1$，这与(5)矛盾．故$K$不可能有特征值0.

(b)对C的每个特征值λ，由Gershgorin定理，

$$|\lambda|-|C_{jj}|\leqslant|C_{jj}-\lambda|\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|C_{jk}|$$

利用(5)有

$$|\lambda|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|C_{jk}|<1$$

故证得C的谱半径小于1.

3．因为

$$\begin{aligned}d_1(Tx,Tz)&=\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}C_{jk}(\xi_k-\xi_k)\right|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{j}\sum_{k=1}^{k}|C_{jk}|\ |\xi_k-\zeta_k|\\&\leqslant(\max_k\sum_{j=1}^{n}|C_{jk}|)\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\zeta_k|\\&=\alpha d(x,z)\end{aligned}$$

由于$\sum_{j=1}^{n}|C_{jk}|<1\quad k=1,2\cdots n$．所以$\alpha<1$，$T$为压缩映射．

迭代序列(6)收敛.

4. 利用Cauchy-Schwarz不等式（参看§1.2）得，

$$d_2(Tx,Tz)^2=\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}C_{jk}(\xi_k-\zeta_k)\Big]^2$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}C_{jk}{}^2\sum_{s=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\Big]$$

$$=\Big[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{jk}{}^2\Big]d_2(x,z)^2$$

当$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{jk}^2<1$时，$T$为压缩映射. 因此(6)式收敛.

5. 由微分中值定理，

$$|f(t,x_2)-f(t,x_1)| = \left|\frac{\alpha f}{\alpha x}\right| |x_2-x_1|$$

因为$\frac{\alpha f}{\alpha x}$在矩形域$R$上连续，则$\frac{\alpha f}{\alpha x}$在闭域$R$上有界. 即存在常数$M>0$，对于任意$(x,y)\in R$. 有$\left|\frac{\alpha f}{\alpha x}\right|\leqslant M$. 因此$f$在$R$上关于$x$满足Lipschitz条件.

6. $x_1=\int_0^t 1d\tau=t$, $x_2=\int_0^t 1+\tau^2d\tau=\frac{1}{3}t^2+t$

$$x_3=\int_0^t(1+x_2^2)d\tau=\int_0^t(1+\tau^2+\frac{2}{3}\tau^4+\frac{1}{9}\tau^6)d\tau$$

$$=t+\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5+\frac{1}{63}t^7$$

准确解为 $x(t)=tgt=t+\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5+\frac{17}{315}t^7+\cdots$

显然x_3准确解$x(t)$中所含t，…t^5的项完全一致．

7．利用(22)式有

$$x_1(t)=V(t)+\mu\int_0^1 e^{t-\tau}V(\tau)d\tau$$

$$=V(t)+\mu e^t\int_0^1 e^{-\tau}V(\tau)d\tau$$

$$(令\int_0^1 e^{-\tau}V(\tau)d\tau=K_0)$$

$$=V(t)+\mu K_0e^t$$

$$x_2(t)=V(t)+\mu\int_0^1 e^{t-\tau}x_1(\tau)d\tau$$

$$=V(t)+\mu K_0e^t(1+\mu)$$

$$x_3(t)=V(t)+\mu\int_0^1 e^{t-\tau}x_2(\tau)d\tau$$

$$=V(t)+\mu K_0e^t(1+\mu+\mu^2)$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$x_n(t)=V(t)+\mu K_0e^t(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1})$$

由于$|\mu|<1$．其准确解为

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=V(t)+\frac{\mu}{1-\mu}K_0e^t$$

8．定义映射T：$C[a,b]\to C[a,b]$为

$$Tx=V(t)+\mu\int_a^b K(t,\tau,x(\tau))d\tau$$

则，
$$d(Tx,Ty)=|Tx(t)-Ty(t)|$$

$$=|\mu|\ \left|\int_a^b[K(t,\tau,x(\tau))\right.$$

$$\left.-K(t,\tau,y(\tau))]d\tau\right|$$

$$\leqslant |\mu| \int_a^b |K(t,\tau,x(\tau)) - K(t,\tau,y(\tau))|\, d\tau$$

$$\leqslant |\mu|\, l \int_a^b |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqslant |\mu|\, l(b-a) \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)|$$

$$= |\mu|\, l(b-a) d(x,y).$$

因此，当 $|\mu| < \dfrac{1}{l(b-a)}$ 时 T为压缩映射。

故此时积分方程有唯一解$x(t)$.

9. (a)此微分方程可以写成

$$\int_{t_0}^t x' dt = \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

即，

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

这是Volterra积分方程.

(b) 对$\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(t,x)$ 两边积分两次. 并代入两个初始条件，得：

$$x(t) = x_0 + (t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$$

对$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^\tau f(u, x(u)) du\right] d\tau$用分部积分得，

$$\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau} f(u, x(u))du\right]d\tau$$

$$= \tau\int_{t_0}^{\tau} f(u, x(u))du \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \tau f(\tau, x(\tau))d\tau$$

$$= t\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} \tau f(\tau, x(\tau))d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} (t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau$$

因此，

$$x(t) = x_0 + (t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau$$

是Volterra积分方程.

10. 由(22)式，

$$x_{n+1}(t) = V(t) + \mu\int_a^b K(t,\tau)x_n(\tau)d\tau$$

$$x_n(t) = V(t) + \mu\int_a^b K(t,\tau)x_{n-1}(\tau)d\tau$$

等式两边分别相减得

$$z_{n+1}(t) = \mu\int_a^b K(t,\tau)Z_n(\tau)d\tau = \mu SZ_n(t)$$

取$x_0(t) = V(t)$，则，

$$x_1(t) = V(t) + \mu\int_a^b K(t,\tau)V(\tau)d\tau$$

$$= V(t) + \mu SV$$

$$x_2(t) = V(t) + \mu\int_a^b K(t,\tau)x_1(\tau)d\tau$$

$$= V(t) + \mu SV + \mu^2S^2V$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$x_n(t) = V(t) + \mu SV + \mu^2S^2V + \cdots + \mu_nS_nV$$

所以， $x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=V+\mu SV+\mu^2S^2V+\cdots$

11．(a) $x=1+\mu+\mu^2+\cdots=\frac{1}{1-\mu}$.

(b) 令 $C=\int_0^1 x(t)dt$，则 $x(t)-\mu C=1$

$x(t)=1+\mu C$. 两边从 0 至 1 求定积分得.

$$C=\int_0^1 x(t)dt=\int_0^1(1+\mu C)dt=1+\mu C$$

即 $C=1+\mu C$. 因此，$C=\frac{1}{1-\mu}$，代入

$$x(t)=1+\mu C\text{中}，x(t)=1+\frac{\mu}{1-\mu}=\frac{1}{1-\mu}.$$

习 题 5.3

1．令 $\delta=\delta(x, Y)=\inf_{y\in Y}d(x, y)$．$f(y)=d(x, y)\in Y$，则 $f(y)$ 在紧子集 Y 上连续，根据推论2.5-7，存在 $y_0\in Y$，使得 $f(y)$ 在 y_0 达到最小值．根据 Y 中对 x 最佳逼近的定义，因此 $\delta=d(x, y_0)$，y_0 就是 Y 中对 x 的最佳逼近．

2．令 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$\mu=1-\lambda$．对于 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$．由于 $x=\lambda x+\mu x$．有，

$$f(\lambda\alpha+\beta\mu)=\left\|x-\sum_{j=1}^n(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j)e_j\right\|$$

$$\leqslant\lambda\left\|x-\sum_{j=1}^n\alpha_je_j\right\|+\mu\left\|x-\sum_{j=1}^n\beta_je_j\right\|$$

$$=\lambda f(\alpha)+\mu f(\beta)$$

即证得 f 为凸函数．

3．对于$x=(1,0)$，$y=(0,1)$，则有

$$\|x+y\|_1=2.$$

因此(6)中的范数不是严格凸的.

4．$\delta=\delta(x,\widetilde{B})=\inf\limits_{|\xi_1|+|\xi_2|=1}(|\xi_1-2|+|\xi_2|)$（这是因为$x$在单位闭球$\widetilde{B}$外）．

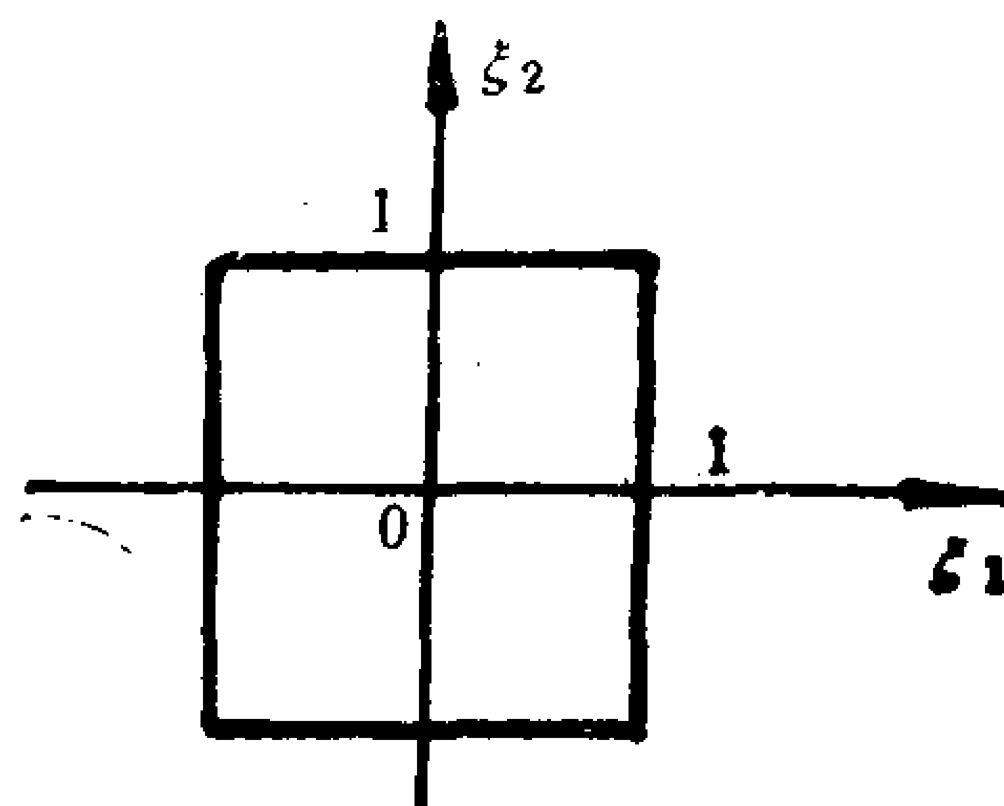
即δ等于函数$f(\xi_1)=|\xi_1-2|+1-|\xi_1|$在条件$|\xi_1|\leqslant 1$下的极小值，易得只有当$\xi_1=1$时$f(\xi_1)$才有极小值$f(1)=1$，因此，$\delta=1$．并$\widetilde{B}$对$x$的最佳逼近是唯一的$y_0=(1,0)$.

5．对于点$x=(1,0)$，$y=(1,1)$．有$\|x\|=\|y\|=1$.

$x\neq y$，但$\|x+y\|=2$．所以范数

$$\|(\xi_1,\xi_2)\|=\max(|\xi_1|,|\xi_2|)$$

不是严格凸的.



附图16

6．对于点$x=(2/3,1/3,0,0,\cdots,)$，

$y=(1/3,2/3,0,0,\cdots,)$

有$\|x\|=\|y\|=1$，$x\neq y$．$\|x+y\|=2$.

所以l^1不是严格凸的空间.

7．根据引理5.3-5，以两个最佳逼近x与y为端点的线段$\lambda x+(1-\lambda)y$（$0\leqslant\lambda\leqslant 1$）均是最佳逼近.

8．由三角不等式知.

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant 1$$

若存在$0<\alpha_0<1$上式等号成立，则由3.1-2知，

$$\alpha_0 x = c(1-\alpha_0)y \qquad (c>0)$$

$$\alpha_0\|x\| = c(1-\alpha_0)\|y\| \quad 由\ \|x\| = \|y\| = 1$$

得 $$\alpha_0 = c(1-\alpha_0)$$

故$x=y$与严格凸条件矛盾.

现证明条件为充分的：在上述不等式中，取$\alpha=\dfrac{1}{2}$即得到严格凸定义中的条件.

9．设$x_1=\dfrac{1}{\|x\|}x, y_1=\dfrac{1}{\|y\|}y, \alpha=\dfrac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$

则，$\|x_1\|=\|y_1\|=1$，并有下列结果.

$$1=\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|}=\left\|\frac{x}{\|x\|+\|y\|}+\frac{y}{\|x\|+\|y\|}\right\|$$

$$=\|\alpha x_1+(1-\alpha)y_1\|$$ 因为X是严格凸的赋范空间.

由习题8得，

$x_1=y_1$，所以，$x=\dfrac{\|x\|}{\|y\|}y$. $\quad c=\dfrac{\|x\|}{\|y\|}>0$

10．若X不是严格凸的，则存在范数为1的两个元素$x\neq y$，使得$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$．由题设，对某个$c>0$，有$x=cy$.但是$\|x\|=\|y\|=1$，$\|x\|=c\|y\|$．因此，$c=1$，$x=y$，这与假设$x\neq y$矛盾．从而X为严格凸的赋范空间.

11．由习题8知以单位球面上任意两点为端点的线段的内点均不在球面上（在球面上），即球面上不包含线段．球面上的点不可能是线段的内点．根据定义，故球面上的每一

点均是X中闭单位球的端点.

习 题 5.4

1. 设$\{y_1,\cdots,y_n\}$为Y的一个基，$\{t_1,\cdots t_n\}$为$[a,b]$中由n个不同点组成的子集，则由Y满足$Haar$条件，根据引理5.4-3，(1)中的行列式不等于0.因此，将Y限制到点集$\{t_1,\cdots,t_n\}$上时，$\{y_1,\cdots,y_n\}$的线性无关.且每个$y\in Y$，可唯一地表示成$y=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j(t)\quad t\in\{t_1,\cdots,t_n\}$，从而证得此时的$Y$仍是$n$维向量空间.

2. (a)当Y看成$C[0,1]$的子空间时.由于对任二点t_1，$t_2\in[0,1]$，$t_1\neq t_2$时，

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ t_1^2 & t_2^2\end{vmatrix}=(t_2+t_1)(t_2-t_1)\neq 0$$

由引理5.4-3，Y满足Haar条件.

(b)当Y看成$C[-1,1]$的子空间时，对于t_1、$t_2\in[-1,1]$，$t_2=-t_1$，(1)中行列式为零，因此，Y不满足$Haar$条件.

3. 由于v_j是(1)中行列式的第j个列向量，$\{v_1,\cdots,v_n\}$线性无关，所以(1)中行列式不为零.于是可证得$\{y_1,\cdots,y_n\}$线性无关.Y是n维子空间.对Y的每一个基$\{z_1,\cdots,z_n\}$可唯一地表示成：$z_j=\alpha_{j1}y_1+\cdots+\alpha_{jn}y_n\qquad j=1,2\cdots n$.因为$\{z_1,\cdots,z_n\}$线性无关，可得

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

因此D的转置行列式$D^T \neq 0$.

对任意n个不同的$t_j \in [a, b]$ ($j = 1, 2, \cdots n$)

有.

$$\begin{vmatrix} z_1(t_1) & z_1(t_2) \cdots & z_1(t_n) \\ z_2(t_1) & z_2(t_2) \cdots & z_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n(t) & z_n(t_2) \cdots & z_n(t_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots y_1(t_n)) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

由引理5.4-3，证得Y满足Haar条件.

反之，由Y是$\{y_1, \cdots, y_n\}$的张成，$\dim Y = n$，可得$\{y_1, \cdots, y_n\}$是Y的一个基，再根据引理5.4-3，对于任意n个不同的$t_j \in [a、b]$($j = 1.2\cdots$)

以$v_j = (y_1(t_j), \cdots, y_n(t_j))$ $j = 1, \cdots, n$

作为列向量的行列式(1)不为零. 因此,

$$v_j = (y_1(t_j), \cdots, y_n(t_j)) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

线性无关.

4. 若结论不成立，必存在一个$y_0 \in Y$，使得，

$$\delta = \|x - y_0\| < \min |x(t_j) - y(t_j)|$$

对任意$y \in Y$，则$y_* = y_0 - y \in Y$，$y = y_0 - y_* = (x - y_*) - (x - y_0)$必与$x - y_*$在$n + 1$个点$t_1, \cdots, t_{n+1}$均有相同的符号，因此$Y$在$[a, b]$中至少有$n$个零点且$y \neq \theta$，这与$Y$满足$Haar$条件矛盾. 所以证得.

$$\delta \geqslant \min_{i} |x(t_i) - y(t_i)|$$

5．因为这里$x'=e^t>0$．则$x(t)=e^t$在[0，1]上向上凹．过点(0,1)和(1,e)的割线方程为$\tilde{y}=(e-1)t+1$，令$(x(t)-\tilde{y}(t))'=0$，得$t=\ln(e-1)$故$\tilde{y}(t)$与$x(t)$在$t=\ln(e-1)$处有极大偏差$k=2-e-(e-1)\ln(e-1)$，曲线$x=e^t$在$t=\ln(e-1)$的切线方程为，$\hat{y}(t)=(e-1)t+(e-1)[1-\ln(e-1)]$．曲线完全位于$\tilde{y}$与$\hat{y}$之间．介于$\tilde{y}$与$\hat{y}$中间的直线

$y(t)=\hat{y}(t)+k$，$k=1+\frac{1}{2}[(e-1)\ln(e-1)-e]$使$x-y$在[0,1]上有一个交错集$\{0,\ln(e-1),1\}$．而$\dim Y=2$．根据引理5.4-8，$y$是$Y$中对$x$的最佳逼近.

6．由定理5.4-10和公式(14)，$x(t)=t^3+t^2$的二次多项式最佳逼近y_0为

$$y_0(t)=t^3+t^2-\frac{1}{4}T_3(t)=t^2+\frac{3}{4}t$$

其极大偏差为$\|x-y_0\|=\frac{1}{4}$.

7．由于在$[0,\pi]$中，$\cos n\theta$的零点为

$$\theta_j=\frac{2j-1}{2n}\pi \qquad (j=1,2\cdots n)$$

因为$t=\cos\theta$，所以$T_n(t)$在$[-1,1]$中有n个不同的零点

$$t_j=\cos\frac{2j-1}{2n}\pi \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

8. $T_n(t)$相邻的零点为

$$t_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad t_{k+1}^{(n)}=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$$

我们来证$T_{n-1}(t)$的第K个零点

$$t_k^{(n-1)}=\cos\frac{2k-1}{2n-2}\pi$$

位于上述$T_n(t)$的两个零点之间．因为余弦函数在$(0, \pi)$上是单调的，则只须证明下述不等式成立

$$\frac{2k-1}{2n}<\frac{2k-1}{2n-2}<\frac{2k+1}{2n}$$

左边不等式成立是显然的．第二个不等式成立等价于$2k<2n-1$．这个不等式当$k<n$时是正确的．因为$T_n(t)$有n个零点，以这n个点作为边界点的区间有$n-1$个，而每个区间均包含$T_{n-1}(t)$的一个零点．并且只能包含一个零点．这是由于$T_{n-1}(t)$是$n-1$次的多项式．这就证明了题中的结论

9．若$T_n(t)$与$T_{n-1}(t)$有一个公共零点t_0，则由定义5.4-9中的递推公式

$$T_{n+1}(t)+T_{n-1}(t)=2tT_n(t).$$

可得 $T_{n-2}(t_0)=0$，重复用这个递推公式，有$T_0(t_0)=0$．这与(14)中的$T_0(t)=1$矛盾．因此，$T_{n-1}(t)$与$T_n(t)$没有公共零点．

10．在积分中，用换元积分．令$t=\cos\theta$，则

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}T_n(t)T_m(t)\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\sin\theta}\cos n\theta\cos m\theta$$

$\ell - \sin\theta)d\theta$

$$= 0 \qquad (m \neq n)$$

$m = n = 0$时．积分值为π.

习 题 5.5

$$1.\ G(\cdots, \alpha y_j, \cdots) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle \cdots \langle y_1, \alpha y_j\rangle \cdots \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \langle \alpha y_j, y_1\rangle \cdots \langle \alpha y_j, \alpha y_j\rangle \cdots \langle \alpha y_j, y_n\rangle \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \langle y_n, y_1\rangle \cdots \langle y_n, \alpha y_j\rangle \cdots \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \alpha . \overline{\alpha} G(\cdots, y_j \cdots)$$

$$= |\alpha|^2 G(\cdots, y_j \cdots)$$

2. 若$G(y_1, \cdots, y_j) \neq 0$，由定理5.6-1知，$\{y_1, \cdots y_n\}$线性无关．因此，子集$\{y_1, \cdots, y_n\}$ $j = 1, \cdots, n-1$，也线性无关．再用一次定理5.6-1．于是证得$G(y_1, \cdots y_j) \neq 0$ $j = 1;$ $\cdots n-1$.

3. 因为$G(x, y) = \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2$，Schwarz不等式等价于$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$，因此用Gram行列式将Schwarz不等式可表示为

$$G(x, y) \geqslant 0$$

由定理5.6-1，等号成立的充要条件是x与y线性相关．

4. 用数学归纳法证，当$n = 1$时，显然有，$G(y_1) = \|y_1\|^2 \geqslant 0$．假设对于任意自然数$k$有$G(y_1, \cdots, y_k) \geqslant 0$，则由定理5.5-2中的公式(5)，$G(y_1, \cdots y_{k+1}) = G(y_{k+1}, \cdots, y_k) = \|z\|^2 G(y_1, \cdots y_k) \geqslant 0$

因此，对于任意自然数n，$G(y_1, \cdots, y_n) \geqslant 0$.

由定理5.5-1知，$\{y_1, \cdots, y_n\}$线性无关的充分必要条件是$G(y_1, \cdots, y_n) > 0$.

5. 利用行列式的性质，证得

$$G(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n + \alpha y_i)$$
$$= G(y_1, \cdots, y_n) + \overline{\alpha} G(y_1 \cdots y_i \cdots y_i)$$
$$= G(y_1, \cdots, y_n) + \overline{\alpha} \cdot 0 = G(y_1 \cdots y_n)$$

下面利用这个等式证明定理5.5-2.

$$G(x, y_1 \cdots y_n)$$
$$= G(x - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} y_i, y_1, \cdots y_n)$$
$$= G(z, y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle z, z\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \langle y_n, y_1\rangle & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$$
$$= \|z\|^2 G(y_1, \cdots, y_n)$$

从而定理5.5-2得证.

6. 由定理5.5-2，y_k到$\mathrm{Span}\{y_1, \cdots, y_n\}$的距离的平方为：

$$\frac{G(y_k, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)},$$

而y_k到$\mathrm{Span}\{y_1, \cdots, y_k\}$的距离的平方为

$$\frac{G(y_k, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)}$$

因为$\{y_1, \cdots, y_m\}$是$\{y_1, \cdots, y_n\}$的子集，因此

$$\frac{G(y_k, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)}$$

下面证最后一个不等式.

$\|z\|^2 = \dfrac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)}$是$y_m$到$\mathrm{Span}\{y_{m+1}, \cdots, y_n\}$的距离的平方，由于$(y_m - z) \perp z$，$\|z\|^2 + \|y_m - z\|^2 = \|y_m\|^2 = G(y_m)$于是证得，

$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m)$$

7. 由习题6，令$k=1$得，

$$\begin{aligned}\frac{G(y_1, \cdots, y_n)}{G(y_1, \cdots, y_m)} &\leqslant \frac{G(y_2, \cdots, y_n)}{G(y_2, \cdots, y_m)} \leqslant \cdots \\ &\leqslant \frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_m)} \\ &\leqslant G(y_{m+1}, \cdots, y_n)\end{aligned}$$

因此，证得

$$G(y_1, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1, \cdots, y_m) \cdot G(y_{m+1}, \cdots, y_n)$$

当$M_1 \perp M_2$时，

$$G(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_1, y_m\rangle & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_m, y_1\rangle & \cdots & \langle y_m, y_m\rangle & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & \langle y_{m+1}, y_{m+1}\rangle & & \cdots & \langle y_{n+1}, y_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \langle y_n, y_{m+1}\rangle & 0 & \cdots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$$

$$=G(y_1, \cdots, y_m)G(y_{m+1}\cdots y_n)$$

若$G(y_1, \cdots, y_n)=G(y_1, \cdots, y_m)G(y_{m+1}, \cdots, y_n)$

由于 $$\frac{G(y_1, \cdots, y_n)}{G(y_1, \cdots, y_m)} \leqslant \frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_m)}$$

$$\leqslant G(y_{m+1}, \cdots, y_n)$$

因此，$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} = G(y_m) = \|y_m\|^2$$

而y_m到$\mathrm{Span}\{y_{m+1}, \cdots, y_n\}$的距离的平方为

$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} = \|z_m\|^2 = \|y - \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_k y_k\|^2$$

因为$y_m = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j y_j + z_m$. $z_m \in (\mathrm{Span}\{y_{m+1}, \cdots, y_n\})^{\perp}$

所以，$\|y_m\|^2 = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j y_j\right\|^2 + \|z_m\|^2$. 但$\|y_m\|^2 = \|z_m\|^2$

从而，$\left\|\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j y_j\right\|^2 = 0$. 即$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j y_j = 0$，由于

$y_{m+1}, \cdots, y_n$线性无关，于是$\alpha_j = 0$ $(j = m+1, \cdots, n)$

$y_m = z_m \in (\mathrm{Span}\{y_{m+1}, \cdots, y_n\})^{\perp}$，因此，$y_m \perp y_j$，

$(j = m+1, \cdots, n)$. 一般地，由于对每个$i = 1, 2, \cdots m-1$,

$$G(y_1, \cdots, y_2 \cdots y_m, y_{m+1} \cdots y_n) = G(y_1 \cdots y_m \cdots y, y_{m+1} \cdots y_n)$$

$$G(y_1 \cdots y_i \cdots y_m) = G(y_1 \cdots y_m \cdots y_i)$$

于是有类似的等式

$$G(y_1 \cdots y_m \cdots y_i y_{m+1} \cdots y_n)$$
$$= G(y_1 \cdots y_m \cdots y_i)G(y_{m+1} \cdots y_n)$$

重复上述过程，可证得$y_i \perp y_j$ $i = 1, 2 \cdots m-1$,

$j=m+1$，…，n，因此证明了$M_1\perp M_2$.

8．在习题6不等式

$$\frac{G(y_m, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)}\leqslant G(y_m)$$

中令$m=1$，得

$$G(y_1, \cdots, y_n)\leqslant G(y_1)G(y_2, \cdots, y_n)$$

类似地，$G(y_2, \cdots, y_n)\leqslant G(y_2)G(y_3, \cdots, y_n)$

依此类推，$G(y_1, \cdots, y_n)\leqslant G(y_1)G(y_2)\cdots G(y_n)$

$$=\langle y_1, y_1\rangle\langle y_2, y_2\rangle\cdots\langle y_n, y_n\rangle$$

若y_j（$j=1, 2, \cdots n$）相互直交，显然$G(y_1, \cdots, y_n)$ 是一个对角形行列式，其主对角线上的元依次为$\langle y_1, y_1\rangle$，…$\langle y_n, y_n\rangle$. 因此，

$$G(y_1, \cdots, y_n)=\langle y_1, y_1\rangle\cdots\langle y_n, y_n\rangle.$$

反之，若上述等式成立，可得

$$G(y_m, \cdots, y_n)=G(y_m)G(y_{m+1}, \cdots, y_n)$$

$m=1, 2, \cdots n-1$，由习题7知，y_j相互直交.

9．令$Y=\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \cdots\}$，$Y_n=\mathrm{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$

则，$Y_1\subset Y_2\subset\cdots\subset Y_n\subset\cdots\subset H$.

对任意$x\in H$，其到Y_n的距离δ_n

$$\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_n\geqslant\cdots$$

由定理5.5-2知，存在$y_n\in Y_n$，使得，

$$\delta_n^2=\|x-y_n\|^2=\frac{G(x, x_1, \cdots x_n)}{G(x_1, \cdots, x_n)}$$

Y在H中稠密的充分必要条件是

$$\delta_n\to 0，即\frac{G(x, x_1, \cdots x_n)}{G(x_1, \cdots, x_n)}\to 0\ (n\to\infty)$$

习　题　5.6

1. 由于在$Y(p_n)$上，显然对于加法和数乘运算是封闭的．因此，$Y(p_n)$是一向量空间．

根据定理5.6-1，对于每$n+3$个数：

x_0，…，x_n，k_0'，k_n'，有唯一的三次样条函数$y(t)\in Y(p_n)$，与之对应，于是可定义映射：

T：$R^{n+3}\longrightarrow Y(p_n)$为

$$(x_0,\ \cdots,\ x_n,\ k_0',\ h_n')\longmapsto y(t)$$

显然，T是线性双射，即$Y(p_n)$与R^{n+3}是同构的向量空间，因此，

$$\dim Y(p_n)=\dim R^{n+3}=n+3.$$

2. 当$k_0'=k_n'=0$时，每给$x(t_0)$，$x(t_1)$，…，$x(t_n)$一组值，由定理5.6-1知，就唯一确定一个三次样条函数$y(t)\in Y(y_n)$．当取$x(t_j)=1$．$x(t_k)=0$　$k=j$　$j=0$，1，…，n．时所确定的三次样条函数记作$y_j(t)$．则由定理5.6-1．

$$y_j(t_k)=x(t_k)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

$$=\delta_{jk}.$$

且，

$$y_j'(a)=k_0'=0,\quad y_j'(b)=k_n'=0.$$

令　$y_{n+1}(t)=t$，$y_{n+2}(t)=t^2$．下面证$\{y_0,\ \cdots y_{+n2}\}$线性无关．设$\lambda_0y_0(t)+\lambda_1y_1(t)+\cdots+\lambda_{n+1}t+\lambda_{n+2}t^2=0$．

令$t=t_k$，得，$\lambda_k+\lambda_{n+1}t_k+\lambda_{n+2}t_k^2=0$．$k=0$，1，…，$n$

对于$\lambda_0y_0(t)+\cdots+\lambda_ny_n(t)+\lambda_{n+1}t+\lambda_{n+2}t^2=0$

两边关于t求导数有，

$$\lambda_0 y_0'(t) + \cdots + \lambda_n y'_n(t) + \lambda_{n+1} + 2\lambda_{n+2} t = 0$$

分别取$t = a$和$t = b$，则得，

$$\lambda_{n+1} + 2a\lambda_{n+2} = 0$$

$$\lambda_{n+1} + 2b\lambda_{n+2} = 0$$

于是线性方程组：

$$\begin{cases} \lambda_k + \lambda_{n+1} \ t_k + \lambda_{k+1} \ t_k^2 = 0 \quad k = 0, 1, \cdots n \\ \lambda_{n+1} \ + 2a\lambda_{n+2} \ = 0 \\ \lambda_{n+1} \ + 2b\lambda_{n+2} \ = 0 \end{cases}$$

的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots t_0 & t_0^2 \\ & 1 & 0 & \cdots t_1 & t_1^2 \\ & & \ddots & \cdots\cdots\cdots \\ & & & 1 \ t_n & t_n^2 \\ & & & 1 & 2a \\ & & & 1 & 2b \end{vmatrix} = 2(b-a) \neq 0.$$

因此，$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+2} = 0$，即$\{y_0 \cdots y_{n+2}\}$线性无关. 由习题 1 知，$\dim Y(P_n) = n+3$.

从而证得$\{y_0, \cdots, y_{n+2}\}$是$Y(P_n)$的一个基.

3. 这里$\tau_0 = \tau_1 = 1$ $\quad x(-1) = 1, x(0) = 0, x(1) = 1, k_0' = 4t^3|_{t=-1} = -4, k_2' = 4t^3|_{t=1} = 4$, $\triangle x_1 = 0 - 1 = -1$, $\triangle x_2 = 1 - 0 = 1$. 代入定理5.6—1证明中的(＊)，解得$k_1' = 0$. 再将$x(-1) = 1, x(0) = 0$, $x(1) = 1$. $k_0' = -4$, $k_1' = 0$, $k_2' = 4$代入$P_i(t)$中得：$P_0(t) = t^2[1 - 2(t+1)] = -2t3 - t^2 \quad t \in [-1, 0]$

$$P_1(t) = 2t^3 - t^2 \qquad t \in (0, 1]$$

因此所求三次样条函数

$$y(t)=\begin{cases}-2t^3-t^2 & t\in[-1,0]\\ 2t^3-t^2 & t\in(0,1]\end{cases}$$

4. Chebyshev逼近为$\tilde{y}(t)=t^4-\frac{1}{8}T_4(t)\quad=t^2-\frac{1}{8}\tilde{y}$ (t)不满足(2a)与(5)

5. $x(t)-\tilde{y}(t)=t^4-t^2+\frac{1}{8}\quad\max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)-\tilde{y}(t)|=\frac{1}{8}$

由于对称关系. 当$t\in[0,1]$时, $x(t)-y(t)=t^4-2t^3+t^2$

$\max\limits_{\lambda\le t\le 1}|x(t)-y(t)|=\frac{1}{16}=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$,

因此. Chebyshey 多项式$\tilde{y}(t)$比样条函数$y(t)$有较大的极大偏差.

6. 由于三次样条函数$y(t)$在每个子空间$[t_j,t_{j+1}]$上与一个次数不超过三的多项式$P_i(t)$一致. 因为$y(t)$具有三阶连续导数. 则

$$P_{j-1}'''(t_j)=P_j'''(t_j)$$

因此每个多项式$P_i(t)$的三次项系数均是相同的, 又由于,

$P_{j-1}''(t_j)=P_j''(t_j)$, 所以二次项系数也是相同的. $P_i(t)\ j=0,1\cdots n-1$的三次项, 二次项系数均相同, 再由$P_{j-1}'(t_j)=P_j'(t_j)$得所有$P_i(t)$的一次项系数相同. 最后, 由$P_{j-1}(t_j)=P_j(t_j)$知常数项也一致. 从而证得$y(t)$必为一个次数不超过3的多项式.

7. 这里 $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1, x(0)=0, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$k'_0=k'_2=0, \tau_j=\frac{2}{\pi}, j=0,1$，$\triangle x_j=1$． $j=1,2$代入（＊）解

得，$k'_1=\frac{3}{\pi}$因此，

$$P_0(t)=-\frac{4}{\pi^2}t^2\left[1+2\times\frac{2}{\pi}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\frac{3}{\pi}\cdot\frac{4}{\pi^2}t\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$=-\frac{4}{\pi^3}t^3+\frac{3}{\pi}t$$

$$P_1(t)=\frac{4}{\pi^2}t^2\left[1-2\cdot\frac{2}{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\frac{3}{\pi}\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot t\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$=-\frac{4}{\pi^3}t^3+\frac{3}{\pi}t$$

8．显然有：$P(x)\geqslant 0, P(\lambda x)=|\lambda|\,P(x)$．

下面证P满足三角不等式：

$$[P(x+y)]^2=\langle x+y,x+y\rangle_2$$
$$=\langle x,x\rangle_2+\langle y,y\rangle_2+2\langle x,y\rangle_2$$

由Cauchy不等式，$\langle x,y\rangle_2\leqslant|\langle x,y\rangle_2|$

$\leqslant\langle x,x\rangle_2^{1/2}\ \langle y,y\rangle_2^{1/2}$

因此， $P(x+y)^2\leqslant[P(x)+P(y)]^2$

即 $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$

从而，证得P是拟范数.P不是范数，这是由于不满足：$P(x)=0\Longrightarrow x=\theta$，例如，$x=1$时，$P(x)=0$.

9.因为

$$\begin{aligned}\|x-y\|_2^2&=\langle x-y,x-y\rangle_2\\&=\langle x,x\rangle_2-2\langle x-y,y\rangle_2-\langle y,y\rangle_2\\&=P(x)^2-P(y)^2\leqslant P(x)^2\end{aligned}$$

所以，这样用P估计偏差，而与划分的具体选择无关.

习 题 6.1

1. $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -8 & 11-\lambda\end{vmatrix}=0$ $\quad\lambda_1=3;\quad -\xi_1+\xi_2=0\quad\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\quad\lambda_2=9;\quad -4\xi_1+\xi_2=0\quad\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ -b & a-\lambda\end{vmatrix}=0$ $\quad\lambda_1=a+ib;\quad -i\xi_1+\xi_2=0\quad\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ $\quad\lambda_2=a-ib;\quad -\xi_1+i\xi_2=0\quad\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$

2. 对$Ax=\lambda x(x\neq 0)$ 有$\bar{x}^TAx=\bar{x}^T\lambda x=\lambda\bar{x}^Tx$

则$\lambda=\dfrac{\bar{x}^TAx}{\bar{x}^Tx}$由$\bar{x}^Tx$为实的且

$$\overline{(\bar{x}^TAx)}=\overline{(\bar{x}^TAx)^T}=(x^T\bar{A}\bar{x})^T=\bar{x}^T\bar{A}^Tx$$

$$=\bar{x}^{-T}Ax$$

故亦为实的.

3.对$Ax=\lambda x(x\neq 0)$有 $\bar{x}^TAx=\bar{x}^T\lambda x=\lambda\bar{x}^Tx$

则 $\lambda = \dfrac{\overline{x}^T A x}{\overline{x}^T x}$ 由 $\overline{x}^T x$ 为实的且

$$\overline{(\overline{x}^T A x)} = \overline{(\overline{x}^T A x)^T} = (x^T \overline{A}\,\overline{x})^T = \overline{x}^T A^{-T} x$$

$$= -\overline{x}^T A x$$

则为纯虚数或零

4. 由 $Ax = \lambda x (x \neq 0)$ 得

$$(\overline{Ax})^T = \overline{x}^T \overline{A}^T = \overline{\lambda}\,\overline{x}^T \text{且} (\overline{Ax})^T$$

$$= \overline{x}^T A^{-1}$$

则 $\overline{x}^T A^{-1} \cdot Ax = \overline{\lambda}\,\overline{x}^T \lambda x$ 即 $\overline{x}^T x = |\lambda|^2 \overline{x}^T x$

得 $|\lambda|^2 = \dfrac{\overline{x}^T x}{\overline{x}^T x} = 1$

5.由3.10—2及习题2与4可得.

6.特征方程

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \beta_n \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_0 = 0$$

则 $\beta_n = (-1)^n, \beta_0 = \det A,$ $\beta_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn})$

又 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \dfrac{\beta_0}{\beta^n} \det A$

$$\text{trace}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots$$

$+\alpha_{nn}$

7. A^{-1}存在充要条件为$\det A\neq 0$，由习题6知

$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n$

又 $Ax_k=\lambda_k x_k$左乘A^{-1}得$A^{-1}x_k=\dfrac{1}{\lambda_k}x_k$

8. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$（二阶单位矩阵）

A的特征方程为$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0$ 根为λ_1，λ_2

A^{-1}的特征方程为$(a_{11}-\lambda D)(a_{22}-\lambda D)-a_{21}a_{12}=0$ 其中

$D=\det A=\lambda_1\lambda_2$

故特征值为$\dfrac{\lambda_1}{D}=\dfrac{1}{\lambda_2}$； $\dfrac{\lambda_2}{D}=\dfrac{1}{\lambda_1}$

9. 由$Ax_j=\lambda_j x_j$知$(kA)x_j=(k\lambda_j)x_j$

利用归纳法 $m=1$时$Ax_j=\lambda_j x_j$

假设 $m=k$时$A^k x^k=\lambda^k x^k$成立

左乘A $A^{k+1}\ x^k=\lambda_j Ax^k=\lambda_j\lambda_j x_j=\lambda_j^{k+1}x_j$

知 $m=k+1$时亦成立

10. 归纳证明：在P之次数为零时成立.

假设P之次数为$m-1$时成立即：

$P_{m-1}\ (A)x_k=P_{m-1}\ (\lambda_k)x_k$

对任一$P_m(A)=K_m A_m+P_{m-1}\ (A)$由习题9知

$$\begin{aligned}P_m(A)x_j&=[k_m A_m+P_{m-1}\ (A)]x^k\\&=K_m\lambda_k^m x^{\cdot}+P_{m-1}\ (\lambda_i)x^k\\&=P_m(\lambda_j)x_j\end{aligned}$$

11. 由$Ax_j=\lambda_j x_j$及$y_j=C^{-1}x_j$（即$x_j=Cy_j$）

则 $\widetilde{A}y_j=C^{-1}ACy_j=C^{-1}Ax_j=C^{-1}\lambda_j x_j=\lambda_j C^{-1}x_j=\lambda_j y_j$

12．特征值$\lambda=1$，$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$为特征向量但$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$不是

13．$\lambda=1$，代数重数为n，几何重数为1，特征向量为$(1,0,0,\cdots,0)^T$

14．设Y_0为A对应特征值λ_0的特征空间，并令$\dim Y_0=m$，对任一$x_0\in Y_0$有$Ax_0=\lambda_0x_0\in Y_0$故A映射Y_0到其自身．设A_0为对应映射$Y_0\to Y_0$的矩阵，则$det(A_0-\lambda I_0)=(\lambda_0-\lambda)^m$，(其中$I_0$为$m$阶单位矩阵)且为$det(A-\lambda I)$之因子，由代数重数定义得证。

15　由$Tx=x'=\lambda x$得$\lambda=0$时特征向量$x=$常数$(\neq 0)$
当$\lambda\neq 0$时$x(t)=e^{\lambda t}\notin X$．即$\lambda\neq 0$不是特征值。
代数重数为n，，几何重数为1．

习　题　6.2

1．$T_\lambda=(1-\lambda)I$　　$\sigma(I)=\{1\}=\sigma_P(I)$
由$(1-\lambda)Ixr=0$对应特征值1的特征空间为X，
$R_\lambda(I)=(1-\lambda)^{-1}I$对$\lambda\neq 1$为有界．

2．由定义直接得证．

3．设Z为特征空间，对任一$x\in Z$，有$(T-\lambda I)x=\theta$即$Tx=\lambda x$；又$(T-\lambda I)Tx=(T-\lambda I)\lambda x=\theta$∴$Tx\in Z$

例如6.1习题15及6.2习题1中之特征空间．

4．T的表示矩阵其最后$n-m$行与前m列相交的元素均为零．

5．不变子空间$Y_n=\mathrm{Span}\{e_n,\ e_{n+1},\ \cdots\}(n=1,2,\cdots)$
对任一λ　$(T-\lambda I)x=\theta\Longrightarrow x=\theta$．

6．$\lambda\in\sigma_p(T)$蕴涵$\lambda\in\sigma_p(T_1)$，并且扩充后原特征向量

仍保持，可能增加某些新的特征向量。

7. 令$\lambda\in\sigma_r(T_1)$ 则$T_{1\lambda}^{-1}$存在且其定义域不在 X 中稠密，由$D(T_1)\supset D(T)$ 得$D(T_{1\lambda})\supset D(T_\lambda)$ 且$R(T_{1\lambda})\supset R(T_\lambda)$所以$R(T_\lambda)$不可能在$X$中稠密，因而$\lambda\in\sigma_r(T)$

8. 令$\lambda\in\sigma_c(T)$则T_λ^{-1}存在且其定义域在X中稠密，由T_1为T的扩张，则$D(T)\subset D(T_1)$，从而$R(T_\lambda)\subset R(T_{1\lambda})$，故$R(T_{1\lambda})$在$X$中稠密。

再由T_λ^{-1}无界，则：或者$T_{1\lambda}^{-1}$无界此时$\lambda\in\sigma_c(T_1)$，或者$T_{1\lambda}^{-1}$不存在此时$\lambda\in\sigma_p(T_1)$.

9. 令$\lambda\in\rho(T_1)$则$T_{1\lambda}^{-1}$存在、有界且$R(T_{1\lambda})$在X中稠密，故T_λ^{-1}存在则$\lambda\in\rho(T)$

否则 $\lambda\in\sigma_r(T)$

10. 令对应T的有关量为ρ，σ_p，σ_c，σ_r

对应T_1的有关量为ρ_1，σ_{p1}，σ_{c1}，σ_{r1}，

则 $\rho\cup\sigma_p\cup\sigma_c\cup\sigma_r=\rho_1\cup\sigma_{p1}\cup\sigma_{c1}\cup\sigma_{r1}$

由习题6与8

$\sigma_p\cup\sigma_c\subset\sigma_{p1}\cup\sigma_{c1}$

右边二集不相交，则

$\rho\cup\sigma_r\supset\rho_1\cup\sigma_{r1}\supset\rho_1$

习 题 6.3

1. $\sigma(T)$为函数v的值域，由v为定义在$[0,1]$上的连续函数，其值域为一闭区间。

2. 例如：$v(t)=a+(b-a)t \quad Tx=vx$

3. $\{\lambda\}$ $\because R_\lambda(T|_Y)$不存在且$\lambda^*\neq\lambda$时 $R_{\lambda^*}(T|_Y)\in\rho(T|_Y)$

4. $\sigma_p(T)=\{q\,|q=\alpha_i\}$；由$\sigma(T)$是闭且$\alpha_i$在$[0,1]$中稠密，故$\sigma(T)=[0,1]$

5. $R_\lambda(T)$存在，且$T_\lambda(l^2)$其中$x\in l^2$，在l^2中稠密故$\lambda\notin\sigma_r(T)$因此$\lambda\in\sigma_c(T)$

6. 因C为可分，故$K\subset C$亦可分，设(α_i)在K中稠密，则α_i为T的特征值，因此$\sigma(T)=K$

7. 设$|\lambda|>\|T\|$且$y=T_\lambda x$则

$$\|y\|=\|\lambda x-Tx\|\geqslant|\lambda|\|x\|-\|Tx\|\geqslant(|\lambda|-\|T\|)\|x\|;$$

因而

$$\|R_\lambda(T)\|=\sup_{y\neq0}(\|x\|/\|y\|)\leqslant1/(|\lambda|-\|T\|)$$

8. 特征值为方程$x''-\lambda x=0$；$x(0)=0$，$x(\pi)=0$有非零解的λ，则$\lambda=-n^2(n\in N)$故谱无界

9. (a) l^∞为Banach空间$T\in B(l^\infty,l^\infty)$且$\|T\|=1$ 由定理6.3-4 $|\lambda|\geqslant\|T\|=1$时$\lambda\in\rho(T)$

(b) $|\lambda|\leqslant1$，考察T_λ^{-1}存在

$T_\lambda x=(\xi_2-\lambda\xi_1,\xi_3-\lambda\xi_2,\cdots)=0$

$\Longrightarrow x=(\alpha,\alpha\lambda,\alpha\lambda^2,\cdots)\in l^\infty,\alpha\in C$且$\alpha\neq0$

$x\neq0$，故$|\lambda|\leqslant1$均为特征值.

特征空间$y=\{x\in l^\infty\,|x=(\alpha,\alpha\lambda,\alpha\lambda^2,\cdots),\alpha\in C\}$

10. $|\lambda|=1$不是T的特征值，因为$(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\notin l^p$ $1\leqslant p<\infty$

即$T_\lambda x=\theta\Longrightarrow x=\theta$.

习 题 6.4

1. $T_\lambda=T-\lambda I\quad T_\mu=T-\mu I$

则$T_\lambda T_\mu = T_\mu T_\lambda$

$(T_\lambda T_\mu)^{-1} = (T_\mu T_\lambda)^{-1}$得$R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu$

2. $R_\mu R_\lambda = \dfrac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = R_\lambda R_\mu$

3. 由$R_\lambda(S)S_\lambda = I$ 且$T_\lambda R_\lambda(I) = I$，及$T_\lambda = T - \lambda I$，$S_\lambda = S - \lambda I$

$$\begin{aligned} R_\lambda(S)(T-S)R_\lambda(T) &= R_\lambda(S)(T_\lambda - S_\lambda)R_\lambda(T) \\ &= (R_\lambda(S)T_\lambda - I)R_\lambda(T) \\ &= R_\lambda(S) - R_\lambda(T) \end{aligned}$$

4. A、假设$p(T)x = y$ 有解则$x = p(T)^{-1}y$，其中$p(T)^{-1}$在全空间X上有定义.

$\lambda = 0$时 $(p(T) - I_\lambda)^{-1}$存在故$0 \in \rho(p(T))$，即$0 \notin \sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$

故对所有的$\lambda \in \sigma(T)$ $p(\lambda) \neq 0$

B. 反之，对所有$\lambda \in \sigma(T)$ $p(\lambda) \neq 0$则$0 \in \rho(p(T))$，由引理6.2-3用于$p(T)$知$p(T)^{-1}$定义在全空间X，故对所有的y，$p(T)x = y$有唯一解.

5. 多项式$p(\lambda) - \mu$只能在复数域内才一般的可分为一次因子的乘积.

6. 若方阵具有n个不同的特征值.

7. 若$\lambda \in \sigma(T)$由6.4-2定理

$\sigma(\alpha T) = \alpha\sigma(T)$即$\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \alpha\lambda \in \sigma(\alpha T)$

由6.3-5定义

$$r_\sigma(\alpha T) = \sup_{\alpha\lambda \in \sigma(\alpha T)} |\alpha\lambda| = |\alpha| \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = |\alpha|\, r_\sigma(T)$$

同理可证：$r_\sigma(T^k) = [r_\sigma(T)]^k$

8. (*a*) $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda = \pm 1$

(*b*) 显然$A^2 = I$

I之特征值为1，由6.4-2A之特征值为$\pm\sqrt{1} = \pm 1$

9. 例

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(a) R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda}\left[I - T + T(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \cdots)\right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda}(I - T) - \frac{1}{\lambda - 1}T$$

其在$\lambda = 0$，$\lambda = 1$不存在 $\therefore \sigma(T) = \{0, 1\}$

(*b*)令$p(T) = T^2 - T$ 故$p(T) = 0$

相应$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0$ $\lambda = 0, \lambda = 1$

10. (*a*) 由$T_B^2 = T_B$ 可得

(*b*) 计算 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$，可得

$\lambda = 1$的对应的特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

特征空间为$\xi_1\xi_2$平面上的直线$\xi_2 = -\xi_1$

$\lambda = 0$所对应的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

特征空间的平面为$\xi_1 = \xi_2$

习 题 6.5

$\dim X < \infty$，由2.4-2定理知其 完备.

2. $\|xy\| = \max |x(t)y(t)|$

$$\leqslant \max |x(t)| \max |y(t)| = \|x\| \|y\|$$

3. C^n为Banach空间，在其中引进乘法，对任意$x, y \in C^n$ $x = (\xi_1, \cdots \xi_n)$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$.

定义$xy = (\xi_1\eta_1, \cdots, \xi_n\eta_n)$

易验证其满足(1)，(2a)，(2b)，(3)

且其为具有单位元素$e = (1, \cdots, 1)$的交换代数.

由 $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$，$\|y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2\right)^{1/2}$

$$\|xy\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2\right)^{1/2}$$

证得(6)式 $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$ 成立.

4. (a)所有$x \neq 0$

(b)对$t \in [a, b]$函数值均不为零的所有$x(t)$

(c)所有n阶可逆方阵.

5. 设n阶方阵为A，λ为其谱值

(a)依6.5-6定义，$A - \lambda E$不可逆，则$\det |A - \lambda E| = 0$

得$(A - \lambda E)x = 0$ $Ax = \lambda x$有非零解，符合

6.1-1定义.

(b)依6.1－1定义$Ax=\lambda x$有非零解，则$det\ |A-\lambda E|\ =0$得$A-\lambda E$为非可逆矩阵，其符合6.5-6定义.

6.考察$\sin t-\lambda\cdot 1$不可逆，即$\sigma(\sin t)=[-1,\ 1]$为$\sin t$之值域，同理，一般$\sigma(x)=x$在$[a,b]$上的值域.

7. 向量空间到自身的线性算子已知为一线性空间，用线性算子合成为一线性算子来定义乘法，其满足(1)，(2a)，(2b)，(3).构成一代数

8. $y=ye=y(xz)=(yx)z=ez=z$,

9. $x^{-1}y=x^{-1}y(xx^{-1})=(x^{-1}x)yx^{-1}=yx^{-1}$,

10. A: n阶方阵　A_1:n阶主对角线以外均为零的矩阵.

C: αE.

若x; $y\in C\subset A$，即与A中任意元素可交换，则$\alpha x+\beta y$，xy均可与A中任意元素可交换且$xy=yx$,并满足有关运算规律，故C为A的可交换的子代数.

习　题　6.6

1. 由6.6-1定理直接可得.

2. 由(1)式

$$\|(ex)^{-1}-e-x\|=\|x^2+x^3+\cdots\|\leqslant\sum_{i=2}^{\infty}\|x\|^i=\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$$

3.由6.6-1定理

$$(e-yx^{-1})^{-1}=e+\sum_{i=1}^{\infty}(yx^{-1})^i$$

又　$(x-y)^{-1}=[(e-yx^{-1})x]^{-1}=x^{-1}(e-yx^{-1})^{-1}$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} x^{-1}(yx^{-1})^{j}$$

4．形如

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的复矩阵所成之集A，不难验证为一代数 即对任意$x, y \in A$及$c_1, c_2 \in k$。

$$\alpha x + \beta y \in A \quad xy \in A \quad \text{并满足}6.5(1)(2)(3)$$

$$\det(x - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{array}{l} (\alpha-\lambda)\lambda = 0 \\ \lambda = 0, \quad \lambda = \alpha. \end{array}$$

$\sigma(x) = \{0, \alpha\}$.

5．$x \in \tilde{\rho}(x) = C - \tilde{\sigma}(x)$则$x - \lambda e$在$B$中可逆

由$A \supset B$其在A中亦可逆即$x \in \rho(x)$

故$\tilde{\rho}(x) \subset \rho(x)$即$\tilde{\sigma}(x) \supset \sigma(x) = C - \rho(x)$

6．
$$\begin{aligned} v(\mu) - v(\lambda) &= (x-\mu e)^{-1} - (x-\lambda e)^{-1} \\ &= (x-\mu e)^{-1}(x-\lambda e)(x-\lambda e)^{-1} \\ &\quad - (x-\mu e)^{-1}(x-\mu e)(x-\lambda e)^{-1} \\ &= (x-\mu e)^{-1}[(x-\lambda e)-(x-\mu e)] \\ &\quad (x-\lambda e)^{-1} \\ &= (\mu-\lambda)(x-\mu e)^{-1}(x-\lambda e)^{-1} \\ &= (\mu-\lambda)v(\mu)v(\lambda). \end{aligned}$$

7．否则A会含一x，对所有$\lambda \in C$ $x - \lambda e \neq 0$，即$\sigma(x) = \varnothing$，与$\sigma(x) \neq \varnothing$矛盾．

8．对任意一$x_0 \in G$，设$x \in G$且满足

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|}$$

则 $\|e-x_0^{-1}x\| = \|x_0^{-1}x-e\| = \|x_0^{-1}(x-x_0)\| \leqslant \|x_0^{-1}\|$

$$\cdot\|x-x_0\| < \frac{1}{2}$$

由习题1知$x_0^{-1}x\in G$，再由6.6-1定理

$$x^{-1}x_0=(x_0^{-1}x)^{-1}=e+\sum_{j=1}^{\infty}(e-x_0^{-1}x)^j$$

由下式可知映射为连续的

$$\begin{aligned}
\|x^{-1}-x_0^{-1}\| &= \|(x^{-1}x_0-e)x_0^{-1}\| \leqslant \|x_0^{-1}\|\,\|x^{-1}x_0-e\| \\
&= \|x_0^{-1}\|\,\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(e-x_0^{-1}x)^j\right\| \\
&\leqslant \|x_0^{-1}\|\sum_{j=1}^{\infty}\|e-x_0^{-1}x\|^j \\
&= \frac{\|x_0^{-1}\|\,\|e-x_0^{-1}x\|}{1-\|e-x_0^{-1}x\|} \\
&< 2\|x_0^{-1}\|\,\|e-x_0^{-1}x\| \\
&\leqslant 2\|x_0^{-1}\|^2\|x-x_0\|
\end{aligned}$$

9．对任意非零元素$x\in A$，由题设存在$v\in A, vx=e$，且$v\neq 0$否则$0=vx=e$矛盾．

令$xv=w$，则$w\neq 0$，不然

$v=ev=vxv=vw=0$与$v\neq 0$ 矛盾．

对w存在$y\in A$ $yw=e$即$yxv=e$，则v有一左逆元素yx，和一右逆元素x，且由§6.6习题8知$yx=x$，又已知$yxv=e$ 得$xv=e$与$vx=e$ 联合则得x存在逆元素．

10．$\|x_ny_n-x_my_m\| = \|(x_n-x_m)y_n+x_m(y_n-y_m)\|$

$$\leqslant \|x_n-x_m\|\,\|y_n\|+\|x_m\|\,\|y_n-y_m\|$$

由Cauchy序列有界得(x_ny_n)为Cauchy序列再由

$$\|x_n y_n - xy\| \leqslant \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|$$

当$x_n \to x$, $y_n \to y$时$x_n y_n \to xy$.

习 题 7.1

1. 零算子为线性. 且 $\overline{T(M)} = \{\theta\}$为紧集.

2. 若 (x_n)有界，则存在子序列(y_k)使得$(T_1 y_k)$收敛，且(y_k)存在一子序列(z_m)使得$(T_2 z_m)$收敛. 则$(T_1 + T_2)(z_m) = T_1 z_m + T_2 z_m$收敛

又$(\alpha T_1)(z_m) = \alpha T_1 z_m$ 收敛

又紧算子为有界算子故$C(X, Y)$为$B(X, Y)$的子空间.

3. 对任意的 $T \in \overline{C(X, Y)}$，根据1.4-7(a)在$C(X, Y)$中存在一序列(T_n)，依$B(X, Y)$的范数收敛于T，由$B(X, Y)$为完备及7.1-5知T为紧的即$T \in C(X, Y)$

4. 由习题 3 知$C(X, Y)$为$B(X, Y)$中闭子空间，再根据1.4-8及2.7-14知$C(X, Y)$为完备.

5. 由$\|T_n x\| \leqslant \|x\|$ 可得

6. 若T为紧的，由M有界知$\overline{T(M)}$为紧的. 反之，$\overline{T(M)}$为紧的，若B为X的任意有界子集，存在足够大的正数r有$B \subset rM = \{x \in X | x = ry, \ y \in M\}$ 由T为线性$T(B) \subset T(rM) = rT(M)$则 $\overline{T(B)} \subset r\overline{T(M)}$，根据紧集定义 $r\overline{T(M)}$为紧的，$\overline{T(B)}$亦为紧的.

7. 由定理7.1－3可得(可将有界序列除以其界，变为范数不超过 1 的向量序列).

8. 由f为线性知T亦为线性. 再由f有界

$$\|Tx\| = |f(x)|\ \|z\| \leqslant C\|x\|$$

知T有界.再者$\dim T(X) \leqslant 1$由定理7.1-4(a)得证.

9. 不难证：T为线性、有界，且$\dim T(X) \leqslant 1$.再由7.1-4(a)得证，

10. 将7.1-4定理与7.1-5定理结合起来得证.

11. 投影算子为线性、有界的利用7.1-(4)可证.

12. 证明过程类似于7.1-6例.

13. 同习题12.

14.令T_n：$l^\infty \to l^\infty \quad x = (\xi_j) \in l^\infty$

$$T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \cdots)$$

$$\|(T - T_n)x\| = \sup_{j > n} \frac{|\xi_j|}{j} \leqslant \frac{\|x\|}{n+1}$$

$$\|T - T_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

由7.1-5得证.

15. 由$\overline{A}$为紧的 由2.5-6知$T(\overline{A})$为紧的，再由2.5-2知其为闭的. 由$T(A) \subset T(\overline{A})$ 推得$\overline{T(A)} \subset \overline{T(\overline{A})} = T(\overline{A})$ 故$\overline{T(A)}$是紧集 $T(\overline{A})$的子集且为闭，根据2.5节习题 9 知$\overline{T(A)}$为紧的，故$T(A)$为相对紧的.

习 题 7.2

1. 对给定的$\varepsilon > 0$，空间X有一$\varepsilon/2$一网$M = \{x_1, \cdots x_r\}$因

此Y包含于s个球$B(x_1;\varepsilon/2)$, …, $B(x_s,\varepsilon/2)$之中，由Y为无限，其中一球必包含Y之无限子集Z，其直径小于$\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$。

2. 设(x_n)为X中任意Cauchy序列，由X为紧的则(x_n)存在一收敛的子序列，如$x_{n_k}\to x\in X$，当$k\to\infty$. 令$\varepsilon>0$因(x_{n_k})收敛且(x_n)为Cauchy序列则存在N使得

$$d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}\quad d(x_n,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}\quad (n_k,n>N)$$

由

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n x_{n_k})+d(x_{n_k},x)\ <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$(n_k,n>N)$$

知(x_n)收敛证得X完备.

反之：对于实直线R其为完备，但非紧的（即非有界的）

3. 由7.2-2引理(a)知紧性$\Longrightarrow$全有界性.

反之：在R中开区间(a,b)为全有界的，但非紧的（非闭的）.

4. 若X为紧的，由7.2-2(a)则其为全有界的，再由习题2知其为完备的.

反之，由7.2-2(b)令$B=X$及$X=\overline{X}$知X为紧的.

5. 因X为紧的则其为全有界的.

6. 算子T_n：$l^2\to l^2$由

$$T_n x=y_n=(\eta_1,\cdots,\eta_n,0,0\cdots)$$

定义（其中η_i为习题中所表明的）

则T_n为线性、有界，由7.1-(a)得知T_n为紧的再由1.2节中Schwarz不等式(11)

$$\|(T-T_n)x\|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^2$$

$$=\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\xi_k\right|^2$$

$$\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_{jk}\right|^2\sum_{l=1}^{\infty}\left|\xi_l\right|^2$$

这蕴涵着$\|T-T_n\|\to 0(n\to\infty)$应用7.1-5命题得证.

7. 对习题6中的T_1, T_2，易验证$\alpha T_1+\beta T_2$亦为同类算子。又$Tx=(\eta_j)=(\xi_j/\sqrt{j})$定义一紧线性算子，但$\sum\sum|\alpha_{jk}|^2=\sum\frac{1}{n}$发散.

8. 不可能存在.因为l^∞为不可分的(参看1.3-7及7.2-3)

9. 可以.

10. 设$T_n x=(\lambda_1\xi_1,\cdots,\lambda_n\xi_n,0,0\cdots)$. 则$T_n$由7.1-4(a)知为紧的. 令$\varepsilon>0$，存在$N$对所有$j>N$ $|\lambda_j|<\varepsilon$. 且令$n>N$，则

$$\|Tx-T_n x\|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\lambda_k\xi_j\right|^2$$

$$\leqslant\varepsilon^2\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^2\leqslant\varepsilon^2\|x\|^2$$

则 $\|T-T_n\|\leqslant\varepsilon$.由7.1-5知$T$为紧的.

习 题 7.3

1. 由$S=T^p$为紧的，由定理7.3-1知S的特征值为可数且$\lambda=0$为可能存在的唯一聚点，再应用6.4-2多项式谱映射定理知

$$\sigma(S)=\sigma(T^p)=[\sigma(T)]^p$$

则$\sigma(T)$为可数且$\lambda=0$为可能存在的唯一聚点.

2. 由T_1为紧的则对X中任一有界序列(x_n)，其含有一有界子序列其象在Y中收敛，再由T_2为紧，存在一子序列其在Z中收敛. 故T_2T_1为紧的〔参看7.1-3、7.3-2与7.1-2(a)〕.

3. 由7.3-1定理知绝对值大于$k>0$的特征值为有限，再由定理7.3-3知对应每一特征值$\neq 0$的特征空间的维数为有限，故命题得证.

4. 设$B_1\subset X$为任一有界集，则$T_1(B_1)$为有界(定理2.7-7)

故$M=T_2T_1(B)$为相对紧的，则$\overline{M}$为紧的，由2.5-6及2.5-2

知$T_3(\overline{M})$为紧且闭的，再由$T_3(M)\subset T_3(\overline{M})$ 则$\overline{T_3(M)}\subset$

$T_3(\overline{M})$ 则$\overline{T_3(M)}$为紧的（2.5节习题9）.

另一证明：设(x_n)为X中任意有界序列，则(T_1x_n)为有界(2.7节)，$(T_2T_1x_n)$含有一收敛的子序列(y_k)(7.1-3)，则(T_3y_k)收敛(2.7-9, 1.4-8)，则$T_3T_2T_1$为紧的(7.1-3).

5. 设(x_n)为有界，如对所有的n $\|x_n\|\leqslant C$，则

$$\|Sx_n\|\leqslant\|S\|\,\|x_n\|\leqslant\|S\|\,C$$

故(Sx_n)为有界，由T为紧故(Sx_n)含有一子序列(Sx_{n_k})使得(TSx_{n_k})收敛，此即证明TS为紧.

6. 若T为紧的则T^*T亦为紧的(7.3-2)

反之：设T^*T为紧的，令(x_n)为有界，如$\|x_n\|<C$，则其含一子序列x_{n_k}使得$(T^*Tx_{n_k})$收敛. 故对任意$\varepsilon>0$，存在一N使得

$$\|T^*Tx_{n_k}-T^*Tx_{n_j}\|<\frac{\varepsilon}{2C}\qquad (k,j>N)$$

由此得出

$$\|Tx_{n_k}-Tx_{n_j}\|^2=\|T(x_{n_k}-x_{n_j})\|^2$$
$$=\langle(T^*Tx_{n_k}-T^*Tx_{n_j})x_{n_k}-x_{n_j}\rangle$$
$$\leqslant\|T^*Tx_{n_k}-T^*Tx_{n_j}\|\cdot\|x_{n_k}-x_{n_j}\| \quad (3.1\text{-}2)$$
$$\leqslant\|T^*Tx_{n_k}-T^*Tx_{n_j}\|\cdot 2C<\varepsilon \quad (j,k>N)$$

(则Tx_{n_k})收敛因而T为紧的.

7. T^*为线性有界(3.6-2)，由引理7.3-2知

TT^*为紧的，又$TT^*=(T^*)^*T^*$，由习题6得知T^*为紧的.

8. 否则，$TT^{-1}=T^{-1}T=I$，由引理7.3-2知其为紧的，这与引理7.1-2(b)矛盾.

9. 令$N=N(T_\lambda)$，假设$\dim N=\infty$，则N含有无限多个线性无关子集，从中可取一各项均不同的序列(x_n)，现考察$K_m=\mathrm{Span}\{x_1,\cdots,x_m\}$，则，$K_1\subset K_2\subset\cdots$，各为$N$的真闭子空间，且每个$K_i$均是$K_{i+1}$的真子集. 设$y_1=\|x_1\|^{-1}x_1$，由2.5-4（用$\theta=\frac{1}{2}$）存在一$y_2\in K_2$，使得$\|y_2\|=1$，且$\|y_2-y_1\|\geqslant\frac{1}{2}$，还存在一$y_3\in K_3$使得$\|y_3\|=1$，且$\|y_3-y_1\|\geqslant\frac{1}{2}$，$\|y_3-y_2\|\geqslant\frac{1}{2}$；等等. 由此就得一无限序列$(y_m)$使得$\|y_m\|=1$. 若$p\neq q$，有$\|y_p-y_q\|\geqslant\frac{1}{2}$，因此，

$$(A)\ \|\lambda y_p - \lambda y_q\| \geqslant |\lambda|/2 \qquad (p\neq q)$$

由$y_p\in N$，则有$0=T_\lambda y_p=(T-\lambda I)y_p$，因此，

$$(B)\qquad T y_p=\lambda y_p$$

因$\lambda\neq 0$，由关系(A)与(B)得知(Ty_p)不含有收敛的子序列，但这与T为紧的且(y_p)有界相矛盾，因此，$\dim N=\infty$不可能成立.

10．在习题9中得$Ty_m=\lambda y_m$，因此$T^p y_m=\lambda^p y_m$，由T^p是紧的，则序列$(T^p y_m)=(\lambda^p y_m)$应有一收敛的子序列，但由$\lambda\neq 0$及习题9解答中之$(A)$得

$$\|\lambda^p y_m-\lambda^p y_q\|\geqslant|\lambda^p|/2 \qquad (m\neq q)$$

故不可能，由此矛盾使命题得证.

11．若$\dim X=\infty$，则$T=I$不是紧的[参看7.1-2(b)]，若$\lambda=1\neq 0$得$\dim N(T_\lambda)=\dim X=\infty$.

又：若$\dim X=\infty$则$T=0$为紧的．对$\lambda=0$得$\dim N(T_\lambda)=\dim X=\infty$

12．若$\dim N(T_\lambda)=\infty$，则$N(T_\lambda)$中包含一无限的直交序列(x_n)，因此$T_\lambda x_n=0$即$Tx_\lambda=\lambda x_n$用§3.2的习题1对任意m且$n\neq m$有

$$\|Tx_n-Tx_m\|^2=\|\lambda x_n-\lambda x_m\|^2=|\lambda|^2\|x_n-x_m\|^2$$
$$=2|\lambda|^2$$

由$\lambda\neq 0$及上式可知序列(Tx_λ)不会含有收敛的子序列，根据(x_n)为有界这就与T的紧性相矛盾.

13．类似于习题9，若假设$\dim N(T_\lambda^p)=\infty$，从2.5-4可得出$(y_m)$，$\|y_m\|=1$．$y_m\in N(T_\lambda^*)=\infty$；同时$\|y_m-y_q\|\geqslant\frac{1}{2}$，对$m\neq q$，因此（参看课文7.3-4证明靠末尾的地方）

$$0 = T_\lambda^p y_m = (W - \mu I) y_m$$

因T^p为紧的且S^p为有界的，由$W^p = (TS)^p = (ST)^p = S^p T^p$知为紧的，故$(W^p y_m) = (\mu^p y_m)$必含一收敛的子序列，但由$\lambda \neq 0$因而$\mu \neq 0$且

$$\|\mu^p y_m - \mu^p y_p\| \geqslant |\mu^p| /2 \qquad (m \neq q)$$

知这是不可能的.

14. 反之，若$0 \in \rho(T)$，由7.1-2(a) 及6.2-3知$T^{-1} = R_0(T)$存在、有界且定义在全空间X上，再由7.3-2知$T^{-1}T = TT^{-1} = I$为紧的，但这与7.1-2(b)矛盾.

15. 若$\lambda = 0$　$N(T_\lambda^n) = \{x \mid \xi_{2k} = 0\}$

若$\lambda = 1$　$N(T_\lambda^n) = \{x \mid \xi_{2k-1} = 0\}$

若$\lambda \neq 0$，$\lambda \neq 1$　$N(T_\lambda^n) = \{\theta\}$.

T不是紧的.

习　题　7.4

1. 在7.4-1引理证明中，对(3)式使用T，对$n > m$得

$$T^2 y_n - T^2 y_m = \lambda^2 (y_n - x_2) \qquad x_2 \in N_{n-1}$$

$$\cdots = \cdots \qquad \cdots$$

$$T^p y_n - T^p y_m = \lambda^p (y_n - x_p) \qquad x_p \in N_{n-1}$$

$$\|T^p y_n - T^p y_m\| \geqslant |\lambda^p| /2$$

其他相同.

2. 设$N_m = N_{m+1}$　且$n > m$. 则由$x \in N_{n+1}$蕴涵

$$0 = T_\lambda^{n+1} x = T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m} x)$$

则$T_\lambda^{n-m} x \in N_{m+1} = N_m$　且$T_\lambda^n x = T_\lambda^m (T_\lambda^{n-m} x) = 0$即$x \in N_n$.

3. 由6.2节习题9知 $\lambda\in\rho(\widetilde{T})$蕴涵$\lambda\in\rho(T)\cup\sigma_r(T)$
（后面7.6-4定理证明$\lambda\neq 0$时$\lambda\in\rho(T)$）

4. T的紧性证明类似7.1-6例

若$\lambda=0$则$(1, 0, 0, \cdots)$为对应之特征向量则$\lambda\in\sigma_p(T)$

若$\lambda\neq 0$由$Tx=\lambda x$得$\xi_{n+1}=n!\lambda^n\xi_1$ 由$x\in l^2$知

$\xi_1=0$ 因而 $x=0$ 即 $\lambda\notin\sigma_p(T)$

5. 若$\lambda\neq 0$为使$Tx=\lambda x$ 则由 $0=\lambda\xi_1$,

$\xi_{n-1}/(n-1)=\lambda\xi_n (n=2, 3\cdots)\Longrightarrow x=0$ 即$\lambda\in\rho(T)$

若$\lambda=0$ 令$Tx=(\eta_j)$则$\eta_1=0$ 故$\overline{R(T)}\neq l^2$

即$0\notin\sigma_c(T)$又因为$\sigma_p(T)=\phi$ 故 $0\in\sigma_r(T)$.

6. 0为特征值，特征向量$x_n=(0, 0, \cdots, 0, 1)$

当$n\to\infty$即习题5中情况无特征值，转化为剩余谱.

7. $\{\alpha_j\}$中任一α_j均为T的特征值，由$\sigma(T)$是闭集，

$[0, 1]=\overline{\{\alpha_j\}}\subset\sigma(T)$. 根据7.4-4$(0, 1]\subset\sigma_p(T)$.

由定理7.3-1知T不能为紧的.

8. 由$T^m x=(\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \cdots)$ 故$N(T^m)=\{x\in l^2|\xi_j=0, j>m\}$故不存在整数$m$使得$N(T^m)=N(T^{m+1})$

又 $T^{n-1}(X)=T^n(X)$对n为非负整数均成立，故

$n_0=0$.

9. 若$\lambda\notin[0, 1]$则$T_\lambda^{-1}x(t)=x(t)/(t-\lambda)$故

$\sigma(T)=[0, 1]$为不可数. 再由7.4-4与7.3-1知若T为紧的则与其具有不可数个特征值矛盾.

10. $\sigma(T)=\{0, 2\}$，$\lambda=0$时 $r=1$；$\lambda=2$时$r=1$；

$\lambda\neq 0, 2$ $r=0$ 且

$N(T_0)=\{\alpha(1,\ 1)\}$;　　$N(T_2)=\{\gamma(1,\ -1)\}$

$T_0(R^2)=\{\beta(1,\ -1)\}$;　　$T_2(R^2)=\{\delta(1,\ 1)\}$

习 题 7.6

1. 泛函f_0定义为

$$f_0(y)=f_0(T_\lambda x)=g(x) \qquad 其中 y=T_\lambda x$$

由T_λ与g均为线性知f_0亦为线性.

2. 方程组 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k=\eta_j \qquad (j=1,\ \cdots n)$

有一解　$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$的充分必要条件是

对齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\beta_k=0 \qquad (k=1,\ \cdots,\ n)$$

所有解$b=(\beta_j)$均满足

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j\eta_j=0.$$

3. 令

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \cdots, & \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{n1}, & \cdots, & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad y=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

则由$Ax=y$

知: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k=\eta_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$　　(1)

相当于第五节中的式(4)为

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\varphi_j=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (2)$$

其一解为　$f=(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)$

由4.4-3例，知

$$f(y)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\eta_j=\sum_{j=1}^{n}\varphi_k\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}\varphi_j\right)=0.$$

4. 由定理7.14(b)知在有限维空间中，任意线性算子均为紧的，再由7.6-1得到相应结论.

5. 令$A=T-\lambda I$ 则7.5节(1)式成为$Ax=y$，其有一解的充分必要条件是对满足(4)式 $\sum_j\alpha_{jk}\omega_j=0(k=1,\cdots,n)$ 任意解$\omega=(w_j)$同时亦满足(5)式$\sum_j\eta_j\omega_j=0$. 再利用A的列向量α_1，…，α_n与点积，该条件成为

$$\omega\cdot\alpha_k=0\ \ (k=1,\ \cdots,\ n)\Longrightarrow w\cdot y=0$$

即向量ω其若与A的所有列向量直交时则其亦与增广矩阵所有列向量直交，由此得知二矩阵有相同的秩.

6. 若(1)有解x_*且(2)有解$x\neq0$则$x+x_*\neq x_*$仍为(1)的解，同理若(3)有解f_*且(4)有解$f\neq0$则
$f+f_*\neq f_*$仍为(3)的解.

7. (1) 式$Tx-\lambda x=y$ 有解$\Longleftrightarrow(T-\lambda I)x=y$有解
$\Longleftrightarrow R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$存在

其充分必要条件为

(2) 式 $Tx-\lambda x=0\Rightarrow x=0\Longleftrightarrow Tx=\lambda x\Longrightarrow x=0$.

8. (a) 设所要求的(f_j)存在，但对某一m_0，$z_{m_0}\in\overline{A}_{m_0}$ 则由4.5节习题 8 知，$f_{m_0}(z_{m_0})=0$，这与$f_{m_0}(z_{m_0})=1$矛盾.

(b) 反之，对任意m_0令$z_{m_0}\notin\overline{A}_{\omega}$，由4.5节习题5，存在

一$g_{m_0}\in X^*$，其在$\overline{A_{m_0}}$上的值均为零而在z_{m_0}上的值为1，因此对$k\neq m_0$ $g_{m_0}(z_k)=0$且$g_{m_0}(z_{m_0})=1$.

9. 有限双直交系$(z_1, \cdots z_k)$；$(f_1, \cdots f_n)$

$z_1, \cdots, z_k$线性无关. 且$A_m=\overline{A_m}$.

10. 对集$\{z_1, \cdots, z_n\}$若$\sum\alpha_k z_k=0$

以任意的y_j作内积：

$$\sum\alpha_k\langle z_k, y_j\rangle=\alpha_j=0$$

同理可证$\{y_1, \cdots, y_k\}$线性无关.

11. 根据3.5-1Riesz表示定理，双直交系

$\{z_1, z_2, \cdots\}$，$\{y_1, y_2\cdots\}$的条件形式为$\langle z_k, y_j\rangle=\delta_{kj}$

12. 对H中任一线性无关集$\{y_1, \cdots y_k\}$在H中存在一集$\{z_1, \cdots, z_m\}$使得$\langle z_k, y_j\rangle=\sigma_{kj}$，

证明：将$\{y_1, \cdots, y_m\}$标准正交化得$\{e_1, \cdots, e_m\}$

（参看§3.4）

则：
$$y_j=\sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}e_s;\quad e_s=\sum_{r=1}^{m}\beta_{sr}y_r$$

其中：若$s>j$ $\alpha_{js}=0$；若$r>s$ $\beta_{sr}=0$因此

$$y_j=\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\alpha_{js}\beta_{sr}y_r$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}\beta_{sr}\right)\cdot y_r.$$

故

$$\sum_{s=1}^{m}\alpha_{js}\beta_{sr}=\delta_{jr}=\begin{cases}0, & \text{若} j\neq r\\ 1, & j=r.\end{cases}$$

选取

$$z_k=\sum_{t=1}^{m}\overline{\beta_{tg}}e_t,$$

则可得预期结果：

$$\langle z_k,\ y_i\rangle=\left\langle\sum_{t=1}^{m}\overline{\beta_{tk}}e_t,\ \sum_{s=1}^{n}\alpha_{js}e\right\rangle$$

$$=\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\overline{\beta_{tk}}\overline{\alpha_{js}}\delta_{ts}$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\overline{\beta_{sk}}\overline{\alpha_{js}}=\delta_{jk}.$$

13. 若 $A=(\alpha_{jk})$

两方程组

$$\sum_k\alpha_{jk}\xi_k=0\qquad(j=1,\ \cdots,\ n)$$

与

$$\sum_j\alpha_{jk}\eta_j=0\qquad(k=1,\ \cdots,\ n)$$

具有相同数目的线性无关解（即若$r=\text{rank}A=n$时只有平凡解，若$r<n$时有$n-r$个线性无关解）

14. 令$\dim R(T)=\eta$，$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$为$R(T)$的一基

由4.5-7引理的结论中得知：存在$g_n\in Y^*(k=1,\cdots,\ n)$使得$g_k(y_j)=\delta_{jk}$（参看定理7.6-3(a)的证明部分）.且$\{g_1,\ \cdots,\ g_n\}$线性无关，事实上，若$\sum_{n=1}^{n}\alpha_kg_k=0$，则

$$\alpha_j=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kg_k\right)(y_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kg_k(y_j)=0$$

令$x\in X$，则$Tx\in R(T)$．具有表示式

$$Tx=f_1(x)y_1+\cdots+f_n(x)y_n$$

其中$f_k\in X^*$.
这蕴涵着

$$g_k(Tx)=(T^\times g_k)(x)=f_k(x)$$

下面证明$\{f_1, \cdots, f_n\}$线性无关. 对于y_j，存在$x_j\in X$，使得$Tx_j=y_j$. 令$\beta_1 f_1+\cdots+B_n f_n=0$则，

$$\beta_j=\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k\right)\left(x_j\right)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(x_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(T^\times g_k)(x_j)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k g_k(Tx_j)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}\beta_k g_b(y_j)=0$$

15. 给定级数为一致收敛，通过逐项积分，Tx可由Fourier级数表示.因$Tx\in C[0, \pi]$则$Tx=0$当且仅当$x=0$，若$y(0)\neq 0$，则上述级数各项在$s=0$时为零，故$Tx=y$无解.

习 题 7.7

1. 在这种情况下，(2)中的T为n阶方阵，x与y为n行列向量. 或是非齐次方程组对任意给定的方程右边的向量y均有唯一解；或是对应齐次方程组至少有非平凡解，在第一种情况下，同样适用于其转置矩阵. 在第二种情况下，齐次方程组与其转置方程组具有相同的$(n-r)$个线性无关解，其中r为系数矩阵的秩数.

2. 将(1)式乘以连续函数z并在$[a, b]$上积分，

$$\int_a^b x(s)z(s)ds-\mu\int_a^b\left(\int_a^b k(s,t)x(t)dt\right)z(s)ds$$

$$= \int_a^b \tilde{y}(s) z(s) ds$$

由于函数连续，故可交换积分次序；并将s变换为t，t换为s后得到

$$\int_a^b \left[z(s) - \mu \int_a^b k(t,s) z(t) dt \right] x(s) ds$$

$$= \int_a^b \tilde{y}(s) z(s) ds$$

因此若方括号[…]内的表达式对某一$z \neq 0$为0，则(1)没有解，除非$\tilde{y}$使得对所有[…] = 0的解z均有

$$\int_a^b \tilde{y}(s) z(s) ds = 0$$

这就具体说明了定理7.5-1.

3. 例如

$$[a, b] = [0, 1]$$

$$k(s, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant S < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

且$x(t)$在$[0,1]$连续$\int_0^1 x(t) dt \neq 0$.

则$(Tx)(S) = \int_0^1 k(s,t) x(t) dt = \begin{cases} \int_0^1 x(t) dt & 0 \leqslant S < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1 \end{cases}$

即$Tx \notin C[0,1]$

4．令　$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt$.

则(1)式成为 $Tx-\lambda x=y$

$$-\lambda\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)x=y$$

由7.3-1定理当　$\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|<1$　即$\|\mu T\|<1$时

$$x=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}y\ =\tilde{y}+\mu T\tilde{y}+\mu^2T^2y^2+\cdots$$

又　$|(T\tilde{y})(s)|=\left|\int_a^b K(s,t)\tilde{y}(t)dt\right|$

$$\leqslant(b-a)\cdot M\cdot\|\tilde{y}\|$$

$$\|T\tilde{y}\|/\|\tilde{y}\|\leqslant(b-a)M$$

即　$\|\mu T\|<1$.

故　Neumann级数收敛，

5．令 $\int_0^1 x(t)dt=C$

则　$x(s)=\mu\cdot C+1$

$$\int_0^1 x(s)ds=\int_0^1(\mu C+1)ds$$

$$C=\mu C+1$$

即　$C=1/(1-\mu)$.　　　$(\mu\neq1)$.

代入　$x(s)-\mu\int_0^1 x(t)dt=1$

得　$x(s)=1/(1-\mu)$.　　　$(\mu\neq1)$

Neumann级数

$$x = -\mu(y + \mu T y + \mu^2 T^2 y + \cdots)$$

其中$y = -1/\mu$；$Ty = -1/\mu$；$T^2 y = -1/\mu$，$\cdots T^n y = -1/\mu$

所以 $x(s) = 1 + \mu + \mu^2 + \cdots = 1/(1-\mu)$ （$|\mu| < 1$）

对应齐次方程：

$$x(s) - \mu\int_0^1 x(t)dt = 0$$

$\mu \neq 1$ 时 $x(s) = 0$

$\mu = 1$ 时 $x(s) = C$（任意）

此结果与7.7-3定理一致.

6. 令 $\int_a^b x(t)dt = \alpha$ 及 $\int_a^b \tilde{y}(s)ds = c$

解方程得 $x(s) = \tilde{y}(s) + \mu k_0 c/[1 - \mu k_0(b-a)]$

又 Neumann级数

$$x = \tilde{y} + \mu T\tilde{y} + \mu^2 T^2 y + \cdots$$

即

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu k_0 c + \mu^2 k_0^2 c(b-a) + \mu^3 k_0^3 c(b-a)^2 + \cdots$$

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu k_0 c/[1 - \mu k_0(b-a)]$$

$$|\mu| < 1/k_0(b-a)$$

7. 由 $(T\tilde{y})(s) = \int_a^b K(s,t)\tilde{y}(t)dt$

$$(T^2\tilde{y})(s) = \int_a^b K(s,t)\cdot\left[\int_a^b K(t_1,t)\tilde{y}(t)dt\right]dt_1$$

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)dt_1\right]\tilde{y}(t)dt$$

对n可归纳证明

$$(T^{n}\tilde{y})(s)=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},t)dt_1\cdots dt_n\right]\tilde{y}(t)dt.$$

则
$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b K(s,t)\tilde{y}(t)d\cdot$$
$$+\mu^2\int_a^b K_{(2)}(s,t)\tilde{y}(t)dt+\cdots$$
$$=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b\left[K_{(1)}(s,t)+\mu K_{(2)}(s,t)+\mu^2K_{(3)}(s,t)+\cdots\right]\tilde{y}(t)dt$$

其中 $K_{(1)}(s,t)=K(s,t)$
$$=\tilde{y}(s)+\mu\int_a^b\tilde{K}(s,t,\mu)y^2(t)dt.$$

又∵ $K_n(s,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},t)dt\cdots dt_{n-1}$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-2}t)dt_1\cdots dt_{n-2}\right]K\cdot(u,t)\cdot du$$

$$=\int_a^b K_{(n-1)}(s,u)\cdot K(u,t)du$$

8. $K_1(s,t)=K(s,t)$

$$K_2(s,t)=\frac{1}{2}\pi a_1a_2\sin S\cdot\sin 3t$$

$$K_n(s,t)=0\quad(n=3,4,\cdots)$$

$$\therefore \quad \widetilde{K}(s,t,u)=(a_1\sin s\cdot\sin 2t+a_1\sin 2s\cdot\sin 3t)$$

$$+\frac{1}{2}\mu\pi a_1a_2\sin s\cdot\sin 3t$$

9. $K_1(s,t)=K(s,t)$

$$K_2(s,t)=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin ns\cos nu\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin mu\cos mt\right)du$$

由条件 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_na_m\sin ns\cdot\cos mt\cdot\int_0^{2\pi}\cos nu\cdot\sin mu\,du$$

$$=0$$

$$K_3(s,t)=K_4(s,t)=\cdots=0$$

$$\therefore \quad x(s)=\widetilde{y}(s)+\mu\int_0^{2\pi}K(s,t)\,\widetilde{y}(t)dt.$$

10. (1)式成为

$$x(s)-\mu s\int_0^1(1+t)x(t)dt=\widetilde{y}(s)$$

令 $\int_0^1(1+t)x(t)dt=c$ (未知常数)

则 $x(t)-\mu tc=\widetilde{y}(t)$

$$(1+t)x(t)=\mu ct(1+t)+\widetilde{y}(t)(1+t)$$

$$\int_0^1(1+t)x(t)dt=\mu c\int_0^1 t(+t)dt$$

$$+\int_0^1(1+t)\,\widetilde{y}(t)dt$$

$$c\left(1-\frac{5}{6}\mu\right)=\int_0^1(1+t)\tilde{y}(t)dt$$

因此 $\lambda=\frac{1}{\mu}=\frac{5}{6}$为特征值

当$\mu=\frac{6}{5}$代入对应齐次方程

$$x(s)-\frac{6}{5}s\int_0^1(1+t)x(t)dt=$$

令 $\int_0^1(1+t)x(t)dt=k$

得$x(s)=ks$（k为任意）

若$\mu\neq 6/5$，方程有唯一解为：

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\frac{\mu s}{\left(1-\frac{5}{6}\mu\right)}\cdot\int_0^1(1+t)\tilde{y}(t)dt$$

11. 与习题10方法类似，得

特征值$\lambda=1/\mu=e^2-1$；特征函数e^t.

12. 原式为

$$x(s)-\mu\sin s\int_0^{2\pi}\cos t\cdot x(t)dt=\tilde{y}(s)$$

令 $\int_0^{2\pi}\cos t x(t)dt=c$

$$x(s)-\mu\sin s\cdot c=\tilde{y}(s)$$

乘以$\cos s$，在$[0,2\pi]$上积分得

$$\int_0^{2\pi}x(s)\cos s ds-\mu c\int_0^{2\pi}\sin s\cdot\cos s ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos s \cdot \tilde{y}(s)\,ds$$

得 $$c = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot \tilde{y}(s)\,ds$$

故解为：

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \sin s \int_0^{2\pi} \cos t\, \tilde{y}(t)\,dt.$$

13. 例1：x_n定义在[0，1]上且$x_n(t) = t^n$

例2：x_n定义在[-1，1]上且 $x_n(t) = |t|^{1/n}$

上述实例均不含一致收敛的子序列，因为其极限函数为不连续

14. (1)式变为

$$x(s) = \tilde{y}(s) + \mu \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(s) b_j(t) \cdot x(t)\,dt$$

$$= \tilde{y}(s) + \mu \sum_{j=1}^n c_j a_j(s)$$

$$c_j = \int_a^b b_j(t)\, x(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \tilde{y}(t) \cdot b_j(t)\,dt + \mu \sum_{k=1}^n \int_a^b c_k a_k(t) b_j(t)\,dt$$

令 $$a_{jk} = \int_a^b b_j(t) a_k(t)\,dt$$

$$c_j - \mu \sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = \int_a^b \tilde{y}(t) b_j(t)\,dt = y_j.$$

15. (a) $K(s, t) = \sum_{j=1}^n a_j(s) \cdot b_j(t) = s + t$

$a_1(s) = s$； $a_2(s) = 1$； $b_1(t) = 1$； $b_2(t) = t$

$y_1 = \int_0^1 \tilde{y}(t)\,dt$； $y_2 = \int_0^1 t\, \tilde{y}(t)\,dt$

$$a_{11}=\frac{1}{2};\quad a_{21}=\frac{1}{3};\quad a_{12}=1;\quad a_{22}=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} c_1-\mu\left(\dfrac{c_1}{2}+c_2\right)=y_1 \\ c_2-\mu\left(\dfrac{c_1}{3}+\dfrac{c_2}{2}\right)=y_2 \end{cases}$$

$$x(s)=\tilde{y}(s)+\mu\int_0^1\frac{6(\mu-2)(s+t)-12\mu st-4\mu}{\mu^2+12\mu-12}\tilde{y}(t)dt$$

(*b*) 特征值:

$$\mu_1=-6+4\sqrt{3};\quad \mu_2=-6-4\sqrt{3};$$

$$\lambda_1=1/\mu_1;\quad \lambda_2=1/\mu_2$$

特征函数:

$$x_1(s)=\frac{2\mu_1}{2-\mu_1}s+1;\quad x_2(s)=\frac{2\mu_2}{2-\mu_2}s+1$$

参 考 书 目

(1) E.Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications, Wiley, New York 1978

(2) W.Rudin, Functional Analysis, (1973)

(3) J.Tinsley Oden, Applied Funclional Analyss, (1979)

(4) Ruth F.Curtain and A.J.PRitchard, Functional Analysis in Moden Applied Mathematics (1977)

(5) 夏道行等 实变函数论与泛函分析，人民教育出版社，1979

(6) 定光桂，巴拿赫空间引论，科学出版社 1984.

(7) 郑维行，王声望，实变函数与泛函分析概要，人民教育出版社. 1980

(8) 关肇直等，线性泛函分析入门，上海科技出版社。1979

[General Information]
书名=泛函分析入门及题解
作者=刘树琪　　徐红梅
页数=544
SS号=10097940
出版日期=1988年09月第1版